

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PH. PALLU DE LA BARRIÈRE

Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 12,
p. 1-10

[<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A11_0>](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A11_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

EXISTENCE ET PROLONGEMENT DES SOLUTIONS
HOLOMORPHES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par Ph. PALLU de la BARRIÈRE

§ 0. INTRODUCTION

Cet exposé est consacré à l'étude de l'existence et du prolongement des solutions holomorphes d'une équation aux dérivées partielles. Soit Ω un ouvert de $\{\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{M}\}$ ($n > 0$) défini par l'équation :

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \varphi(z, \bar{z}) > 0\}$$

où φ est une fonction analytique réelle à valeurs réelles dont le gradient ne s'annule pas sur $N = \partial\Omega$. On note $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{M}$ et $\mathcal{O}^+$ le faisceau sur N dont la fibre est définie par :

$$z \in N, \mathcal{O}_z^+ = \varinjlim_{z \in \omega} \mathcal{O}(\omega^+), \omega^+ = \omega \cap \Omega$$

et ω parcourt un système fondamental de voisinages de z dans $\mathbb{M}$.

Soit P un opérateur différentiel à coefficients holomorphes au voisinage de N :

$$P(z, D_z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_z^\alpha, \quad D_z^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\alpha_0} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}$$

On donne des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que l'on ait l'une des propriétés suivantes :

(PR) $_z$ si $f \in \mathcal{O}_z^+$ et $Pf \in \mathcal{O}_z$, alors $f \in \mathcal{O}_z$.

(EX) $_z$ Pour tout $g \in \mathcal{O}_z^+$, il existe $f \in \mathcal{O}_z^+$ tel que $Pf = g$.

Dans le cas où N n'est pas caractéristique pour P en z , Zerner [5] et Bony-Schapira [1] ont montré que l'on a les propriétés (PR) $_z$ et (EX) $_z$. Plus récemment Tsuno [4] a donné une condition nécessaire et une condition suffisante pour que l'on ait la propriété (PR) $_z$ dans le cas où N est simplement caractéristique pour P en z . Ces auteurs ont utilisé des méthodes "géométriques". Notre méthode consiste à montrer que la propriété (PR) $_z$ (resp. (EX) $_z$) est équivalente à l'injectivité (resp. à la "surjectivité") dans les microfonctions de Sato d'un système sur N induit par P et le système $\bar{\partial}$ des équations de Cauchy Riemann sur $\mathbb{M}$. On donne ensuite des critères à l'aide des théorèmes de

structure de [S.K.K].

§ 1. ENONCE DES RESULTATS ET DEFINITIONS

a) Le système $\bar{\partial}_b$.

Les problèmes étant locaux, on peut supposer que $\frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \neq 0$

sur N. On peut alors définir le système $\bar{\partial}_b$ sur N de la manière suivante :

$$\bar{\partial}_b u = 0 \Leftrightarrow X_j u = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

où $X_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_0} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}$, $j = 1, \dots, n$.

On a $[X_j, X_k] = 0$, $\forall j, k = 1, \dots, n$ et si on note

$$\Sigma = \{ z^* \in S^* N \mid \sigma(X_1)(z^*) = \dots = \sigma(X_n)(z^*) = 0 \}$$

la variété caractéristique de $\bar{\partial}_b$ (où $\sigma(Q)$ désigne le symbole principal d'un opérateur différentiel Q), Σ est la réunion des champs de vecteurs cotangents Σ^+ et Σ^- suivants :

. $\Sigma^+(z) = (z, \xi(z)) \in S^* N$ et $\xi(z) = (\xi_j(z) = -i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j}(z))$ $j = 0, \dots, n$
 . $\Sigma^-(z)$ est l'antipodal de $\Sigma^+(z)$ dans $S^* N$.

b) L'opérateur P_b

Soit (Y_j) $j = 0, \dots, n$ la famille de $(n+1)$ champs de vecteurs complexes sur N définis par :

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_0} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \quad j = 0, \dots, n$$

On a $[Y_j, Y_k] = 0$, $\forall j, k = 0, \dots, n$ et la famille (Y_j) $j = 0, \dots, n$ est linéairement indépendante.

On définit alors à partir de P, un opérateur P_b de la manière suivante :

$$P_b = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_\alpha Y^\alpha \quad \text{où } \tilde{a}_\alpha = a_\alpha|_N$$

Remarque : N est caractéristique pour P en $z \in \tau^{-1}(P_b)(\Sigma^+(z)) = 0$

c) Forme de Lévi généralisée de (Ω, P) .

Soit f et g deux fonctions homogènes sur S^*N . Dans les coordonnées duales de M , le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est défini par

$$\{f, g\}(z^*) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_j} - \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\xi}_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial z_j} \right)(z^*) .$$

La forme de Lévi généralisée de (Ω, P) en z est la forme hermitienne L_z sur $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} L_z(\tau) = & \sum_{1 \leq k, j \leq n} \{ \sigma(X_k), \overline{\sigma(X_j)} \}(\Sigma^+(z)) \tau_k \bar{\tau}_j + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq j \leq n} \{ \sigma(X_j), \overline{\sigma(P_b)} \}(\Sigma^+(z)) \tau_j \bar{\tau}_{n+1} + \\ & + \{ \sigma(P_b), \overline{\sigma(P_b)} \}(\Sigma^+(z)) |\tau_{n+1}|^2 \end{aligned}$$

Remarque : La forme $L'_z(\tau) = \sum_{1 \leq k, j \leq n} \{ \sigma(X_k), \overline{\sigma(X_j)} \}(\Sigma^+(z)) \tau_k \bar{\tau}_j$

est la forme de Lévi usuelle de l'ouvert Ω en z .

d) Conditions suffisantes

Théorème 1 : Supposons que P ne soit pas dégénéré en z et que N soit caractéristique pour P en z . Alors

(i) si L_z a au moins une valeur propre strictement négative, on a la propriété (PR) $_z$.

(ii) si L_z a $n+1$ valeurs propres strictement positives, on a la propriété (EX) $_z$

e) Conditions nécessaires

Théorème 2 : Supposons que P ne soit pas dégénéré en z , que N soit caractéristique pour P en z et que Ω soit strictement pseudo convexe en z . Alors

i) $\det L_z < 0 \Rightarrow$ (PR) $_z$ et non (EX) $_z$

ii) $\det L_z > 0 \Rightarrow$ (EX) $_z$ et non (PR) $_z$.

Remarques :

. On peut appliquer les théorèmes 1 et 2 pour la propriété $(PR)_z$, si on suppose seulement φ de classe C^3 . En effet Ω contient alors localement un ouvert Ω' à frontière analytique, tangent à l'ordre deux à Ω en z .

. Si N n'est pas caractéristique simple pour P en z on a $\sigma(P)(z^*) = a(z^*)[p'(z^*)]^\ell$ avec $a(z, \text{grad}_z \varphi) \neq 0$ au voisinage de $z^* = (z, \text{grad}_z \varphi)$ et on peut remplacer $\sigma(P_b)$ par p'_b dans la définition de L_z comme on le montrera par la suite.

f) Exemples d'application

. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_0 > 0\}$. On peut écrire P sous la forme

$$P(z, D_z) = a(z) D_{z_0}^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 \neq m}} a_\alpha(z) D_z^\alpha$$

Le bord de Ω est caractéristique pour P en z^0 signifie que $a(z^0) = 0$.

On a alors :

$$\exists j \in [1, n] \text{ tel que } \frac{\partial a}{\partial z_j}(z^0) \neq 0 \Rightarrow (PR)_{z^0}$$

. Ω^r désigne la boule de centre $(1-r, 0, \dots, 0)$ dont la frontière passe par $z^0 = (1, 0, \dots, 0)$; on écrit P sous la forme

$$P(z, D_z) = \sum_{j=0}^n a_j(z) D_{z_0}^{m-1} D_{z_j} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 < m-1}} a_\alpha(z) D_z^\alpha$$

et $\partial\Omega^r$ est caractéristique pour P en z^0 signifie que $a_0(z^0) = 0$. On a alors :

$$\exists k \in [1, n], a_k(z^0) \neq 0 \Rightarrow (EX)_{z^0} \text{ et non } (PR)_{z^0} \text{ pour } r \text{ assez petit}$$

$$\exists j \in [1, n], \frac{\partial a_0}{\partial z_j}(z^0) \neq 0 \Rightarrow (PR)_{z^0} \text{ et non } (EX)_{z^0} \text{ pour } r \text{ assez grand.}$$

§ 2. PLAN DE LA DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 ET 2

a) Réduction au bord

On note $\tilde{\mathcal{C}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{D}}$) le faisceau sur S^*N (resp. sur N) des microfonctions (resp. des hyperfonctions) [S.K.K.]. Rappelons que si $z^* = (z, \xi) \in S^*N$, $\tilde{\mathcal{C}}_{z^*} = \tilde{\mathcal{D}}_z / \tilde{\mathcal{D}}_{z^*}$ où $\tilde{\mathcal{D}}_{z^*} = \{u \in \tilde{\mathcal{D}}_z \mid z^* \notin \text{SSEu}\}$. (SSEu désigne le support singulier essentiel de u dans S^*N).

On note $\tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}$ le faisceau sur N défini par :

$$\forall z \in N, (\tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+})_z = \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}.$$

Soit $\tilde{\mathcal{D}}$ le faisceau sur N des opérateurs différentiels à coefficients analytiques [S.K.K.]. On associe à chaque système différentiel sur N de la forme $P_j u = 0$ ($j = 1, \dots, r$), un $\tilde{\mathcal{D}}$ -module $\mathcal{M}$ défini par :

$$\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{I}, \text{ où } \mathcal{I} \text{ est l'idéal de } \tilde{\mathcal{D}} \text{ engendré par } P_1, \dots, P_r.$$

On note $\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}^P$) le $\tilde{\mathcal{D}}$ -module associé au système $\bar{\partial}_b$ (resp. $(\bar{\partial}_b, P_b)$).

Théorème 3 : On peut définir une application de valeur au bord (vb) de $\mathcal{O}_z^+$ dans $\tilde{\mathcal{D}}_z$, $z \in N$.

(i) vb : $\mathcal{O}_z^+ \rightarrow \{u \in \tilde{\mathcal{D}}_z, \text{ SSEu} \subset \Sigma^+, \bar{\partial}_b u = 0\}$ est un isomorphisme

(ii) vb se prolonge en un isomorphisme

$$\text{vb} : \mathcal{H}_F^k(\mathcal{O})|_N \simeq \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{D}}}^{k-1}(\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\partial}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \quad \forall k > 0 \text{ (où } F = M - \Omega).$$

(iii) $\text{vb} \circ P = P_b \circ \text{vb}$.

La partie (ii) est due à Kashiwara-Kawai [2]. On donnera une démonstration "élémentaire" de ce théorème au paragraphe 3.

Théorème 4 :

$$(i) \quad (PR)_z \simeq \mathcal{H}_{om_{\tilde{\mathcal{D}}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0$$

$$(ii) \quad (EX)_z \leftarrow \mathcal{E}_{xt_{\tilde{\mathcal{D}}}}^1(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0$$

(iii) si Ω est pseudo convexe en z (forme de Levi ≥ 0 au voisinage de z) :

$$(EX)_z \simeq \mathcal{E}_{xt_{\tilde{\mathcal{D}}}}^1(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)}) = 0 \quad .$$

Preuve du théorème 4 :

1) Si on note $\mathcal{O}_P$ le faisceau des solutions dans $\mathcal{O}$ de $Pf = 0$,

$(PR)_z \simeq \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_P)_z = 0$, $(EX)_z \leftarrow \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_P)_z = 0$ et si Ω est pseudo convexe en z , $(EX)_z \simeq \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_P)_z = 0$.

2) On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \longrightarrow 0 \quad (\text{Th. de Cauchy-Kowalewski})$$

$$0 \longleftarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P \longleftarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}} \xleftarrow{P_b} \tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}} \longleftarrow 0 \quad (\text{où } P_b \text{ est le morphisme de}$$

$\tilde{\mathcal{D}}$ -modules induit par l'application $P_b(Q) = Q.P_b$ de $\tilde{\mathcal{D}}$ dans $\tilde{\mathcal{D}}$).

On en déduit les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{H}_{om_{\tilde{\mathcal{D}}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \rightarrow \mathcal{H}_{om_{\tilde{\mathcal{D}}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \xrightarrow{P_b} \mathcal{H}_{om_{\tilde{\mathcal{D}}}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \rightarrow \mathcal{E}_{xt_{\tilde{\mathcal{D}}}}^1(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \rightarrow \dots \\ \uparrow \text{vb} \quad \uparrow \text{vb} \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_P)|_N \longrightarrow \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O})|_N \xrightarrow{P} \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O})|_N \longrightarrow \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_P)|_N \rightarrow \dots \end{array}$$

et on déduit du théorème 3, (ii), (iii) les isomorphismes :

$$\mathcal{H}_F^k(\mathcal{O}_P)|_N \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{xt_{\tilde{\mathcal{D}}}}^{k-1}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{O}}}^P, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}), \quad k > 0. \quad \blacksquare$$

b) Etude au bord

Soit $\mathcal{M} : P_j u = 0 \quad j = 1, \dots, r$ un système différentiel sur N . Soit

Y le complexifié de N et $P^*Y = \frac{T_{\mathbb{C}}^*Y - Y}{\mathbb{C}^*}$ son fibré projectif. Soit $\hat{P}$ le

faisceau sur P^*Y des opérateurs pseudo-différentiels complexes d'ordre fini [S.K.K]. La variété caractéristique complexe $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ du système $\mathcal{M}$ est définie de la manière suivante :

$$V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \{ \hat{z}^* \in P^*Y \mid \sum_{j=1}^r \Lambda_j \hat{P}_j \neq I, \forall \Lambda_j \in \hat{P}_{z^*} \}.$$

($\hat{P}_j$ désigne le complexifié de P_j).

Soit $z^* \in S^*N$. Si $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \{ \hat{z}^* \in P^*Y \mid p_1(\hat{z}^*) = \dots = p_d(\hat{z}^*) = 0 \}$

au voisinage de z^* on définit la forme de Levi généralisée de $\mathcal{M}$ [S.K.K.] :

$$L_{z^*}(\tau) = \sum_{1 \leq j, k \leq d} \{ p_j, \bar{p}_k \} (z^*) \tau_j \bar{\tau}_k$$

Théorème ([S.K.K.] Th. 2.3.2, 2.3.6, 2.3.10)

A. (i) Si L_{z^*} a p valeurs propres strictement négatives on a :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^k(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} = 0 \quad \text{pour } k < p.$$

(ii) Si L_{z^*} a q valeurs propres strictement positives on a

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^k(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} = 0 \quad \text{pour } k > \dim. \text{proj. } \mathcal{M} - q.$$

B. Si L_{z^*} a q valeurs propres strictement négatives et d-q valeurs propres strictement positives on a :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^q(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}})_{z^*} \neq 0.$$

On déduit alors les théorèmes 1 et 2 du théorème précédent, du théorème 4 et de la proposition suivante.

Proposition 5

$$V_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{C}}}^P) = \{ \hat{z}^* \in P^*Y \mid \sigma(\hat{X}_1)(\hat{z}^*) = \dots = \sigma(\hat{X}_n)(\hat{z}^*) = \sigma(\hat{P}_b)(\hat{z}^*) = 0 \}.$$

Remarque : On peut remplacer $\sigma(\hat{P}_b)$ par p'_b défini dans la dernière remarque du I.e).

§ 3. ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 3

a) les groupes $\mathcal{H}_F^k(\mathcal{O})_z$, $z \in N$.

Rappelons que :

$z \in N$, $\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O})_z = \mathcal{O}_z^+ / \mathcal{O}_z$, $\mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{O})_z = \varinjlim_{z \in \omega} H^k(\omega^+, \mathcal{O})$, $k > 0$;

les groupes $H^k(\omega^+, \mathcal{O})$ est le k -ième groupe de cohomologie du complexe de Dolbeault à coefficients hyperfonctions [3] :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(\omega^+) \rightarrow B^{(0)}(\omega^+) \xrightarrow{\bar{\partial}} B^{(1)}(\omega^+) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}$ est surjectif de $B(\omega^+)$ dans $B(\omega^+)$; on en déduit que le

complexe (1) à même cohomologie que le complexe

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(\omega^+) \rightarrow B_h^{(0)}(\omega^+) \xrightarrow{\bar{\partial}'} B_h^{(1)}(\omega^+) \xrightarrow{\bar{\partial}'} \dots$$

où $B_h(\omega) = \{u \in B(\omega) \mid \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} u = 0\}$, $B_h^{(k)}(\omega)$ désigne l'ensemble des formes

différentielles de degré k à coefficients dans $B_h(\omega)$ et engendrées par n éléments $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ et $\bar{\partial}'$ désigne la restriction de $\bar{\partial}$ à $B_h^{(k)}(\omega)$

b) les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^k(\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+(z)})$.

Soit A un $\tilde{\mathcal{D}}$ -module. En appliquant le foncteur $\mathcal{H}_{\text{om}}^{\tilde{\mathcal{D}}}(\cdot, A)$ au complexe de Koszul associé au $\tilde{\mathcal{D}}$ -module $\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\mathcal{D}}}$ et à la famille $X_1, \dots, X_n$ (ce complexe est exact) on obtient le complexe suivant :

$$(3) \quad 0 \rightarrow A_{\bar{\partial}_b} \rightarrow A^{(0)} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} A^{(1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \dots$$

où $A_{\bar{\partial}_b} = \{u \in A \mid \bar{\partial}_b u = 0\}$, $A^{(k)}$ désigne l'ensemble des formes différentielles

de degré k à coefficients dans A engendrées par n éléments $d\tilde{z}_1, \dots, d\tilde{z}_n$

et si $\alpha = \sum_I a_I d\tilde{z}_I$,

$$\bar{\partial}_b \alpha = \sum_I \bar{\partial}_b a_I \wedge d\tilde{z}_I, \quad \bar{\partial}_b a_I = \sum_{j=1}^n \lambda_j(a_I) d\tilde{z}_j.$$

Les groupes $\text{Ext}_{\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\sigma}}, A)}^k$ est alors le k -ième groupe de cohomologie du complexe (3).

c) Valeur au bord de $B_h(\omega)$

Il existe un difféomorphisme local partiellement holomorphe qui transforme Ω en le demi espace $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} | x_0 > 0\}$. On montre alors que l'on a un morphisme de valeur au bord :

$$vb : (B_h^+)_z \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_z, \quad z \in N$$

et des isomorphismes :

$$vb : \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\mathcal{O} \simeq (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})_{\tilde{\sigma}_b}; \quad vb : B_h^+ \oplus B_h^-/B_h \rightarrow \tilde{\mathcal{B}};$$

$$\text{où } B_h^\pm = \varinjlim_{z \in \tilde{\omega}} B(\omega^\pm) \quad (\omega^\pm = \Omega \cap \{ \pm \varphi(z, \bar{z}) > 0 \})$$

$$B_h = \varinjlim_{z \in \tilde{\omega}} B(\omega) \text{ et } \tilde{\mathcal{A}} \text{ désigne le faisceau des fonctions analytiques sur } N.$$

Comme $X_j|_{B_h} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}|_{B_h}$ $j = 1, \dots, n$, on a un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (B_h^+ \oplus B_h^-)^{(0)} & \xrightarrow{\bar{\delta}'} & (B_h^+ \oplus B_h^-)^{(1)} & \xrightarrow{\bar{\delta}'} & \dots \\ & & \downarrow vb & & \downarrow vb & & \\ 0 & \rightarrow & (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})^{(0)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_b} & (\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})^{(1)} & \xrightarrow{\bar{\delta}_b} & \dots \end{array}$$

Ce morphisme induit un isomorphisme sur le cohomologie. Plus précisément :

$$vb : \varinjlim_{z \in \tilde{\omega}} H^k(\omega^+, \mathcal{O}) \oplus H^k(\omega^-, \mathcal{O}) \simeq \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\sigma}}, \tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}})}^k|_z, \quad z \in N$$

est un isomorphisme $\forall k > 0$.

Remarque : Il est aisé de voir que $P_b|_{B_h} = P|_{B_h}$ donc que $vb \circ P = P_b \circ vb$.

d) Microlocalisation

Soit $\tilde{\omega}$ un ouvert de N ; on a $\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\omega}) = \tilde{\mathcal{C}}(S^* \cdot \tilde{\omega})$. On a donc une application de restriction :

$$\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{r} \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+} \oplus \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^-}.$$

Comme le système $\bar{\partial}_b$ est elliptique en dehors de Σ l'application r induit un isomorphisme :

$$r : \mathcal{E}xt_{\tilde{\mathcal{D}}}^k(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{r} \mathcal{E}xt_{\tilde{\mathcal{D}}}^k(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+}) \oplus \mathcal{E}xt_{\tilde{\mathcal{D}}}^k(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^-}), \quad \forall k \geq 0$$

D'autre part si $u \in B_h^+$, $SSE(vb u) \cap \Sigma^- = \emptyset$, donc vb est morphisme de $H^k(\omega^+, \mathcal{O})$ dans $\mathcal{E}xt_{\tilde{\mathcal{D}}}^k(\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\Sigma^+})$ ce qui achève la preuve du théorème.

§ 4. EXTENSION HOLOMORPHE DES HYPERFONCTIONS SUR LE BORD D'UN OUVERT DE $\mathbb{C}^n$.

On déduit du théorème 3 et du théorème de [S.K.K] cité plus haut le

Théorème 5 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à frontière analytique. Soit $z \in \partial\Omega$ et supposons que Ω soit strictement pseudo-convexe en z . Alors toute hyperfonction sur $\partial\Omega$ définie au voisinage de z , solution de $\bar{\partial}_b u = 0$ est valeur au bord d'une fonction holomorphe dans $\Omega \cap \omega$ (ω voisinage de z dans $\mathbb{C}^n$).

BIBLIOGRAPHIE

- [S.K.K.] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Maths. 287 (1971) .
- [1] J. M. Bony, P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inv. Math. 17 (1972).
- [2] M. Kashiwara, T. Kawai : On the boundary values problem for elliptic system of partial differential equations I. Proc. Jap. Acad. 48 (1970).
- [3] H. Komatsu : Resolution by hyperfonctions of sheaves of solutions of differential equations with constants coefficients. Math. Annalen T. 176 p.77-86 (1968).
- [4] Y. Tsuno : On the continuations of holomorphic solutions of characteristic differential equations. J. Math. Soc. Japan, Vol. 26, N° 3 (1974).
- [5] M. Zerner : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sc. 272 (1971).