Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer
C. Zuily

Non hypoellipticité des opérateurs différentiels du type de Fuchs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A4_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

NON HYPOELLIPTICITE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DU TYPE DE FUCHS

par B. HELFFER ET C. ZUILY
exposé par C. ZUILY

Exposé N° V

14 Novembre 1973

On se propose dans cet exposé de présenter quelques résultats de régularité (et de non régularité) pour la classe d'opérateurs différentiels récemment introduite par MM. M. S. Baouendi et C. Goulaouic.

Ce sont des opérateurs définis dans $]-T,T[\times\Omega$, $(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$ et de la forme :

$$(1)\quad P = t^k D_t^m + a_{m-1}(x)t^{k-1}D_t^{m-1} + \ldots + a_{m-k}(x)D_t^{m-k} + \sum_{p=o}^{m-1}\sum_{|\beta|\leq m-p} a_{p\beta}(t,x)\, t^{\alpha(p,\beta)} D_t^p D_x^\beta .$$

où $k\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^*$; $k\leq m$; $\alpha(p,\beta) = \mathrm{Max}(0, k-m+p+1)$, $a_{p\beta}\in C^\infty(]-T,T[\times\Omega)$.

Cette classe d'opérateurs constitue une généralisation naturelle des équations différentielles du type de Fuchs dont on sait qu'elles jouent un rôle important dans la théorie.

M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont étudié le problème de Cauchy pour ces opérateurs dans [1] et [2] et ont démontré en particulier le résultat suivant :

<u>Théorème 1</u> : ([2 corollaire 1) Soit P un opérateur du type (1) ; il existe un espace de distributions E relié à P (et non trivial!) tel que si u est dans E et Pu dans $C^\infty(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$ alors u appartient à $C^\infty(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$.

Précisons la nature de cet espace E. On définit d'abord les espaces suivants

a) Pour $k, m\in\mathbb{N}$

$$C_m^k(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)) = \{u\in C^k(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)) ; (tD_t)^j u\in C^k(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)), j=1,\ldots,m\}$$

$$C_{-m}^k(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)) = \{u\in\mathcal{D}'(-T,T[\times\Omega) ; u = \sum_{j=o}^m (tD_t)^j u_j,\ u_j\in C^k(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))\}$$

b) Pour $m\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$

$$C_m^{-k}(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u = \sum_{j=0}^{k} D_t^j u_j,\ u_j \in C_m^0(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))\}$$

On pose ensuite $C_{-\infty}^{\ell}(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega)) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} C_m^{\ell}(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$.

Ensuite si P est de la forme (1) on définit son équation déterminante :

(2) $$f(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1) + a_{m-1}(x)\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+2) + \ldots + a_{m-k}\lambda(\lambda-1)\ldots$$
$$\ldots(\lambda-m+k+1).$$

L'équation $f(\lambda) = 0$ a des racines triviales $\lambda = 0,\ldots,\ \lambda = m-k-1$ et k racines non triviales que nous noterons $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_k(x)$.

Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Re}\lambda_j(x) < \ell$, $j = 1,\ldots,k$, $x \in \Omega$; on peut alors prendre dans le théorème 1 $E = C_{-\infty}^{\ell}(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$. Pour la démonstration de ce résultat nous renvoyons à [2].

Nous allons maintenant nous intéresser à la régularité C^∞ en (t,x). Il est d'abord évident que ces opérateurs ne sont, en général, pas hypoelliptiques. Il n'existe même, en général, aucun espace de distributions non trivial tel que $u \in E$ $Pu \in C^\infty$ implique $u \in C^\infty$. ($P = D_t^2 - D_x^2$ est de la forme (1)!).

Il est donc naturel de se demander quels sont les opérateurs du type (1) qui sont hypoelliptiques. La réponse lorsque $k \geq 1$ est donnée par le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : (B. Helffer et C. Zuily [4]). Si $k \geq 1$, les opérateurs du type (1) ne sont jamais hypoelliptiques dans $]-T,T[\times\Omega$.

Notons que ce résultat était déjà connu pour les équations différentielles ordinaires. (Voir [5]).

On peut alors se poser le problème de décrire des sous classes de (1) qui possèdent la propriété de régularité C^∞, à partir d'un espace de distributions E. Une réponse à cette question vient d'être donnée indépendamment, par B. Helffer et par P. Bolley et J. Camus ; ils considèrent la classe d'opérateurs introduite et étudiée dans [6] et [3] ; les espaces E sont ceux décrits ci-dessus.

Nous allons maintenant donner les étapes de démonstration du théorème 2. La méthode consiste à construire une suite de distributions (u_n) de régularité fixe, telle que Pu_n soit de plus en plus régulier. Pour cela, on commence par se ramener à l'un des deux cas suivants :

<u>Cas 1</u> : Il existe un point x_o de Ω un voisinage V_{x_o} de ce point et une racine $\lambda(x)$ de l'équation déterminante de P tels que :

* $x \mapsto \lambda(x)$ est dans $C^\infty(V_{x_o})$
* $x \mapsto \lambda(x)$ ne prend pas de valeurs entières relatives dans V_{x_o}.
* Il existe $N_o \in \mathbb{Z}$; $N_o < \mathrm{Re}\lambda \leq N_o + 1$
* grad $\lambda(x) \neq 0$ ou grad $\lambda(x) \equiv 0$ dans V_{x_o}
* $f(\lambda(x) + n) \neq 0 \quad n \geq 1$.

<u>Cas 2</u> : Il existe $x_o \in \Omega$ et V_{x_o} voisinage de ce point tels que :

* Toutes les racines de $f(\lambda(x)) = 0$ sont des entiers relatifs.

La démonstration du théorème 1 diffère légèrement suivant que l'on se trouve dans tel ou tel cas. Précisons-en la démarche dans le cas 1 lorsque grad $\lambda(x) \neq 0$ dans V_{x_o}.

On définit alors les distributions suivantes

$$\begin{cases} H(\lambda(x)) = Y(t)t^{\lambda(x)} & \mathrm{Re}\,\lambda(x) > -1 \\ H(\lambda(x)) = \dfrac{1}{1+\lambda(x)} \cdot \dfrac{d}{dt} H(\lambda(x)+1) & -h < \mathrm{Re}\,\lambda \leq -h+1, \quad h = 2, 3\ldots \end{cases}$$

Puis, en supposant $\partial\lambda/\partial x_1 \neq 0$ dans V_{x_o}, on pose :

$$\begin{cases} H(\lambda(x), 0) = H(\lambda(x)) \\ H(\lambda(x), p) = \dfrac{1}{\partial\lambda/\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_1} H(\lambda(x), p-1) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement, les formules :

$$(3)\quad \begin{cases} tH(\lambda,p) = H(\lambda+1,p) \\ \dfrac{d}{dt} H(\lambda,p) = \lambda H(\lambda-1,p) + pH(\lambda-1,p-1) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} H(\lambda,p) = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i} H(\lambda,p+1) \end{cases}$$

Soit alors P un opérateur de la forme (1) : on pose

$$P_o = t^k D_t^m + a_{m-1}(x)\, t^{k-1} D_t^{m-1} + \ldots + a_{m-k}(x)\, D_k^{m-k}$$

On remarque que si λ est une racine de $f(\lambda) = 0$ on a

$$P_o H(\lambda) = f(\lambda) H(\lambda-m+k) = 0$$

ce qui suggère de construire les (u_n) de la manière suivante :

<u>Proposition 3</u> : Pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe des fonctions $C_{\ell,p}(x)$, ($l = 1,\ldots,n$ et $p = 0,\ldots,m\cdot n$) de classe $C^\infty(V_{x_o})$, des fonctions $\alpha_n^i(t,x)$, $(i = 0,\ldots,m(n+1))$ de classe $C^\infty\ (]-T,T[\times V_{x_o})$ telles que si l'on pose :

$$(4)\quad \begin{cases} u_o(t,x) = H(\lambda(x)) \\ u_n(t,x) = H(\lambda(x)) + \sum\limits_{\ell=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{m.n} C_{\ell,p}(x) H(\lambda(x)+\ell,p) \end{cases}$$

on a :

$$(5)\qquad Pu_n = \sum_{i=0}^{m(n+1)} \alpha_i^n(t,x)\, H(\lambda(x)+n+1-m+k,i)$$

La non hypoellipticité de P résulte alors de la construction d'une telle suite par un procédé classique .

<u>Démonstration de la proposition 3</u> : On raisonne par récurrence sur n. Pour n = 0, on a

$$Pu_o = (P-P_o)\,u_o = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{|\beta|\le m-p} a_{p\beta}(x,t)\, t^{\alpha(p,\beta)} D_t^p D_x^\beta H(\lambda(x)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} c_i(x,t) H(\lambda+k-m+1,i)$$

en utilisant les formules données en (3). Cette égalité est précisément (5) pour $n=0$.

Supposons $u_o, u_1, \dots, u_n$ construits satisfaisant à (4) et (5), on construit u_{n+1} de la manière suivante :

a) On montre que l'équation

$$P_o(u_{n+1}-u_n) = -\sum_{i=0}^{m(n+1)} \alpha_i^n(x,0)\,H(\lambda+n+1-m+k,i)$$

admet une solution de la forme $v = \sum_{i=0}^{m(n+1)} \sum_{\ell=0}^{i} C_{\ell,n}(x)\;H(\lambda+n+1,\ell)$ ce qui montre que $u_{n+1} = u_n + v$ est bien de la forme (4).

b) Ensuite, on écrit :

$$P\,u_{n+1} = P\,u_n + P_o(u_{n+1}-u_n) + (P-P_o)(u_{n+1}-u_n)$$

et en utilisant la récurrence et l'expression ci-dessus de u_{n+1} on montre que $P\,u_{n+1}$ est de la forme (5).

Le point a) résulte du :

<u>Lemme 4</u> : Pour tout entier $n \geq 0$, tout entier $p \geq 0$, il existe des fonctions $b_{\ell,n,p}$ $\ell = 0,1,\dots,p$ de classe $C^\infty(V_{x_o})$ telles que :

$$P_o\Big(\sum_{\ell=0}^{p} b_{\ell,n,p}(x)\;H(\lambda(x)+n,\ell)\Big) = H(\lambda+n-m+k,p).$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur p, en utilisant le fait que $f(\lambda(x)+n) \neq 0$ pour tout $n = 1,2,3,\dots$.

Notons pour terminer que l'on peut légèrement modifier la classe (1) sans changer le résultat du théorème 2. Plus précisément, on peut considérer la classe :

$$(1)' \qquad P = P_o + \sum_{p=0}^{m'-1} \sum_{|\beta|\leq m'-p} a_{p\beta}(x,t)\,t^{\alpha(p,\beta)}\,D_t^p\,D_x^\beta\,.$$

où $\alpha(p,\beta) = \mathrm{Max}\,(0,k+p-m+1)$, $m' \geq m \geq k > 0$.

[1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Cauchy Problem with characteristic initial hypersurface (à paraître aux comm. pure Appl. Math.).

[2] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Cauchy problem...in space of regular distributions (à paraître).

[3] P. Bolley, J. Camus : Une classe d'opérateurs différentiels elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. (A paraître au Journ. Math. pures et Appl.).

[4] B. Helffer, C. Zuily : Non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels. Comptes rendus Acad. Sc. Paris (à paraître).

[5] Y. Kannaï : Hypoelliptic ordinary differential operators, Israël Journ. of Math. Vol. 13 n°1-2 (1972).

[6] N. Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique et dégénérés , Journ. Math. Kyoto Univers. 9-2 (1969) p.237-335.