L. Tartar

Équation de Riccati

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A9_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

EQUATION DE RICCATI

par L. TARTAR

Exposé n° X

19 Décembre 1973

§ 0. INTRODUCTION

Certains problèmes de la théorie du contrôle optimal conduisent à des équations non linéaires du type

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + A^{*}\mathbb{P} - \varphi(\mathbb{P}) = F \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_o \end{cases}$$

où $\mathbb{P}(t)$ est un opérateur linéaire continu sur un Hilbert H (en général autoadjoint) et φ une non linéarité dépendant du problème étudié.

Les problèmes de contrôle déterministe conduisent à des termes du type $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}\, D\, \mathbb{P}$.

Les problèmes de contrôle stochastique conduisent à des termes comme $\mathbb{P}(N + B^{*}\mathbb{P}B)^{-1}\mathbb{P}$ ou d'autres bien plus curieux.

L'étude directe de l'équation (1), sans jamais faire appel à des problèmes de contrôle, a été entreprise par Temam et Da Prato. La méthode exposée ici est différente mais redonne la plupart des résultats connus.

§ 1. LE PROBLEME LINEAIRE DANS UN BANACH

On se donne un Banach E et deux générateurs infinitésimaux de semi groupes A et B.

On se donne la condition initiale $\mathbb{P}_o \in \mathcal{L}(E,E)$ et le second membre $F \in L^1_{loc}([0,\infty[, \mathcal{L}(E,E))$.

On commence par définir la solution de l'équation linéaire

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + B\mathbb{P} = F \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_o \end{cases}$$

Si $G_A(t)$ est le semi groupe engendré par A et G_B par B, on considère

$$(3) \qquad \mathbb{P}(t) = G_B(t)\,\mathbb{P}_o G_A(t) + \int_o^t G_B(t-s)\, F(s)\, G_A(t-s)\, ds \ .$$

Alors, formellement, $\mathbb{P}(t)$ donné par (3) est solution de (2).

<u>Définition 1</u> : Nous prendrons (3) comme définition de la solution de (2). ∎

Cette définition permet de séparer les difficultés spécifiques au problème linéaire de celles introduites par la nonlinéarité φ.

En général $\mathbb{P}(t)$ n'appliquera pas le domaine de A dans le domaine de B.

La définition (3) peut se découpler dans le système suivant :

Soit $T > 0$ et $e \in E$, on résout

$$(4)_1 \qquad \begin{cases} -y' + Ay = 0 \\ y(T) = e \end{cases}$$

puis

$$(4)_2 \qquad \begin{cases} p' + Bp = Fy \\ p(0) = \mathbb{P}_o y(0) \end{cases}$$

Alors on a

$$(4)_3 \qquad \mathbb{P}(T)\,e = p(T) \ .$$

Les estimations sur $\mathbb{P}(t)$ qui seront très utiles par la suite proviennent de (3) ou (4). Plus précisément si $\|G_A(t)\| \le Me^{\omega t}$ et $\|G_B(t)\| \le M'e^{\omega' t}$, on a

$$(5) \qquad \|P(t)\| \le MM'e^{(\omega+\omega')t}\|\mathbb{P}_o\| + \int_o^t MM'e^{(\omega+\omega')(t-s)}\|F(s)\|\, ds \ .$$

<u>Remarque 1</u> . Si $MM'e^{(\omega+\omega')T} < 1$, on peut définir la solution du problème de type périodique

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + B\mathbb{P} = F \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(T) + K \end{cases}$$

Comme limite de la suite $\mathbb{P}_n$ qu'on obtient par la méthode itérative

(7)
$$\begin{cases} \mathbb{P}'_{n+1} + \mathbb{P}_{n+1}A + B\mathbb{P}_{n+1} = F \\ \mathbb{P}_{n+1}(0) = \mathbb{P}_n(T) + K \end{cases}.$$

■

Remarque 2 : $t \to \mathbb{P}(t)$ n'est pas continu en norme mais est fortement continu . ■

§ 2. LE PROBLEME LINEAIRE DANS UN HILBERT

On prend $B = A^*$, c'est-à-dire $G_B(t) = G_A^*(t)$. On a alors immédiatement la

Proposition 1 : a) Si $\mathbb{P}_o^* = \mathbb{P}_o$ et $F^*(t) = F(t)\ \forall t \geq 0$ alors la solution de (2) avec $B = A^*$ vérifie $\mathbb{P}^*(t) = \mathbb{P}(t)\ \forall t \geq 0$.

b) Si de plus $\mathbb{P}_o \geq 0$ et $F(t) \geq 0\ \forall t \geq 0$ alors on a $\mathbb{P}(t) \geq 0\ \ \forall t \geq 0$. ■

C'est la partie b) de cette proposition qui jouera un rôle fondamental dans le cadre non linéaire.

Remarque 3 : On a des résultats analogues pour le problème périodique (6). ■

Remarque 4 : On peut travailler aussi dans l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_2(H)$ muni de la norme habituelle qu'on notera $|||\ \ |||$.

Alors si $\mathbb{P}_o \in \mathcal{L}_2(H)$ et $F \in L^1_{loc}([0,\infty[, \mathcal{L}_2(H))$ on a $\mathbb{P}(t) \in \mathcal{L}_2(H)$ avec l'estimation (5) avec les normes $|||\ \ |||$.

L'intérêt de cette généralisation est plus théorique que pratique car dans les applications intervient souvent $\mathbb{P}_o = I$. On verra par ailleurs que certaines non linéarités se comportent mieux pour la norme $|||\ \ |||$ que pour la norme $\|\ \ \|$. ■

§ 3. QUELQUES NON LINEARITES SIMPLES

On peut commencer par définir des non linéarités du type $f(\mathbb{P})$ où f est une fonction holomorphe sur un voisinage du spectre de $\mathbb{P}$.

(8) $$f(\mathbb{P}) = \frac{1}{2i\pi}\int_c f(z)(zI - \mathbb{P})^{-1}dz .$$

Alors la formule (8) définit une application localement lipschitzienne (et même C^∞) dans un voisinage de $\mathbb{P}$.

Il est difficile d'affaiblir les hypothèses de régularité sur f dans le cas général.

Dans le cas hilbertien et $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}$, il suffit d'avoir f continue. On utilisera alors le résultat classique :

Lemme 1 : Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles dans $[\alpha,\beta]$; alors si $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}$ vérifie $aI \leq \mathbb{P} \leq bI$ on a $f(\mathbb{P})^* = f(\mathbb{P})$ et $\alpha I \leq f(\mathbb{P}) \leq \beta I$. ■

Pour la norme Hilbert-Schmidt on a le résultat suivant :

Lemme 2 : Si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ avec $|f'| \leq K$ alors $aI \leq \mathbb{P}, Q \leq bI \Rightarrow |||f(\mathbb{P}) - f(Q)||| \leq K\,|||\mathbb{P} - Q|||$. ■

Pour la norme $\|\ \ \|$ le lemme 2 est faux (sauf si dim H = 1). On n'a pas (à ma connaissance tout au moins) de caractérisation des fonctions continues f qui définissent une application localement lipschitzienne sur $\mathcal{L}(H,H)$. [En dimension finie f lipschitzienne suffit]. On a le résultat suivant :

Lemme 3 : Si $f \in W^{s,p}_{loc}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq 2$ et $s > 1 + \frac{1}{p}$ on a $\forall r\ \exists\ C_r$: $\|\mathbb{P}\|, \|Q\| \leq r \Rightarrow \|f(\mathbb{P}) - f(Q)\| \leq C_r \|\mathbb{P} - Q\|$. ■

Il suffit d'utiliser la majoration $\|e^{iA} - e^{iB}\| \leq \|A - B\|$ pour A et B autoadjoints et de décomposer f en série de Fourier sur un intervalle contenant $[-r,+r]$.

Une autre classe intéressante de fonctions est celle des f vérifiant (9) $aI \leq \mathbb{P} \leq Q \leq bI \Rightarrow f(\mathbb{P}) \leq f(Q)$. On a la caractérisation suivante due à Loewner :

<u>Théorème 1</u> : f vérifie (9) si et seulement si f se prolonge au 1/2 plan $\mathcal{I}mz > 0$ en une fonction holomorphe vérifiant $\mathcal{I}mf(z) > 0$.

En fait les non linéarités rencontrées font intervenir d'autres opérateurs. On vérifie en général facilement si elles sont localement lipschitziennes. On voit quelquefois moins facilement si on a l'analogue de (9).

<u>Exemple</u> : $N = N^* \geq 0$ inversible on définit pour $\mathbb{P} = \mathbb{P}^* \geq 0$

$$\Phi(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} B_i^* \mathbb{P} B_i - \left(\sum_{i=1}^{n} B_i^* \mathbb{P} D_i\right)\left(N + \sum_{i=1}^{n} D_i^* \mathbb{P} D_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^* \mathbb{P} B_i\right)$$

alors $0 \leq \mathbb{P} \leq Q \Rightarrow 0 \leq \Phi(\mathbb{P}) \leq \Phi(Q)$. ■

§ 4. EXISTENCE LOCALE

On considère l'équation

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + B\mathbb{P} + f(\mathbb{P}) = 0 \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_0 \end{cases}$$

Pour démontrer l'existence locale on considère la méthode itérative

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}'_{n+1} + \mathbb{P}_{n+1} A + B\mathbb{P}_{n+1} + f(\mathbb{P}_n) = 0 \\ \mathbb{P}_{n+1}(0) = \mathbb{P}_o \end{cases}$$

On suppose que f est localement lipschitzienne sur $\mathcal{L}(E,E)$, alors la suite $\mathbb{P}_n$ converge sur un intervalle $[0,t_o[$ uniformément vers la solution unique de (10).

Il faut noter que la longueur de l'intervalle dépend de $\mathbb{P}_1$ et que, même si la solution existe sur $[0,\infty[$ l'intervalle peut être fini.

Dans le cas hilbertien avec $B = A^*$, $\mathbb{P}_o^* = \mathbb{P}_o$ et $f(\mathbb{P})^* = f(\mathbb{P})$ si $\mathbb{P}^* = P$ la solution vérifie $P^*(t) = \mathbb{P}(t)$ $\forall t \in [0,t_o[$.

Dans le cas Hilbert-Schmidt on peut obtenir des résultats analogues.

§ 5. EXISTENCE GLOBALE

Si f est uniformément lipschitzienne sur $\mathcal{L}(E,E)$ alors $\mathbb{P}_n$ converge uniformément sur tout intervalle borné vers la solution unique de (10).

Malheureusement dans la pratique f n'a jamais cette proriété. On va utiliser la proposition 1 (donc le cas hilbertien avec $B = A^*$) pour obtenir des résultats globaux.

On améliore un peu la méthode itérative (11) en considérant

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}'_{n+1} + \mathbb{P}_{n+1}(A+M) + (A^* + M^*)\mathbb{P}_{n+1} + f(\mathbb{P}_n) - \mathbb{P}_n M - M^*\mathbb{P}_n = 0 \\ \mathbb{P}_{n+1}(0) = \mathbb{P}_o \end{cases}$$

Un choix judicieux de M et de $\mathbb{P}_1$ permettra souvent d'obtenir l'existence globale et la convergence uniforme sur tout intervalle borné.

L'idée fondamentale est alors la suivante :

" Trouver $\mathbb{P}_-(t)$ et $\mathbb{P}_+(t)$ ainsi que $M(t)$ tels que $\mathbb{P}_-(t) \leq \mathbb{P}_n(t) \leq \mathbb{P}_+(t)$ $\forall$ t entraîne l'inégalité $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P}_{n+1} \leq \mathbb{P}_+$ ".

Le cas le plus courant est celui où A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction ; dans ce cas on prendra $\mathbb{P}_-(t) = U_-(t)\, I$, $\mathbb{P}_+(t) = U_+(t)\, I$ et $M(t) = m(t) I$ et on doit trouver les fonctions U_-, U_+ et m vérifiant les relations suivantes :

$$(13) \qquad \begin{cases} U_-(t) \leq 0 \leq U_+(t) \text{ ; } U_- \text{ et } U_+ \text{ absolument continues} \\ U_-(0) I \leq \mathbb{P}_o \leq U_+(0) I \\ (U'_- + 2mU_-) I \leq 2mQ - f(Q) \leq (U'_+ + 2mU_+) I \text{ pour tout } Q \\ \text{vérifiant } U_-(t) I \leq Q \leq U_+(t) I. \end{cases}$$

Théorème 2 : Si on a (13) alors la méthode (12) donne une suite convergeant vers la solution unique de (10) uniformément sur tout intervalle borné contenu dans le domaine de définition de U_- et U_+. Cette solution vérifie $U_-(t) \leq \mathbb{P} \leq U_+(t) I$. ∎

On utilise pour montrer $U_- I \leq \mathbb{P}_{n+1} \leq U_+ I$ le lemme suivant

Lemme 4 : Si $\begin{cases} Q' + QA + A^* Q = F \leq \rho'(t) I \\ Q(0) \leq \rho(0) I \end{cases}$

avec ρ absolument continue ≥ 0 et A générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction alors on a $Q(t) \leq \rho(t) I$. ∎

Exemple : f vérifiant les conditions du lemme 3 on considère

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + A^* \mathbb{P} + f(\mathbb{P}) = F \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_o \end{cases}$$

1) Si $Xf(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors la solution vérifie

$$\| \mathbb{P}(t) \| \leq \| \mathbb{P}_o \| + \int_o^t \| F(s) \| \, ds$$

en effet on peut choisir $-U_-(t) = U_+(t) = \| \mathbb{P}_o \| + \int_o^t \| F(s) \| ds$ et

$$2m(t) = \max_{|x| \leq U_+(t)} f'(x).$$

2) Si $f(0) = 0$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ alors pour $\mathbb{P}_o \geq 0$ et $F \geq 0$ la solution vérifie $\mathbb{P} \geq 0$ avec la même inégalité que ci-dessus. En effet on peut choisir $U_- = 0$ et U_+ comme ci-dessus.

§ 6. PROPRIETES DE MONOTONIE

Pour certaines non linéarités f (en particulier tous les exemples provenant de la théorie du contrôle optimal) la solution $\mathbb{P}$ de (14) dépend de manière monotone croissante de $\mathbb{P}_o$ et F.

Définition 2 : Q est une sous-solution de (14) si $Q' + QA + A^* Q + f(Q) \leq F$

et $Q(0) \leq \mathbb{P}_o$. Q est sur-solution si les inégalités sont renversées.

La classe des fonctions qui nous intéresse ici est définie par

$$(15) \quad \begin{cases} \text{il existe une sous-solution } \mathbb{P}_- \leq \text{ Une sur-solution } \mathbb{P}_+ \text{ et pour} \\ \mathbb{P}_- \leq \mathbb{P} \leq \mathbb{P}_+ \text{ une décomposition} \\ \qquad f(\mathbb{P}) = a\mathbb{P} + \varphi_1(\mathbb{P}) + \mathbb{P}\varphi_2(\mathbb{P})\mathbb{P} \text{ où } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ sont décroissantes} \\ \text{entre } \mathbb{P}_- \text{ et } \mathbb{P}_+ . \end{cases}$$

Il faut noter que dans les applications certaines fonctions $f(\mathbb{P})$ ne sont définies que pour $\mathbb{P} \geq 0$ et que $\mathbb{P}_- = 0$ est alors le choix le plus naturel.

Pour cette classe de problèmes on peut redonner une autre démonstration de l'existence sans utiliser l'hypothèse que f localement lipschitzienne (on perdra en général la propriété d'unicité) mais l'hypothèse suivante :

(16) Si $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}_+$ et si $\mathbb{P}_n$ converge fortement vers $\mathbb{P}$ de manière monotone (croissante ou décroissante) $\varphi_j(\mathbb{P}_n)$ converge fortement vers $\varphi_j(\mathbb{P})$ $j = 1,2$.

On utilise pour cela la méthode itérative (12) avec M dépendant de n.

On prend (17) $\begin{cases} M_n = \varphi_2(\mathbb{P}_n)\mathbb{P}_n + \lambda I \text{ avec} \\ 2\lambda \geq a + \|\mathbb{P}_+ - \mathbb{P}_-\| \max(\|\varphi_2(\mathbb{P}_+)\|, \|\varphi_2(\mathbb{P}_-)\|) \end{cases}$

on a alors le

<u>Théorème 3</u> : Sous les hypothèse (15) (16) l'ensemble des solutions de (14) vérifiant $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P} \leq \mathbb{P}_+$ est non vide et possède un élément minimum et un élément maximum.

La méthode (12) avec (17) converge vers la solution minimale si on choisit $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_-$ et vers la solution maximale si on choisit $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_+$. ■

La démonstration consiste à montrer que si $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}_+$ avec $\mathbb{P}_n$ sous solution alors $\mathbb{P}_{n+1}$ est sous-solution et $\mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}_{n+1} \leq \mathbb{P}_+$

l'inégalité étant renversée pour les sur-solutions.

Il faut noter que la non unicité est possible dans cette classe de problèmes. Par exemple $A = 0$ $f(\mathbb{P}) = -\mathbb{P}^{\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ définie pour $\mathbb{P} \geq 0$ et $F = 0$, alors $\mathbb{P} = \frac{t^2}{4} M$ est solution dès que M est une projection orthogonale.

<u>Théorème 4</u> : La solution minimale et la solution maximale sont des fonctions croissantes de $\mathbb{P}_0$ et F (tant que $\mathbb{P}_-$ et $\mathbb{P}_+$ restent sous-solution et sur-solution pour les nouveaux problèmes). ■

§ 7. SOLUTIONS PERIODIQUES

On considère

$$(18) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}' + \mathbb{P}A + A^* \mathbb{P} + f(\mathbb{P}) = F \\ \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(T) + K \end{cases}$$

Même pour les non linéarités où l'on connaît l'existence globale grâce au paragraphe 5, le problème (18) est souvent ouvert. En effet les méthodes classiques de point fixe semblent inapplicables (soit par défaut de compacité soit parce que l'application $\mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}(T)$ n'est pas strictement contractante).

Cependant pour la classe de fonctions étudiée au paragraphe 6 on peut obtenir l'existence

<u>Définition 3</u> : Q est sous-solution de (18) si $Q' + QA + A^*Q + f(Q) \leq F$ et $Q(0) \leq Q(T) + K$. Q est sur-solution si les inégalités sont renversées.

On fait l'hypothèse (15) avec la définition 3 remplaçant la définition 2 ; l'hypothèse (16) est inchangée.

<u>Théorème 5</u> : L'ensemble des solutions de (18) vérifiant $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P} \leq \mathbb{P}_+$ est non vide et possède un élément minimum et un élément maximum qui varient de manière croissante avec K et F (tant que $\mathbb{P}_-$ et $\mathbb{P}_+$ restent sous-solu-

tions et sur-solutions). ∎

Il faut remarquer que, même si f est régulier il peut y avoir non unicité. Par exemple $A = 0$ $K = F = 0$ $f(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^2 - \mathbb{P}$ a comme solution toutes les projections orthogonales. Dans ce cas on a $\mathbb{P}_- = 0$ et $\mathbb{P}_+ = I$ qui conviennent .

§ 8. COMPORTEMENT A L'INFINI

Dans le cas où la solution est bornée et les données indépendantes de t, on voudrait savoir si $\mathbb{P}(t)$ tend vers une limite. Là encore le cas général est ouvert. Dans le cas des fonctions étudiées précédemment on va obtenir des résultats plus précis.

On suppose toutes les données $\mathbb{P}_o$, F, f, ainsi que $\mathbb{P}_-$, $\mathbb{P}_+$ indépendants de t.

Outre le problème d'évolution (14), on considère le problème stationnaire

(19) $$\mathbb{P}A + A^*\mathbb{P} + f(\mathbb{P}) = F$$

Théorème 6 : L'ensemble des solutions de (19) vérifiant $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P} \leq \mathbb{P}_+$ est non vide et possède un élément minimum et un élement maximum. La solution du problème d'évolution avec $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_-$ converge en croissant vers la solution minimale ; celle avec $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}_+$ converge en décroissant vers la solution maximale. Si ces solutions coïncident il y a convergence pour toute donnée initiale vérifiant $\mathbb{P}_- \leq \mathbb{P}_o \leq \mathbb{P}_+$. ∎

Remarque 5 : Les convergences ont lieu pour la topologie forte. ∎
On a unicité si par exemple

(20) $$\begin{cases} f(\mathbb{P}) \text{ convexe entre } \mathbb{P}_- \text{ et } \mathbb{P}_+ \\ \mathbb{P}_-A + A^*\mathbb{P}_- + f(\mathbb{P}_-) \leq F - \varepsilon I \quad \text{avec } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

La première partie de (20) est vérifiée dans tous les exemples pratiques.

§ 9. QUELQUES REMARQUES

Dans le cas Hilbert-Schmidt, grâce au lemme 2, on peut donner des théorèmes assez généraux pour les solutions périodiques et le comportement à l'infini.

Les hypothèses que l'on fait dans le cas $\mathcal{L}(H,H)$ sont beaucoup plus restrictives ; on peut cependant obtenir des théorèmes intéressants sans faire l'hypothèse (15).

Des problèmes de régularité peuvent être traités ; il suffit d'appliquer les théorèmes linéaires à l'une des méthodes itératives et de voir si on peut obtenir des estimations indépendantes de n.

BIBLIOGRAPHIE

Pour l'étude en dimension finie :

Kalman [1] Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. Mat. Mexicano (1960) 102-109.

[2] The theory of optimal control and the calculus of variations : Mathematical optimization techniques, ed. R. Bellmann , Univ. of Calif. 1963.

Pour la dimension infinie et une bibliographie plus précise :

Lions : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations aux dérivées partielles. Dunod-Gauthier-Villars, Paris 1968.

Pour l'étude directe :

Da Prato [1] Quelques résultats d'existence et régularité pour un problème non linéaire de la théorie du contrôle (à paraître)

[2] Sur un problème de la théorie du contrôle. Journ. Math. Pures. Appl.

Temam Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornée en dimension infinie. Journ. of Funct. Anal. 7. 1971 87-115.

Tartar [1] Sur l'étude directe d'équations non linéaires intervenant en théorie du contrôle optimal. C. R. Acad. Sc. t.276, 1973 1493-1496.

[2] Même titre à paraître au Journ. of Funct. Anal.