

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. BOLLEY

J. CAMUS

B. HELFFER

Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 13,
p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975__A12_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

par P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER

Exposé n° XIII

26 Février 1975

§ 1. INTRODUCTION

On considère l'opérateur L défini dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, x); t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$ par $L = L(t; D_t, D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} a_{kj\alpha} t^k D_t^j D_x^\alpha$ où $a_{kj\alpha} \in \mathbb{C}$. On suppose que L

est elliptique pour $t \neq 0$ et que son symbole a une propriété de quasi-homogénéité de la forme suivante : il existe $\delta \geq 0$ et $\sigma \in \mathbb{Z}$ tels que pour tous $\lambda > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$L\left(\frac{t}{\lambda}; \lambda\tau, \lambda^\delta \xi\right) = \lambda^{-\sigma} L(t; \tau, \xi).$$

Autrement dit L est du type suivant :

$$L(t; D_t, D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha} t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha$$

et l'hypothèse d'ellipticité impose que $\sigma + m$ et $\sigma + \delta m$ soient dans $\mathbb{N}$.

Le cas où la variété $t = 0$ est non caractéristique, i. e. quand $\sigma = -m$, a été traité dans [6] ; on montre que l'étude de l'hypoellipticité de cet opérateur L se ramène à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'opérateurs différentiels à une variable ; plus précisément l'opérateur L est hypoelliptique si et seulement si, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation : $L(t; D_t, \xi)v(t) = 0$, n'a que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On se propose d'étudier, toujours du point de vue de l'hypoellipticité, l'opérateur L dans le cas où la variété $t = 0$ est caractéristique, i.e. quand $\sigma > -m$. On commence par donner deux résultats négatifs :

- quand $\delta > 0$, l'opérateur L est du type de Fuchs au sens de [1] ; or il a été montré dans [8] que les opérateurs du type de Fuchs ne sont pas hypoelliptiques lorsque la variété $t = 0$ est caractéristique. C'est le cas pour L dès que $\sigma > -m$.

- quand $\delta = 0$, l'opérateur L n'est plus du type de Fuchs mais il n'est pas non plus hypoelliptique (de façon précise, pour $\ell \in \mathbb{N}$, on peut construire un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, une fonction $u(t, x) \in C^\ell(\mathbb{R} \times \Omega)$, telle que

$u \notin C^{\ell+1}(\mathbb{R} \times \Omega)$ et $Lu \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$; la fonction u est cherchée du type :
 $u(t, x) = Y(t) t^{\ell+1} \varphi(x)$, la fonction φ étant construite en résolvant un problème de Cauchy en x).

On pose le problème de l'hypoellipticité partielle de L , c'est à dire l'hypoellipticité à partir d'un espace de distributions qui sont C^∞ dans la direction t . On montre :

- quand $\delta > 0$, que l'étude de l'hypoellipticité partielle de L se ramène à l'étude du noyau dans $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ d'opérateurs différentiels ordinaires (comme dans le cas où la variété $t=0$ est non caractéristique) ; plus précisément L est partiellement hypoelliptique si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'équation $L(t; D_t, \xi)(t) = 0$ n'a que la solution triviale dans $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

- quand $\delta = 0$, que l'opérateur L est toujours partiellement hypoelliptique.

Pour fixer les idées, on donne tout de suite quelques exemples :

- l'opérateur $t D_t^2 + t D_x^2 + \lambda D_x + \mu D_t$ (correspondant à $m=2$, $\sigma=-1$, $\delta=1$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$

- l'opérateur $D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x$ (correspondant à $m=2$, $\sigma=-2$, $\delta=2$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ (et donc hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, car la variété $t=0$ n'est pas caractéristique.) pour $\lambda \neq \pm(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.
 (cf. [6]).

- l'opérateur $t D_t^2 + i D_x^2 + \lambda D_t$ (correspondant à $m=2$, $\sigma=-1$, $\delta=\frac{1}{2}$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$. hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

- L'opérateur $t^2 D_t^2 + D_x^2$ (correspondant à $m=1$, $\sigma=0$, $\delta=0$) est partiellement/

Pour les démonstrations complètes de ce qui suit et pour des compléments, on renvoie à [3]. [4].

§ 2. ETUDE DU CAS $\delta > 0$

2.1 Enoncé des résultats

Plus généralement on considère les opérateurs définis sur $I \times \Omega$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$) par

$$L = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_t^j D_x^\alpha$$

où $t \in I$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$,

$$D_x^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_t = i^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z} \text{ tels que}$$

$\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, $[\sigma + \delta|\alpha| + j]$ désigne le plus petit entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à $\sigma + \delta|\alpha| + j$.

On suppose que les coefficients $a_{j\alpha}$ appartiennent à $C^\infty(\overline{I \times \Omega})$.

On introduit les conditions suivantes :

Condition 1 : L est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} \tau^j \xi^\alpha \neq 0.$$

On introduit une partie principale L^0 de L définie par

$$L^0 = L^0(x; D_t, D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha.$$

Condition 2 : L^0 est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ i.e. pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \tau^j \xi^\alpha \neq 0.$$

(notons que la condition 2 entraîne la condition 1 dans un voisinage de $t = 0$, éventuellement plus petit que $I \times \Omega$).

Condition 3 : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, et pour tout $x \in \Omega$, l'équation $L^0(x; D_t, \omega) v(t) = 0$ n'a que la solution $v = 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a alors :

Théorème 1 : Si l'opérateur L vérifie les conditions 1, 2, 3 il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$, i.e. : pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Lorsque les coefficients $a_{j\alpha}$ de la partie principale L^0 sont constants, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 2 : Si les coefficients de L^0 sont constants et si la condition 2 est vérifiée, alors L^0 est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si la condition 3 est satisfaite.

Remarque : On peut préciser le théorème 1.1 en utilisant la régularité normale des opérateurs de Fuchs donnée dans [1] ; il suffit en fait de supposer que $u \in C^k(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ où l'entier k dépend de l'équation indicielle de l'opérateur L en $t=0$.

Il se peut que les conditions précédentes ne soient vérifiées que pour $t > 0$. Plus précisément on considère les conditions suivantes :

Condition 1' : L'opérateur L est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$.

Condition 2' : L'opérateur L^0 est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$.

Condition 3' : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$ et tout $x \in \Omega$, l'équation $L^0(x, D_t, \omega) v(t) = 0$ n'a que la solution $v = 0$ dans $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

On a alors :

Théorème 1' : Si l'opérateur L vérifie les conditions 1', 2' et 3', il est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$ où $I_+ = \{t \in I; t \geq 0\}$, i.e. pour tout sous intervalle I' de I_+ et tout ouvert $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$, alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Remarque : Lorsque la variété $t=0$ est non caractéristique i.e. $\sigma = -m$ on peut remplacer hypoellipticité partielle par hypoellipticité. On retrouve les résultats de [6] pour $\delta > 1$ et on retrouve les opérateurs elliptiques pour $\delta = 1$.

L'étude de l'hypoellipticité partielle est abordée par deux méthodes :

- une méthode basée sur les quotients différentiels à partir d'une estimation a priori,

- une méthode basée sur la construction d'une paramétrix partielle en x .

Les deux méthodes nécessitent une étude préalable des opérateurs en la seule variable t , associés à l'opérateur L^0 , qui interviennent dans les conditions 3 et 3'.

2.2 Etude d'opérateurs différentiels à une variable

Soit l'opérateur différentiel ordinaire L défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L \equiv L(t, D_t) \equiv \sum_{\substack{k+j \leq m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk} t^{\sigma+\delta k+j} D_t^j$$

où $D_t = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$.

On introduit la condition

$$(H) : \text{ pour tout } t \neq 0 \text{ et pour tout } \tau \in \mathbb{R} \text{ on a : } \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk} t^{\sigma+\delta k+j} \tau^j \neq 0$$

Cette condition est équivalente à dire que les polynômes

$$P^+(\tau) = \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk} \tau^j \text{ et } P^-(\tau) = \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk} (-1)^{\delta j} \tau^j$$

ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. On note m_+ (resp. m_-) le nombre de zéros τ de $P^+(\tau)$ (resp. $P^-(\tau)$) tels que $\text{Im } \tau > 0$ (resp. < 0).

Soit $F(\lambda) = 0$, l'équation indicelle de l'opérateur L en $t=0$
i.e. : $F(\lambda) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ \sigma+j \in \mathbb{N}}} a_{j0} (-i)^j \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-j+1)$.

On note r_p le nombre de racines de $F(\lambda) = 0$ telles que $\text{Re } \lambda > p - \sigma - \frac{1}{2}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^p(\mathbb{R})$, l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^p(\mathbb{R}) = \{ u \in H^{-\sigma}(\mathbb{R}), t^{\sigma+\delta k+j} D_t^{j+h} u \in L^2(\mathbb{R}), 0 \leq h \leq p, k+j \leq m, \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N} \}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3 : Si la condition H est vérifiée et si l'équation $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\operatorname{Re} \lambda = p - \sigma - \frac{1}{2}$, alors l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^p(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$, d'indice :
 $m_+ + m_- + \sigma - 2(m - r_p + \min(\sigma, p))$.

Lorsque δ est un entier, l'expression de l'indice se simplifie.

Lorsque p est assez grand, l'indice est constant et on a :
 $\operatorname{Ker} L \cap W^p(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ où $\operatorname{Ker} L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), Lu = 0\}$.

En particulier pour $\delta = 1$ et pour p assez grand, $\operatorname{Ker} L \cap W^p(\mathbb{R}) = \{0\}$ de sorte que $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Il en est bien sûr tout autrement dans le cas général.

Sur $\mathbb{R}_+$ on a des résultats du même type. On introduit la condition :

(H') : pour tout $t > 0$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a : $\sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{jk} t^{\sigma+\delta k+j} \tau \neq 0$.

On a alors :

Théorème 3' : Si la condition (H') est vérifiée et si l'équation $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\operatorname{Re} \lambda = p - \sigma - \frac{1}{2}$, alors l'opérateur L est un opérateur à indice de $W^p(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, d'indice $m_+ - m + r_p - \min(\sigma, p)$.

Lorsque p est assez grand l'indice est constant et
 $\operatorname{Ker}_+ L \cap W^p(\mathbb{R}_+) = \operatorname{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ où $\operatorname{Ker}_+ L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), Lu = 0\}$.

Pour démontrer ces résultats, on fait une étude au voisinage de chaque point singulier de l'opérateur L, à savoir $t = 0$ et $t = \infty$, et on regroupe les différents résultats grâce à des théorèmes généraux d'indice.

2.3 Esquisse de la démonstration des théorèmes 1 et 1'

On se limite à la démonstration du théorème 1 ; la démonstration du théorème étant analogue.

On applique le théorème 3 à l'opérateur $L^0(x, D_t, \omega)$ pour $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$: il existe un entier p_0 tel que pour tout entier $p \geq p_0$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $x \in \Omega$ (qu'on peut supposer relativement compact), l'opérateur $L^0(x, D_t, \omega)$ est un isomorphisme de $W^p(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de $H^p(\mathbb{R})$. Par suite il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $v(s) \in W^p(\mathbb{R})$, on ait :

$$\sum_{0 \leq h \leq p} \sum_{\substack{j+k \leq m \\ \sigma + \delta k + j \in \mathbb{N}}} \|s^{\sigma + \delta k + j} D_s^j v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_p \sum_{0 \leq h \leq p} \|D_s^h (L^0(x; D_s, \omega) v(s))\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $u(t) \in W^p(\mathbb{R})$, on pose $s = t|\xi|^{1/\delta}$ et $v(s) = u(t)$. Il en résulte, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq 1$, l'inégalité :

$$\sum_{0 \leq h \leq p} \sum_{\substack{j+k \leq m \\ \sigma + \delta k + j \in \mathbb{N}}} (1 + |\xi|^2)^{k + \frac{p-h}{\delta}} \|t^{\sigma + \delta k + j} D_t^{j+h} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq$$

$$C_p \sum_{0 \leq h \leq p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}} \|D_t^h (L^0(x, D_t, \omega) u(t))\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

A partir de cette estimation pour la partie principale L^0 , on termine par deux méthodes :

- 1ère méthode : les quotients différentiels

Par des arguments de perturbation et de compacité on déduit de l'inégalité précédente l'estimation a priori suivante :

pour tout $x_0 \in \Omega$, pour tout entier $p \geq p_0$ il existe une constante $\varepsilon_p > 0$ et pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_{pq} > 0$, tels que, si

$u \in W^{p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in I \times \Omega, |t| + |x - x_0| < \varepsilon_p\}$, on ait :

$$\|u\|_{W^{p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{pq} \left\{ \sum_{0 \leq h \leq p} \|D_t^h (Lu)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta} + q}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{p,q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right\}$$

où

$$W^{p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) ; t^{\sigma + \delta k + j} D_t^{j+h} u \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta} + k + q}(\mathbb{R}^n)) \\ \sigma + \delta k + j \in \mathbb{N}, k + j \leq m, 0 \leq h \leq p\}$$

De cette estimation a priori on déduit par une méthode de quotients différentiels en x , le résultat de régularité suivant :
 si $u \in W^{p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in I \times \Omega, |t| + |x - x_0| < \varepsilon_p\}$ et
 si $D_t^h(Lu) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$ alors $u \in W^{p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

On peut alors démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle :
 soit donc $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ et soit à montrer que
 u est indéfiniment dérivable au point $(t_0, x_0) \in I' \times \Omega'$.

Si $t_0 \neq 0$, le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq 0$.

Si $t_0 = 0$, soit $\phi \in C_0^\infty(I' \times \Omega')$ et égale à 1 au voisinage de $(0, x_0)$.

D'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$, pour tout entier p , il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W^{p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Pour $p \geq p_0$ on peut appliquer le résultat de régularité précédent : il s'en suit que $\phi u \in W^{p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le procédé on gagne la régularité maximum en x et ceci pour chaque $p \geq p_0$. D'où l'on déduit que u est indéfiniment dérivable en $(0, x_0)$.

- 2ème méthode : construction d'une paramétrix partielle

On utilise la technique des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs vectorielles ([7], [9], [10]) avec comme dans [9] "des normes dépendant de ξ ".

On note $H^{p,\xi}(\mathbb{R})$ l'espace $H^p(\mathbb{R})$ muni de la norme suivante dépendant du paramètre $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})}^2 = \sum_{0 \leq h \leq p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}} \|D_t^h u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

et de même on note $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ l'espace $W^p(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{p,q}(\mathbb{R})}^2 = \sum_{\substack{k+j \leq m \\ h+\ell \leq p}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{\delta}((\sigma+\delta k+j-\ell)^+ - j - h - \sigma + p)} \left\| \frac{1}{t} D_t^{j+h} u \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

(où pour $A \in \mathbb{R}$ on note $A^+ = \sup(A, 0)$).

On définit l'espace des symboles $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ comme l'espace des fonctions $p(x, \xi) \in C^\infty$ à valeurs dans $\mathcal{L}(W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K\alpha\beta} > 0$ telle que pour tout $x \in K$, tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$\|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)\|_{\mathcal{L}(W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))} \leq C_{K\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Pour p grand, l'opérateur L , convenablement modifié en dehors de $t = 0$, qu'on note alors $L^\varepsilon p(x, t, D_t, D_x)$, peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $L^\varepsilon p(x, t, D_t, \xi)$ appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ et pour lequel on construira une paramétrix dont le symbole appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; H^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$.

Par des arguments de perturbation on déduit de l'estimation obtenue pour $L^0(x, D_t, \xi)$ que :

pour tout entier $p \geq p_0$, il existe une constante $\varepsilon_p > 0$, il existe une constante $A > 0$, il existe une constante $C_p > 0$, telles que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq A$ et pour tout $u \in W^p(\mathbb{R})$, on ait :

$$\|u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \leq C_p \|L^\varepsilon p(x, t, D_t, \xi)u\|_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})}$$

L'entier p étant fixé, on pose pour simplifier $L(x, \xi) = L^\varepsilon p(x, t, D_t, \xi)$. On considère l'opérateur adjoint $L^*(x, \xi)$ défini par : pour tout $u \in H^{p,\xi}(\mathbb{R})$ et $v \in W^{p,\xi}(\mathbb{R})$:

$$(L^*(x, \xi)u, v)_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} = (u, L(x, \xi)v)_{H^{p,\xi}(\mathbb{R})}$$

Alors $L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi)$ appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W^{p,\xi}(\mathbb{R}), W^{p,\xi}(\mathbb{R}))$ et est un isomorphisme de $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ sur $W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ pour $|\xi| \geq A$ et on a :

il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$ et pour tout $u \in W^{p,\xi}(\mathbb{R})$ on ait :

$$\|u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})} \leq C \|L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi)u\|_{W^{p,\xi}(\mathbb{R})}.$$

On peut donc construire un inverse $R(x, \xi)$ tel que pour $|\xi| \geq A$

$$\begin{cases} R(x, \xi) \circ L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi) = L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi) \circ R(x, \xi) = I \\ \|R(x, \xi)u\|_{W^{p, \xi}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{p, \xi}(\mathbb{R})} \end{cases}$$

Alors $R(x, \xi)$ convenablement modifié pour $|\xi| < A$ est un symbole appartenant à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n, W^{p, \xi}(\mathbb{R}), W^{p, \xi}(\mathbb{R}))$. Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel $R^p(x, D)$ dont le symbole $R^p(x, \xi)$ est dans $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; H^{p, \xi}(\mathbb{R}), W^{p, \xi}(\mathbb{R}))$, admettant $R(x, \xi) \circ L^*(x, \xi)$ comme symbole principal et tel que :

$$R^p(x, D) \circ L^{\varepsilon p}(x, t, D_t, D_x) = I + S^p(x, D) .$$

$R^p(x, D)$ est un opérateur continu de $H_{\text{comp}}^s(\Omega, H^{p, \xi}(\mathbb{R}))$ dans $H_{\text{loc}}^s(\Omega, W^{p, \xi}(\mathbb{R}))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $S^p(x, D)$ est continu de $H_{\text{comp}}^s(\Omega, W^{p, \xi}(\mathbb{R}))$ dans $H_{\text{loc}}^t(\Omega, W^{p, \xi}(\mathbb{R}))$ pour tous s et $t \in \mathbb{R}$.

Une telle paramétrix (qui dépend de p) permet de démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle.

2.4 Exemples d'étude des conditions 3 et 3'

On se limite à l'étude d'opérateurs d'ordre $m=2$ (des méthodes données ci-après pouvant être appliquées à m quelconque). On se propose donc d'étudier le noyau dans $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{J}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ des opérateurs L à une variable de la forme :

$$\begin{aligned} Lu(t) = & t^{\sigma+2} D_t^2 u + a_{10} t^{\sigma+1} D_t u + a_{00} t^{\sigma} u + a_{11} t^{\sigma+\delta+1} D_t u \\ & + a_{01} t^{\sigma+2} u + a_{02} t^{\sigma+2\delta} u \end{aligned}$$

où $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma \geq -2$, $\delta > 0$ avec $\sigma+2\delta \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $a_{ji} = 0$ si $\sigma + \delta i + j \notin \mathbb{N}$.

On suppose que le polynôme $\tau^2 + a_{11}\tau + a_{02}$ admet deux racines τ_+ et τ_- avec $\text{Im} \tau_+ > 0$ et $\text{Im} \tau_- < 0$.

On commence par traiter le cas $\delta=1$ qui joue un rôle particulier.

- Cas où $\delta = 1$

D'une manière générale $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ (comme il résulte du calcul de l'indice. Cf. Théorème 3) i.e. la condition 3 est toujours satisfaite. Par contre la condition 3' n'est pas toujours satisfaite. Plus précisément, si $\sigma = -1$: $\text{Ker}_+ L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$, si et seulement si, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a : $a_{10}\tau_+ + a_{00} \neq ip(\tau_+ - \tau_-)$. (cf. [2])

Ainsi par exemple l'opérateur $t(D_t^2 + D_x^2) + \lambda D_t + \mu D_x$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{C}$ et est partiellement hypoelliptique dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout entier $p \geq 0$, on a $\mu \neq \frac{1}{2}(2p + i\lambda)$.

- Cas où $\delta \neq 1$

Une méthode générale consiste à trouver une décomposition du noyau de l'opérateur L dans $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ puis par un changement de variable, à se ramener au cas précédent. Signalons qu'une telle décomposition a déjà été utilisée dans [5].

On n'examine que deux cas particuliers $\delta = \frac{1}{2}$ et $\delta = 2$ (remarquons que δ est soit un entier > 0 , soit de la forme $\frac{2k+1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$).

D'une manière générale pour $\delta = \frac{1}{2}$, $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ et $\text{Ker}_+ L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$ i.e. que les conditions 3 et 3' sont toujours satisfaites. En effet on effectue le changement de variable $s \rightarrow t = s^2 : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ et on pose $u(t) = v(s)$. Si $u(t) \in \text{Ker}_+ L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ alors $v(s) \in \text{Ker } \mathcal{L} \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{L}v(s) \equiv s^2\left(\frac{1}{4}D_s^2 + a_{02}\right)v + s\left(\frac{i}{4} + \frac{a_{10}}{2}\right)D_s v + a_{00}v$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur pour lequel $\delta = 1$ on en déduit que $v \equiv 0$ donc $u \equiv 0$; ainsi $\text{Ker}_+ L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$. De là on en déduit que $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ car si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ alors u est analytique sur $\mathbb{R}$ et $u|_{\bar{\mathbb{R}}_+} \in \text{Ker}_+ L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Ainsi par exemple l'opérateur $tD_t^2 + D_x^2 + \lambda D_t$ est partiellement hypoelliptique dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$; de même l'opérateur $tD_t^2 + tD_x D_t + iD_x^2 + \lambda D_t$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour $\delta = 2$, la situation est tout à fait différente. On note

$F(\lambda)$ l'équation indiciale de L en $t=0$, i.e. $F(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1) - ia_{10}\lambda + a_{00} = 0$.

Soit $u(t) \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$, alors u est analytique ; soit

$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$. On a les relations :

$$\begin{cases} F(0)u_0 = F(1)u_1 = 0 \\ F(2)u_2 + a_{01}u_0 = F(3)u_3 + (-ia_{11} + a_{01})u_1 = 0 \\ F(n)u_n + (-ia_{11}(n-2) + a_{01})u_{n-2} + a_{02}u_{n-4} = 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \end{cases}$$

ainsi : i) si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière, $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$

ii) si $F(\lambda) = 0$ a une seule racine entière $m \geq 0$ ou bien deux racines entières ≥ 0 de même parité, m étant la plus petite,

$\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$(a_{10} - i(2m+1))\tau_+ + a_{01} - im a_{11} \neq 2ip(\tau_+ - \tau_-).$$

En effet, si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$, alors $u(t) = t^m v(t^2)$ où v est une fonction analytique. On effectue le changement de variable $t \rightarrow s = t^2 : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$, alors $v(s) \in \text{Ker } \mathcal{L} \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ avec

$$\mathcal{L}v(s) = s(4D_s^2 + 2a_{11}D_s + a_{02})v + (2a_{10} - 2i - 4im)D_s v + (a_{01} - im a_{11})v$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur pour lequel $\delta = 1$ et $\sigma = -1$ on applique la condition nécessaire et suffisante donnée précédemment.

iii) si $F(\lambda) = 0$ a deux racines entières m_1 et $m_2 \geq 0$ de parités différentes $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et $j=1,2$ on a : $(a_{10} - i(2m_j+1))\tau_+ + a_{01} - im_j a_{11} \neq 2ip(\tau_+ - \tau_-)$.

En effet si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ alors $u(t) = t^{m_1} v(t^2) + t^{m_2} w(t^2)$ où v et w sont analytiques. Comme $u(-t) \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ alors $t^{m_1} v(t^2)$ et $t^{m_2} w(t^2) \in \text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ et on termine comme en (ii).

On étudierait de façon analogue $\text{Ker } L \cap \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}_+)$. Ainsi par exemple l'opérateur $tD_t^2 + t^3 D_x^2 + \lambda D_t + \mu t D_x$, lorsque $1 - i\lambda$ n'est pas un entier impair, est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a : $\mu \neq -(i\lambda + 4p - 1)$.

§ 3. ETUDE DU CAS $\delta = 0$

3.1 Enoncé des résultats

On considère les opérateurs définis sur $I \times \Omega$ par :

$$L = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) t^{\sigma+j} D_t^j D_x^\alpha$$

Les notations sont celles utilisées en II (ici $\sigma \in \mathbb{N}$).

On introduit la condition :

Condition 1 : Pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha \neq 0$$

(cette condition 1 est équivalente aux conditions 1 et 2 introduites en 2 et écrites pour $\delta = 0$).

On a alors :

Théorème 4 : Si l'opérateur L vérifie la condition 1, il est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$.

Il se peut que la condition précédente ne soit pas vérifiée.

On introduit la condition :

Condition 1' : Pour tout $(t, x) \in I_+ \times \Omega$ et pour $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha \neq 0$$

(notons que la condition 1' entraîne la condition 1 dans un voisinage de $t = 0$ éventuellement plus petit que $I \times \Omega$; ce qui n'est pas toujours vrai en II quand $\delta > 0$).

On a alors :

Théorème 4' : si l'opérateur L vérifie la condition 1', il est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$.

3.2 Esquisse de la démonstration des théorèmes 4 et 4'

On s'intéresse à la démonstration du théorème 4' ; le théorème 4 s'en déduit. On se ramène tout d'abord au cas où $\sigma = 0$. On fait le changement de variable $t = e^y$ (pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$) et de fonction $u(t, x) = e^{-y/2} v(y, x)$ pour l'opérateur $\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(0, x) t^j D_t^j D_x^\alpha$ qui est transformé en un opérateur elliptique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour lequel on a des estimations classiques. Puis en revenant à la variable t et en utilisant des arguments de perturbation on en déduit l'estimation a priori suivante :

pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$, et pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_q > 0$ telles que, si $u \in W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in I_+ \times \Omega, |t| + |x - x_0| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\|u\|_{W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_q \{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^q(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W^{q-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

où

$$W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), t^j D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{m-j+q}(\mathbb{R}^n)), 0 \leq j \leq m\}$$

De cette estimation a priori, on déduit, par une méthode de quotients différentiels en x , le résultat de régularité suivant :

si $u \in W^q(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in I_+ \times \Omega, |t| + |x - x_0| < \varepsilon\}$ et $Lu \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{q+1}(\mathbb{R}^n))$ alors $u \in W^{q+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

On peut alors démontrer le résultat d'hypoellipticité partielle : soit donc $u \in C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I_+ \times \Omega')$ et soit à montrer que u est indéfiniment dérivable au point $(0, x_0) \in I' \times \Omega'$.

Soit $\phi \in C_c^\infty(I' \times \Omega')$ égale à 1 au voisinage de $(0, x_0)$. D'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W^\alpha(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. On applique le résultat de régularité précédent. Il s'en suit que $\phi u \in W^{\alpha+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le procédé on

déduit en particulier que $\phi u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^q(\mathbb{R}^n))$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. Comme de plus d'après la structure locale des distributions de $C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $D_t^p(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^r(\mathbb{R}^n))$, il s'en suit que $D_t^\ell(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{N}$. Il en résulte que u est indéfiniment dérivable en $(0, x_0)$.

Remarque : Pour ces opérateurs l'hypoellipticité partielle n'est pas vraie si l'on part d'un espace de distributions qui ne sont pas C^∞ en t (cf. introduction) alors que, comme on l'a noté, dans le cas fuchsien, i.e. pour $\delta > 0$, l'hypoellipticité partielle est vraie si l'on part d'un espace $C^k(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ l'entier k dépendant de l'opérateur.

Remarque : On a des résultats analogues pour les opérateurs :

$$I = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) t^{\sigma+[qj]} D_t^j D_x^\alpha$$

où q est un nombre réel > 0 . (Cf. [4]).

Bibliographie

- [1] Baouendi (M. S.) et Goulaouic (C) : "Cauchy problems with multiple characteristics in spaces of regular distributions". Uspehi, Vol. XXIX, 2 (176), 1974, 70-76.
- [2] Bolley (P) et Camus (J) : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". J. Math. pures et appl., t.51, (1972), 429-463.
- [3] Bolley (P.), Camus (J.) et Helffer (B.) : "Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques". A paraître au J. Math. Pures et app.
- [4] Bolley (P.), Camus (J.) et Helffer (B.) : à paraître .
- [5] Gilkey (A) et Treves (F.) : "An example in the solvability theory of linear partial differential equations".
- [6] Grusin (V.V.) : "On class of hypoelliptic operators", Math. Sbornik 83 (125) (1970), 456-473 (Math. U.S.S.R. Sbornik 12, (1970), 458-473).
- [7] Grusin (V.V.) : "Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator valued symbols". Math. Sbornik 88 (130) (1972), 504-521 (Math. U.S.S.R. Sbornik 17, (1972), 497-514).
- [8] Helffer (B.) et Zuily (C.) : "Non hypoellipticité des opérateurs du type de Fuchs". C. R. Acad. Sc. Paris, t.277, (1973), 1061-1067.

- [9] Sjostrand (J.) : "Parametrix for pseudodifferential operators with multiplie characteristics", Arkiv for Mat. Vol. 12, n° 1 (1974), 85-130.
 - [10] Trèves (F.) : "A new method of proof of the subelliptic estimates" Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXIV, (1973), 71-115.
-