

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. J. DUISTERMAAT

## L'indice de Morse dans le calcul variationnel

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1973-1974), exp. n° 25,  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1973-1974\\_\\_\\_A23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974___A23_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

L'INDICE DE MORSE DANS LE CALCUL VARIATIONNEL

par J. J. DUISTERMAAT

Exposé n<sup>o</sup> XXV

29 Mai 1974



## § 0. INTRODUCTION

Je veux indiquer ici comment calculer l'indice de Morse des courbes stationnaires, avec des conditions aux limites générales, en usant la classe de cohomologie d'Arnol'd [1]. La formule obtenue pour le cas des courbes fermées (voir 3.4, ci-dessous) apparaissait dans les développements asymptotiques de [2], [5] pour le spectre d'un opérateur elliptique positif sur une variété compacte. Une comparaison des puissances de  $i$  qui interviennent là avec celles qui apparaissent dans les développements asymptotiques de Colin de Verdière [3] pour le Laplacien d'une variété riemannienne indiquait déjà que notre nombre devait être égal à l'indice de Morse pour les géodésiques périodiques, modulo 4. Evidemment, notre formule doit aussi être égale à celle obtenue récemment par Klingenberg [7] pour l'indice des géodésiques périodiques d'une variété riemannienne.

## § 1. DEFINITION DE L'INDICE ET TRADUCTION EN NOMBRE D'INTERSECTIONS POUR UNE COURBE D'ESPACES LAGRANGIENS

Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  et  $f : (t, x, v) \mapsto f(t, x, v)$  une fonction réelle  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R} \times TX$ . Sur l'espace des courbes

$$C = \left\{ \gamma \in C^2([a, b], X) ; \left( t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \right) \in \Omega, \quad \forall t \in [a, b] \right\}$$

on définit la fonction réelle  $C^\infty$ ,  $E$  par

$$E(\gamma) = \int_a^b f\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right) dt .$$

Pour considérer des conditions aux limites on restreint  $E$  à un espace des courbes

$$C_B = \left\{ \gamma \in C ; (\gamma(a), \gamma(b)) \in B \right\},$$

où  $B$  est une sous-variété  $C^\infty$  de  $X \times X$  donnée. Evidemment  $C_B$  est une

variété  $C^\infty$  de Banach, et  $T_Y C_B = \{ \delta\gamma \in C^2([a,b], Y^* TX) ; (\delta\gamma(a), \delta\gamma(b)) \in T_{Y(a), Y(b)} B \}$ .

Pour faciliter les notations on peut prendre un recouvrement  $C^\infty$  d'un voisinage tubulaire de la courbe  $\gamma$  en question par un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Parce qu'un recouvrement induit un difféomorphisme entre les espaces de courbes correspondants, on peut faire comme si  $X$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ .

Par une intégration par parties, on obtient que  $\gamma$  est une courbe stationnaire pour la condition aux limites  $B$ , c'est à dire  $DE(\gamma) |_{T_Y C_B} = 0$ , si et seulement si

$$1.1 \quad \frac{d}{dt}((D_v f)(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))) = (D_x f)(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$$

pour tout  $t \in [a, b]$  (Euler-Lagrange) et

$$1.2 \quad (D_v f(a, \gamma(a), \frac{d\gamma}{dt}(a)), - D_v f(b, \gamma(b), \frac{d\gamma}{dt}(b))) \in (T_{Y(a), Y(b)} B)^\perp.$$

Pour une courbe stationnaire  $\gamma$ , la différentielle seconde totale  $D^2 E(\gamma)$  de  $E$  en  $\gamma$  est une forme bilinéaire définie de manière invariante sur  $T_Y C_B$ . On définit alors l'indice de Morse de  $\gamma$  par rapport à la condition aux limites  $B$  par :

$$1.3 \quad \text{Ind}_B(\gamma) = \sup\{\dim L, \text{ où } L \text{ est un sous-espace linéaire de } T_Y C_B \text{ sur lequel } D^2 E(\gamma) < 0\}$$

Théorème 1.1 :  $\text{Ind}_B(\gamma) < \infty \Rightarrow D_v^2 f(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) \geq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , et inversement

$$D_v^2 f(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) > 0$$

pour tout  $t \in [a, b] \Rightarrow \text{Ind}_B(\gamma) < \infty$ .

La première partie est triviale. Pour une démonstration de la deuxième partie on introduit un produit scalaire  $q(t)$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} D_x^2 f(\dots) + q(t) & D_v D_x f(\dots) \\ D_x D_v f(\dots) & D_v^2 f(\dots) \end{pmatrix}$$

(où (...) signifie  $(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$  soit définie positive pour tout  $t \in [a, b]$ .  
Alors

$$Q(\delta\gamma, \delta\gamma) = \int_a^b q(t) (\delta\gamma(t), \delta\gamma'(t)) dt$$

définit un produit scalaire sur  $T_Y C_B$  induisant la topologie  $\mathcal{L}^2$ . D'autre part,  $Q + D^2E(\gamma)$  est un produit scalaire sur  $T_Y C_B$  induisant la topologie  $\mathcal{L}^{(1)}$  de la convergence dans  $\mathcal{L}^2$  des courbes et de leurs dérivées. On désignera par  $H^{(0)}$ , resp.  $H^{(1)}$ , la complétion de  $T_Y C_B$  pour la norme associée au produit scalaire  $Q$ , resp.  $Q + D^2E(\gamma)$ .

Considérant les formes bilinéaires comme applications linéaires de l'espace dans son dual, la relation

$$1.4 \quad D^2E(\gamma) = (Q + D^2E(\gamma)) \circ \varepsilon$$

définit une application linéaire continue  $\varepsilon : H^{(1)} \rightarrow H^{(0)}$ . Mais  $\varepsilon = I - K$  où  $K$  est continue  $H^{(0)} \rightarrow H^{(0)}$ .  $K$  est donc une application compacte de  $H^{(0)}$  dans  $H^{(0)}$ , symétrique et positive par rapport à  $Q$  et on en déduit que  $K$  a un spectre discret positif tendant vers 0. Par conséquent,  $\varepsilon$  a un spectre discret  $\lambda_j \rightarrow 1$  et la somme  $E^-$  des espaces propres pour les  $\lambda_j < 0$  est de dimension finie. On a  $\varepsilon \geq 0$  sur l'espace orthogonal  $E^+$  de  $E^-$  dans  $H^{(0)}$ , alors la décomposition de  $H^{(0)} = E^- + E^+$ , avec  $D^2E(\gamma) < 0$  sur  $E^-$  et  $D^2E(\gamma) \geq 0$  sur  $E^+$ , implique que l'indice de  $D^2E(\gamma)$  sur  $H^{(0)}$  est égal à  $\dim E^-$ . Mais  $T_Y C_B$  est dense dans  $H^{(0)}$  de sorte que :

1.5  $\text{Ind}_B(\gamma) =$  nombre des valeurs propres  $\lambda_j < 0$  de  $\varepsilon$ , comptées avec leurs multiplicités.

On peut remarquer ici que, pour toute suite croissante  $F_k$  de  $H^{(0)}$  telle que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$  est dense dans  $H^{(0)}$ , il existe un  $k$  tel que  $\text{Ind}_B(\gamma)$  est égal à l'indice de  $D^2E(\gamma)$  sur  $F_k$ . Ceci démontre qu'on a beaucoup de choix pour l'espace sur lequel on veut calculer l'indice de  $D^2E(\gamma)$  (en obtenant toujours le même  $\text{Ind}_B(\gamma)$ ). On peut considérer par exemple les courbes géodésiques par morceaux :  $F_k$  désignant l'ensemble de celles qui ont  $k$  morceaux.

Par un calcul direct on montre maintenant que

$$\varepsilon(\delta\gamma) = \lambda \cdot \delta\gamma, \quad \delta\gamma \in H^{(0)},$$

si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites en posant  $\mu = \lambda/(1 - \lambda)$ ,

$$1.6 \quad \frac{d}{dt} \{ D_x D_v f(\dots) \delta\gamma(t) + D_v^2 f(\dots) \frac{d}{dt} \delta\gamma(t) \} = \\ = (D_x^2 f(\dots) - \mu q(t)) \delta\gamma(t) + D_v D_x f(\dots) \frac{d}{dt} \delta\gamma(t)$$

au sens faible (mais alors  $\delta\gamma \in C^2$  et satisfait 1.6 au sens fort) et

$$1.7 \quad ([D_x D_v f \cdot \delta\gamma + D_v^2 f \cdot \frac{d}{dt} \delta\gamma](a), - \\ - [D_x D_v f \cdot \delta\gamma + D_v^2 f \cdot \frac{d}{dt} \delta\gamma](b)) \in (T_{\gamma(a), \gamma(b)} B)^\perp.$$

Le second problème 1.6, 1.7 est un problème de Sturm-Liouville : on cherche les valeurs de  $\mu$  par lesquelles les équations 1.6 avec les conditions aux limites 1.7 possèdent des solutions non triviales. Remarquons  $\lambda < 0 \Leftrightarrow -1 < \mu < 0$ .

Pour simplifier un peu les notations, on emploie une transformation classique, appelée la transformation de Legendre. L'idée est d'écrire

$$1.8 \quad \xi = D_v f(t, x, v),$$

et écrivant  $v = v(t, x, \xi)$  pour la solution locale de 1.8 :

$$1.9 \quad p(t, x, \xi) = \langle v(t, x, \xi), \xi \rangle - f(t, x, v(t, x, \xi)).$$

Observons que  $D_v^2 f > 0 \Rightarrow D_v^2 f$  non dégénéré  $\Rightarrow v \rightarrow D_v f(t, x, v)$  est un difféomorphisme local (=revêtement) alors  $p$  est bien défini sur un nouveau revêtement convenable. Écrivant

$$\xi(t) = D_v f(t, x(t), \xi(t)) \\ x(t) = \gamma(t) \\ v(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t)$$

les équations 1.1, 1.2 sont équivalentes à

$$1.10 \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= D_{\xi} p(t, x(t), \xi(t)) \\ \frac{d\xi}{dt}(t) &= -D_x p(t, x(t), \xi(t)) \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$1.11 \quad \begin{aligned} (x(a), x(b)) &\in B \\ (\xi(a), -\xi(b)) &\in (T_{x(a), x(b)} B)^{\perp} \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} \delta \xi &= D_x D_v f \cdot \delta x + D_v^2 f \cdot \delta v \\ \delta x(t) &= \delta \gamma(t) \\ \delta v(t) &= \frac{d}{dt} \delta \gamma(t) \end{aligned}$$

les équations 1.6, 1.7 sont équivalentes à

$$1.12 \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= D_x D_{\xi} p \cdot \delta x + D_{\xi}^2 p \cdot \delta \xi \\ \frac{d}{dt} \delta \xi &= (-\mu q - D_x^2 p) \delta x - D_{\xi} D_x p \cdot \delta \xi \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$1.13 \quad \begin{aligned} (\delta x(a), \delta x(b)) &\in T_{x(a), x(b)} B \\ (\delta \xi(a), -\delta \xi(b)) &\in (T_{x(a), x(b)} B)^{\perp} \end{aligned}$$

Les équations 1.10 forment un système hamiltonien défini par la fonction  $p(t, x, \xi)$ , et pour  $\mu = 0$ , 1.12 est l'équation pour la différentielle du flot hamiltonien (équation variationnelle) le long de la solution  $(x(t), \xi(t))$ .

1.12 est une équation linéaire de la forme  $\frac{du}{dt} = A(\mu, t)u$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{2n}$

où



$$A(\mu, t) = \begin{pmatrix} D_x D_\xi p & D_\xi^2 p \\ -\mu q - D_x^2 p & -D_\xi D_x p \end{pmatrix}$$

est une transformation symplectique infinitésimale pour la forme symplectique canonique.

$$\sigma_{\mathbb{R}^{2n}} : \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta \xi' \end{pmatrix} \mapsto \langle \delta \xi, \delta x' \rangle - \langle \delta x, \delta \xi' \rangle .$$

Alors la solution fondamentale  $\Phi(\mu, t)$  de 1.12, définie par la relation

$$u(t) = \Phi(\mu, t)u(0)$$

pour toute solution  $u$ , est une transformation linéaire symplectique dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Autrement dit, la forme symplectique

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma_{\mathbb{R}^{2n} \times \{0\}} \oplus -\sigma_{\{0\} \times \mathbb{R}^{2n}}$$

sur  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  s'annule sur

$$\gamma(\mu, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{graphe de } \Phi(\mu, t).$$

$\gamma(\mu, t)$  est de dimension  $2n$  (c'est la dimension maximale pour un sous-espace isotrope de  $\sigma$ ), on dit alors que  $\gamma(\mu, t)$  est un espace lagrangien dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  pour  $\sigma$ .

Par ailleurs l'espace  $\beta \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  défini par

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \eta \end{pmatrix} ; (\delta x, \delta y) \in T_{x(a), x(b)}^B, (\delta \xi, -\delta \eta) \in (T_{x(a), x(b)}^B)^\perp \right\}$$

est aussi de dimension  $2n$  et isotrope pour  $\sigma$ . L'indice de Morse est maintenant égal au "nombre d'intersections"

$$1.14 \quad \sum_{-1 < \mu < 0} \dim(\gamma(\mu, b) \cap \beta) \quad \text{lorsque } \mu \text{ varie}$$

de la courbe  $\mu \mapsto \gamma(\mu, b)$ ,  $\mu$  de  $-1$  à  $0$ , d'espaces lagrangiens avec l'espace

lagrangien fixe  $\beta$ .

§ 2. THEORIE D'INTERSECTIONS POUR DES COURBES D'ESPACES LAGRANGIENS.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $2d$ ,  $\sigma$  une forme symplectique (= bilinéaire antisymétrique, non dégénérée) sur  $E$ . Un sous-espace linéaire  $\alpha$  de  $E$  est appelé lagrangien lorsque  $\sigma(u,v) = 0$  pour tous  $u, v \in \alpha$ , et que la dimension de  $\alpha$  est maximale (=  $d$ ). On désigne par  $\Lambda$  l'ensemble de tels  $\alpha$  et, pour tout  $\beta \in \Lambda$ , on dénote par  $\Lambda^k(\beta)$  l'ensemble des  $\alpha \in \Lambda$  tel que  $\dim \alpha \cap \beta = k$ .

Soit maintenant  $\alpha, \beta \in \Lambda$ ,  $\alpha \cap \beta = 0$ . Alors tout sous-espace linéaire  $\gamma$  de  $E$  de dimension  $d$  tel que  $\gamma \cap \beta = 0$  peut être écrit sous la forme :

$$\gamma = \{u + Cu ; u \in \alpha\}$$

pour une application linéaire  $C : \alpha \rightarrow \beta$ . Ceci définit une forme bilinéaire

$$Q(\alpha, \beta; \gamma) : (u, v) \mapsto \sigma(Cu, v), \quad u, v \in \alpha$$

sur  $\alpha$  et on vérifie que  $\gamma \in \Lambda$  si et seulement si  $Q(\alpha, \beta; \gamma)$  est symétrique. Autrement dit

$$Q(\alpha, \beta) : \gamma \mapsto Q(\alpha, \beta; \gamma)$$

est une identification de  $\Lambda^0(\beta)$  avec l'espace  $S^2\alpha$  des formes bilinéaires symétriques sur  $\alpha$ , et on déduit que  $\Lambda$  est une sous-variété algébrique lisse de la Grassmannienne des sous-espaces linéaires de dimension  $d$  de  $E$ , avec les  $Q(\alpha, \beta)$  comme système de cartes. En particulier on voit que  $\dim \Lambda = \frac{1}{2}d(d+1)$ .

C'est un fait remarquable que la différentielle de  $Q(\alpha, \beta)$  au point  $\alpha$  ne dépend pas de  $\beta \in \Lambda^0(\alpha)$  et définit alors une identification canonique  $q_\alpha$  de  $T_\alpha \Lambda$  avec  $S^2\alpha$ . On peut maintenant donner une description géométrique des espaces  $\Lambda^k(\beta)$  avec le :

Théorème 2.1 : Pour tout  $\alpha \in \Lambda^k(\beta)$  il existe une submersion algébrique  $R$  d'un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $\alpha$  dans  $\Lambda$  sur  $S^2(\alpha \cap \beta)$  tel que pour tout  $k' \leq k$  :  $\alpha' \in \Lambda^{k'}(\beta) \cap \mathcal{O} \Leftrightarrow \dim \ker R(\alpha') = k'$ . De plus, si on désigne par  $\rho_{\alpha \cap \beta} : S^2_{\alpha} \rightarrow S^2(\alpha \cap \beta)$ , la restriction des formes bilinéaires sur  $\alpha$  à  $\alpha \cap \beta$ , on a

$$DR(\alpha) = \rho_{\alpha \cap \beta} \circ q_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha, \beta} .$$

Enfin, pour toute courbe différentiable  $t \rightarrow \alpha(t)$  dans  $\Lambda$  telle que  $\Gamma_{\alpha(0), \beta} \left( \frac{d\alpha}{dt}(0) \right)$  est non dégénéré et  $\gamma \in \Lambda^0(\alpha(0) \cap \Lambda^0(\beta))$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$2.1 \quad \text{sgn } Q(\beta, \gamma; \alpha(t)) = \text{sgn } Q(\beta, \gamma; \alpha(0)) + \text{sgn } \Gamma_{\alpha(0), \beta} \left( \frac{d\alpha}{dt}(0) \right)$$

pour  $0 < t < \varepsilon$ .

Corollaire 2.2 :  $\bigcup_{k' \geq k} \Lambda^{k'}(\beta)$  est une sous variété algébrique de  $\Lambda$ , dont la partie régulière est  $\Lambda^k(\beta)$  ; pour tout  $\alpha \in \Lambda^k(\beta)$ ,  $T_{\alpha} \Lambda^k(\beta) \cong \text{Ker } \Gamma_{\alpha, \beta}$ .  $\Lambda^k(\beta)$  est alors de codimension  $\frac{1}{2}k(k+1)$  dans  $\Lambda$ .

En particulier  $\Sigma(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \setminus \Lambda^0(\beta)$  est une sous-variété algébrique de codimension 1 dans  $\Lambda$  dont la partie régulière est égale à  $\Lambda^1(\beta)$  et la partie singulière ( $= \bigcup_{k \geq 2} \Lambda^k(\beta)$ ) est de codimension 3 dans  $\Lambda$ . Pour tout  $\alpha \in \Lambda^1(\beta)$ ,  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  induit un isomorphisme :  $T_{\alpha} \Lambda / T_{\alpha} \Lambda^1(\beta) \rightarrow S^2(\alpha \cap \beta)$ ,  $S^2(\alpha \cap \beta)$  est un espace linéaire de dimension 1 qu'on oriente en considérant comme éléments positifs les formes quadratiques positives. Par conséquent  $\Sigma(\beta)$  définit un cycle orienté de codimension 1, appelé cycle de Maslov. Comme le groupe symplectique opère transitivement sur  $\Lambda$  et est connexe, on obtient que  $[\Sigma(\beta)]$  ne dépend pas de  $\beta$ .

Par dualité, ce cycle définit un élément  $A \in H^1(\Lambda, \mathbb{Z})$ , appelé classe d'Arnol'd, donné par la relation

$$\langle \gamma, A \rangle = \text{nombre d'intersections de } \gamma \text{ avec } \Sigma(\beta)$$

pour toute courbe fermée  $\gamma$  dans  $\Lambda$ . Par une petite déformation de  $\gamma$ , on peut se ramener au cas où  $\gamma$  est différentiable et coupe  $\Sigma(\beta)$  seulement

dans sa partie régulière  $\Lambda^\perp(\beta)$  et transversalement, on obtient alors la formule

$$\langle \gamma, A \rangle = \sum_{\gamma(t) \in \Sigma(\beta)} \operatorname{sgn} \Gamma_{\gamma(t), \beta} \left( \frac{d\gamma}{dt}(t) \right).$$

En effet,  $\pi_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$  et  $A$  est un générateur de  $H^1(\Lambda, \mathbb{Z})$ , (voir [1]).

Pour une courbe  $\gamma \in C^0([a, b], \Lambda)$ , non nécessairement fermée, avec  $\gamma(a), \gamma(b) \in \Lambda^0(\beta)$ , on définit le nombre  $[\gamma : \beta]$  d'intersections de  $\gamma$  avec  $\beta$  comme  $\langle \tilde{\gamma}, A \rangle$ , où  $\tilde{\gamma}$  est une courbe fermée constitué de  $\gamma$ , et d'une courbe qui va de  $\gamma(b)$  à  $\gamma(a)$  dans  $\Lambda^0(\beta)$ . Comme  $\Lambda^0(\beta) \cong S^2\alpha$  est simplement connexe, on peut toujours trouver une telle courbe et le nombre  $\langle \tilde{\gamma}, A \rangle$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{\gamma}$ .

On a  $[\gamma_2 \circ \gamma_1 : \beta] = [\gamma_2 : \beta] + [\gamma_1 : \beta]$  où  $\gamma_2 \circ \gamma_1$  désignent la composition de courbes  $\gamma_2$  et  $\gamma_1$  du type ci-dessus (avec origine de  $\gamma_2 =$  point d'arrivée de  $\gamma_1$  dans  $\Lambda^0(\beta)$ ).

On a également  $[\gamma : \beta] = [\gamma' : \beta]$  lorsque  $\gamma'$  est homotope à  $\gamma$  par une homotopie conservant les extrémités de  $\gamma$ .

Pour calculer effectivement le nombre  $[\gamma : \beta]$ , il est important d'avoir la possibilité de changer l'espace lagrangien fixe  $\beta$ . La différence est donnée par la formule explicite suivante :

$$2.2 \quad [\gamma : \beta'] - [\gamma : \beta] = s(\beta, \beta'; \gamma(a), \dot{\gamma}(b)).$$

où  $s$  est le nombre d'Hürmander défini par

$$2.3 \quad s(\beta, \beta'; \alpha, \alpha') = \frac{1}{2} \{ \operatorname{sgn} Q(\beta, \alpha'; \beta') - \operatorname{sgn} Q(\beta, \alpha; \beta') \}$$

pour tous  $\alpha, \alpha' \in \Lambda^0(\beta) \cap \Lambda^0(\beta')$ , et on a

$$2.4 \quad s(\beta, \beta'; \alpha, \alpha') = \frac{1}{2} \{ \operatorname{sgn} Q(\beta, \beta'; \alpha) - \operatorname{sgn} Q(\beta, \beta'; \alpha') \}$$

si de plus  $\beta \cap \beta' = 0$  (voir [6, section 3.3] et [4, section 3.4]).

Nous aurons aussi besoin d'une formule donnant  $[\gamma : \beta]$  pour des courbes à coins  $\gamma$  :

Lemme 2.3 : Supposons que  $\gamma \in C^0([a, b], \Lambda)$  coupe  $\Sigma(\beta)$  seulement pour  $t_0 \in ]a, b[$  et que  $\gamma$  ait une dérivée à gauche, (resp. à droite) égale à  $v^-$ , (resp.  $v^+$ ). Supposons aussi que  $Q^\pm = \Gamma_{\gamma(t_0), \beta} v^\pm$  soit non dégénéré. Alors

$$2.5 \quad [\gamma : \beta] = \frac{1}{2} \{ \text{sgn } Q^- + \text{sgn } Q^+ \} .$$

Finalement on dira qu'une courbe  $\gamma \in C^1([a, b], \Lambda)$  est positive si  $q_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}(t) \right) > 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ . Pour une telle courbe ( $\gamma(a), \gamma(b) \in \Lambda^0(\beta)$ ), il découle du lemme 2.3 que

$$2.6 \quad [\gamma : \beta] = \sum_{\gamma(t) \in \Sigma(\beta)} \dim(\gamma(t) \cap \beta).$$

### § 3. CALCUL DE L'INDICE DE MORSE

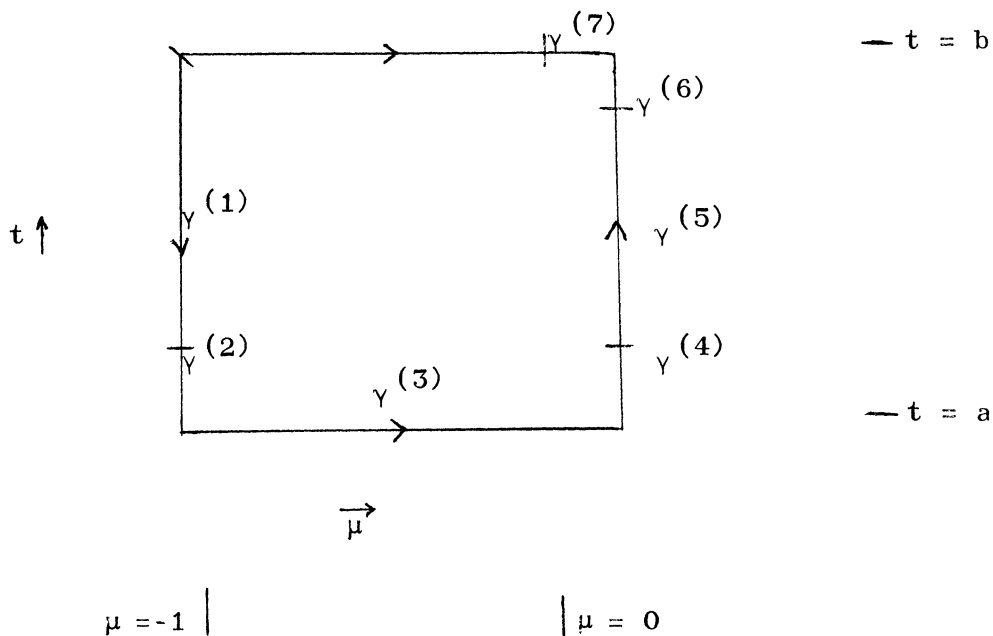
Un calcul direct montre que la condition

$D_{\xi}^2 p(t, x(t), \xi(t)) = D_v^2 f(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))^{-1}$  est définie positive et implique que  $\delta \xi(t) \equiv 0$  pour toute solution de 1.12 telle que  $\delta x(t) \equiv 0$  et que la courbe  $\mu \mapsto \gamma(\mu, t)$  est positive pour chaque  $t > a$ . On déduit alors de la formule 2.6 que l'indice de Morse (qui est égal à 1.14) est égal au nombre d'intersections de la courbe  $\mu \mapsto \gamma(\mu, b)$ , ( $\mu$  variant de  $-1$  à  $0$ ) avec  $\beta$  dans le sens du § 2.

On désigne par  $\gamma_s$  la courbe  $t \mapsto \gamma(-1, t)$ , ( $t$  variant de  $b$  à  $s$ ), suivi par la courbe  $\mu \mapsto \gamma(\mu, s)$ , ( $\mu$  variant de  $-1$  à  $0$ ), suivi par la courbe  $t \mapsto \gamma(0, t)$ , ( $t$  variant de  $s$  à  $b$ ) et finalement  $\mu \mapsto \gamma(\mu, b)$ , ( $\mu$  variant de  $0$  à  $-0$ ). Alors  $s \mapsto \gamma_s$ , lorsque  $s$  varie de  $0$  à  $a$ , est une homotopie de la courbe  $\mu \mapsto \gamma(\mu, b)$  ( $\mu$  variant de  $-1$  à  $-0$ ) avec la composition des courbes suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &: \gamma(-1, t), \quad t \text{ de } b \text{ à } a+0, \\ \gamma^{(2)} &: \gamma(-1, t), \quad t \text{ de } a+0 \text{ à } a, \\ \gamma^{(3)} &: \gamma(\mu, a), \quad \mu \text{ de } -1 \text{ à } 0, \end{aligned}$$

- $\gamma^{(4)}$  :  $\gamma(0, t)$ ,  $t$  de  $a$  à  $a+0$ ,  
 $\gamma^{(5)}$  :  $\gamma(0, t)$ ,  $t$  de  $a+0$  à  $b-0$ ,  
 $\gamma^{(6)}$  :  $\gamma(0, t)$ ,  $t$  de  $b-0$  à  $b$ ,  
 $\gamma^{(7)}$  :  $\gamma(\mu, b)$ ,  $\mu$  de  $0$  à  $-0$



Il faut être prudent dans les coins, parce qu'il peut arriver que  $\gamma(\mu, a)$  ou  $\gamma(0, b)$  ne soit pas transverse à  $\beta$ .

La courbe  $\gamma^{(1)}$  ne coupe pas  $\Sigma(\beta)$  parce qu'on peut remplacer  $b$  par tout  $s > a$  dans les considérations qui nous ont amenés à 1.6. De plus,  $\gamma^{(3)}$  n'est pas une courbe du tout parce que  $\gamma(\mu, a) = \text{graphe de l'identité}$  pour tout  $\mu$ . Alors on obtient la formule :

$$3.1 \quad \text{Indice de Morse} = [\gamma^{(5)} : \beta] + [\gamma^{(4)} \circ \gamma^{(2)} : \beta] + [\gamma^{(7)} \circ \gamma^{(6)} : \beta],$$

où on peut calculer les "termes des coins"

$$[\gamma^{(4)} \circ \gamma^{(2)} : \beta] , [\gamma^{(7)} \circ \gamma^{(6)} : \beta]$$

grâce au lemme 2.3.

Le but de toute cette histoire était d'écrire l'indice de Morse en termes du nombre d'intersections avec  $\beta$  de la courbe  $t \mapsto \gamma(0, t)$ ,

courbe qui est donnée par la différentielle du flot hamiltonien définie en 1.10).

Finalement les formules 2.2, 2.4 nous permettent de remplacer  $\beta$  dans toutes les formules par un sous-espace lagrangien  $\beta'$  convenable pour obtenir à la fin des formules plus jolies.

Remarquons aussi que la condition  $D_{\xi}^2 p = D_v^2 f^{-1}$  est définie positive.

implique que  $\Gamma_{\gamma^{(5)}}(t), \beta'$   $\left(\frac{d\gamma^{(5)}}{dt}(t)\right) > 0$  pour un sous-espace lagrangien  $\beta'$  de  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$  de la forme

$$3.2 \quad \beta' = \delta \times \varepsilon,$$

où  $\delta$  est un sous-espace lagrangien quelconque de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $\varepsilon$  est l'espace "vertical"  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Par exemple, dans le cas où

$$3.3 \quad B = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\},$$

$C_B$  est l'espace des courbes des courbes fermées, et l'indice de Morse est égal à

$$\sum_{a < t < b} \dim(\phi(0, t)^{-1}(\varepsilon) \cap \delta) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} C & E - I \\ t & D \end{pmatrix}_{E - I} - \frac{1}{2} \dim \operatorname{Ker} (\phi(0, b) - I)$$

où  $\delta =$  "l'espace horizontal"  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  et où on a choisi des coordonnées locales dans  $X$  telles que  $\delta \times \varepsilon$  soit transverse au graphe de  $\phi(0, b)$ . Ce choix implique que

$$3.5 \quad \text{graphe de } \phi(0, b) = \left\{ \left( \begin{pmatrix} t & \\ & \delta \xi \end{pmatrix} \delta x + D \delta \xi \right), \left( \begin{pmatrix} \delta x \\ C \delta x + E \delta \xi \end{pmatrix} \right); \delta x, \delta \xi \in \mathbb{R}^n \right\}$$

pour des matrices  $C, D, E$  ( $C, D$  symétriques), matrices qui entrent dans 3.4). (Il s'agit de la formule dont je parlais dans l'introduction).

Bien sûr, quand on applique la théorie au cas où

$$B = \{(x^{(0)}, x^{(1)})\},$$

$C_B$  est l'espace des courbes avec points aux limites fixes, et on retrouve la formule classique de Morse :  $\text{Ind}_B(\gamma) = \sum_{a < t < b} \dim(\phi(0, t)^{-1}(\varepsilon) \cap \varepsilon)$ , mais

dans ce cas, c'est un peu exagéré d'introduire toute la théorie d'intersections d'espaces lagrangiens.

---

### Bibliographie

- [1] V. I. Arnold : On a characteristic class entering in quantization conditions, *Funct. Anal. Appl.* 1 (1967), 1-13.
  - [2] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Inv. Math.* 24 (1974), 65-82.
  - [3] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II, *Comp. Math.* 27 (1973), 159-184.
  - [4] J. J. Duistermaat : Fourier integral operators, Courant Institute Lecture Notes, New York 1973.
  - [5] J. J. Duistermaat, V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, en préparation. Voir aussi Proc. A. M. S. Summer Inst. on Diff. Geom., Stanford 1973.
  - [6] L. Hörmander : Fourier integral operators I, *Acta Math.* 127 (1971) 79-183.
  - [7] W. Klingenberg : The index theorem for closed geodesics, preprint 1973, voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 1005-1008.
-