C. Kipnis

Quasi-compacité de contractions positives d'un espace L^1 (suivant Brunel et Revuz)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 19, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A18_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

QUASI-COMPACITE DE CONTRACTIONS POSITIVES D'UN ESPACE L^1 (SUIVANT BRUNEL ET REVUZ)

par C. KIPNIS

Exposé N° XIX

20 Mars 1974

§ 1. INTRODUCTION

Etant donné L un espace de fonctions ou de classes de fonctions, T un opérateur sur L, la théorie ergodique a pour objet l'étude du comportement asymptotique des moyennes de Césaro

$$S_N f = \frac{1}{N} \sum_{i=o}^{N-1} T^i f$$

Dans le cas intéressant où $(X,\mathcal{Q},m)$ est un espace probabilisé et où l'espace $L = L^p(X,\mathcal{Q},m)$ trois types de problèmes sont à envisager :

- Les théorèmes ergodiques ponctuels c.a.d l'étude de la convergence simple des $S_N f(x)$
- Les théorèmes ergodiques en moyenne ou convergence en norme de ces moyennes
- En dernier lieu, les théorèmes ergodiques fort ou convergence de $S_N = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N} T^k$ en norme des opérateurs.

Nous nous proposons de démontrer ici un théorème ergodique fort dû à Brunel et Revuz [2].

§ 2. RAPPELS DES RESULTATS ET NOTATIONS

Pour cet exposé nous nous placerons dans le cadre suivant : soit $(X,\mathcal{Q},m)$ un espace probabilisé, et soit $L^1 = L^1(X,\mathcal{Q},m)$. Nous noterons :

$$L^1_+ = \{f \in L^1 : f \geq 0 \quad \text{m.p.s.}\}$$

$$L^1_o = \{f \in L^1 ; \int f dm = 0\}$$

$$L^1(A) = \{f \in L^1 , f = 0 \text{ sur } A^c \text{ p.s.}\}$$

Soit d'autre part T une contraction de L^1, positive c'est-à-dire que l'image Tf d'une fonction f positive p.s est aussi positive p.s. On notera T^* la contraction positive de L^∞, adjointe de T dans la dualité $L^1 \times L^\infty$.

Enfin on supposera que T vérifie

$$T1 = 1 \qquad T^{*}1 = 1$$

Pour fixer les idées par un exemple "concret", considérons G un groupe abélien compact, m_G la mesure de Haar normalisée et μ une probabilité sur G : l'opérateur T_μ de $L^1(m_G)$ défini par $T_\mu(f) = \mu * f$ vérifie trivialement les conditions précédentes, l'opérateur adjoint vérifiant $T^{*}_\mu(h) = \check{\mu} * h$, où l'on a posé pour tout borélien V: $\check{\mu}(V) = \mu(V^{-1})$.

Dans le cadre qui nous intéresse ici, le problème ponctuel est résolu par le célèbre théorème de Chacon-Ornstein.

<u>Théorème</u> : Soient T une contraction positive de L^1, f et g deux fonctions positives alors $\lim \Sigma T^k f / \Sigma T^k g$ existe presque sûrement sur l'ensemble $A = (\sum_{0}^{\infty} T^k g > 0)$.

On voit que ce théorème fournit la solution puisque 1 est une fonction g particulière.

Une étape importante pour la démonstration de ce théorème est le

<u>Lemme de décomposition de Hopf</u> : Soit T une contraction positive de L^1, alors il existe une décomposition essentiellement unique de X en deux ensembles C et D tels que pour toute fonction f de L^1_+ on ait :

1) $\sum_{0}^{\infty} T^k f < +\infty$ p.s. sur D

2) $\sum_{0}^{\infty} T^k f = 0$ ou $+\infty$ sur C

De plus les sous ensembles A(f) tels qu'il existe une fonction positive f vérifiant $A(f) = (\sum_{0}^{+\infty} T^k f = +\infty)$ forment une sous tribu $\mathcal{J}$ de la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur C. Ces sous-ensembles de C sont caractérisés par :

$$A \in \mathcal{J} \text{ si et seulement si } T^{*} 1_A = 1_A \text{ sur } C.$$

Nous nous placerons désormais dans le cas où T est conservatif et ergodique c'est à dire où X = C et la tribu $\mathcal{J}$ est la tribu grossière.

Ceci équivaut au fait que 1 soit valeur propre simple . La fonction propre correspondant à la fonction 1, c.à.d. que l'égalité $Tf = f$ entraîne que f est constante presque sûrement.

Afin de prouver le théorème ergodique ponctuel dans le cas d'une contraction non positive, Chacon et Krengel [3] [4] ont introduit la notion de <u>module linéaire</u>.

<u>Théorème</u> : Soit U un opérateur non positif, de L^1(resp L^∞), alors il existe un plus petit opérateur positif de L^1(resp L^∞) noté $|U|$ qui vérifie pour toute fonction f

$$|Uf| \leq |U|\,|f| \quad \text{m.p.s.}$$

De plus $|U|$ vérife $\|U\| = \||U|\|$. Cet opérateur s'appelle module linéaire de U.

Dans une nouvelle démonstration du théorème ergodique ponctuel dans le cas non positif Ackoglu et Brunel [1] démontrent alors le théorème suivant

<u>Théorème</u> : Soit U un opérateur non positif de L^1 dont le module linéaire $|U|$ est conservatif ; il existe une décomposition de X en deux sous ensembles Γ et Δ essentiellement uniques qui vérifient

1. Γ et Δ appartiennent à $\mathfrak{J}$
2. il existe une fonction s telle que $|s| = 1$ sur Γ et vérifiant, pour toute fonction f à support dans Γ

$$Uf = \bar{s}\,|U|\,sf$$

3. $(I - U)L^1(\Delta)$ est dense dans $L^1(\Delta)$.

<u>Remarque</u> : Si $|U|$ est ergodique et vérifie les conditions imposées à T, on voit que l'un des deux ensembles Γ ou Δ doit être vide et que nous nous trouvons devant une alternative (si $I - U$ n'est pas un automorphisme)

ou bien il existe f tel que $f = Uf$

ou bien $I - U$ est injectif et d'image dense non fermée.

C'est cette remarque qui sera fondamentale dans la démonstration du théorème de quasi compacité.

§ 3. THEOREME DE QUASI COMPACITE

Rappelons que l'on dit qu'un opérateur T est quasi-compact s'il existe une suite d'opérateurs compacts K_n tels que

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n - K_n\| = 0$$

Il suffit d'ailleurs pour cela (cf Neveu [5]) qu'il existe un opérateur compact K et un entier n_o tels que

$$\|T^{n_o} - K\| < 1$$

Nous allons démontrer le

Théorème [Brunel - Revuz] : Soit T une contraction conservative et ergodique de L^1, telle que $I - T$ soit un automorphisme de L^1_o, alors l'opérateur T est quasi compact

Pour prouver ce théorème nous allons analyser le spectre périphérique de T, c.à.d. la partie du spectre de T située sur le cercle de rayon spectral, que nous noterons désormais $\sigma^1(T)$. La démonstration sera faite en plusieurs étapes.

A. Le spectre périphérique résiduel est vide.

Preuve : Un nombre complexe z de module 1 est valeur spectrale si et seulement si l'opérateur $I - \bar{z}\, T$ est singulier. Mais le module linéaire de zT est T qui est conservatif et ergodique. La remarque finale du § 2 montre que le spectre résiduel ne coupe pas le cercle unité.

Les valeurs spectrales de module 1 sont donc caractérisés par le fait qu'il existe une suite, convergente ou non, de fonctions de L^1 vérifiant : $\|f_n\| = 1$ et $\lim_{n \to \infty} \|f_n - \bar{z}\, T f_n\| = 0$.

B. Si $(I - T)$ est un automorphisme de L^1_o alors le spectre périphérique est constitué de valeurs propres.

Soit z une valeur spectrale de module 1 et f_n une suite de fonctions telles que $\|(1 - \bar{z}T) f_n\|$ tende vers zéro.

Posons $\varphi_{n,p} = |f_n - f_p| - |T(f_n - f_p)|$; on a

$$T|f_n - f_p| - |f_n - f_p| + \varphi_{n,p} \geq 0$$

Mais $|\varphi_{n,p}| \leq |(zI - T)(f_n - f_p)|$ donc $\lim \|\varphi_{n,p}\| = 0$. Par conséquent

$$\lim \quad 1 - T\,(|f_n - f_p|) = 0 \quad \text{dans } L^1$$

et puisque $T1 = 1$

$$(1 - T)(|f_n - f_p| - \int |f_n - f_p| dm) \to 0 \ .$$

Cependant nous avons le

<u>Lemme</u> : Si f_n est une suite bornée de L^1 telle $\lim |f_n - f_p| - \int |f_n - f_p| = 0$ dans L^1, alors f_n contient une suite de Cauchy.

Soit f la limite de la sous suite de Cauchy, nous voyons que f vérifie $zf = Tf$ donc que z est valeur propre.

C. Les valeurs propres forment un sous groupe du cercle unité.

Soit z, de module 1, valeur propre de T, f sa fonction propre de norme 1, alors $\bar{f}$ est propre pour $\bar{z}$ puisque T est un opérateur positif. Remarquons que f vérifie $f = s$ où s est la fonction qui vérifie $s\,T\,s = \bar{z}T$. En effet $Tf = zf$ et $Ts = zs$ on tire pour tout λ complexe. $T(f - \lambda s) = f - \lambda s$. Car T est conservatif et ergodique et l'inégalité

$$T|f - \lambda s| \geq |f - \lambda s|$$

entraîne que $|f - \lambda s|$ est constante pour tout λ. On en déduit facilement que f est proportionnelle à s.

Mais alors si f' est propre relativement à z' il vient :

$$\bar{z}\,T\,ff' = f\,T\,f' = z'ff'$$

Donc ff' est propre pour zz'.

Puisque le spectre périphérique est réduit au spectre ponctuel périphérique, ce sous groupe est donc fermé, il ne peut donc être que tout le cercle où un sous groupe discret

D. Si $1 - T$ est un automorphisme de L^1_o, $\sigma^1(T)$ est un groupe fini.

<u>Preuve</u> : Soit z de module 1 une valeur propre, différente de 1, et f la fonction propre correspondante.

On a alors $\int f dm = \int T f\, dm = z \int f\, dm$ ce qui prouve que f est d'intégrale nulle. Si nous considérons T restreint à L^1_o, noté P, on a

$$\sigma^1(P) \subset \sigma^1(T)$$

mais puisque $\sigma^1(T)$ n'est constitué que de valeurs propres

$$\sigma^1(P) = \sigma^1(T) - \{1\}.$$

Cet ensemble est fermé dans le cercle unité , 1 est donc isolée dans $\sigma^1(T)$ et le sous groupe est discret.

Si $1 - T$ est un automorphisme de L^1_o, $\sigma^1(T)$ est donc un sous groupe discret du cercle unité.

E. <u>Démonstration du théorème</u>

Puisque $\sigma^1(T)$ est un sous groupe discret du cercle unité, nous distinguerons deux cas :

<u>1er cas</u> : T n'admet que la valeur propre 1. Soit E l'opérateur qui à f fait correspondre $\int$ fdm. Notons P la restriction de T à L^1_o . Puisque $1 - P$ est un automorphisme de L^1_o , 1 est à l'extérieur du spectre de P et donc son rayon spectral (sur L^1_o) φ' est strictement inférieur à 1.

Donc $\lim_{n\to\infty} \|P^n\| = 0$. Mais puisque TE = E, on a pour toute fonction f de L^1 :

$$\|(T-E)^n f\| = \|(T^n - E)f\| = \|T^n(I-E)f\| =$$

$$= \|P^n(I-E)f\| \leq 2\varepsilon \|f\|. \qquad \underline{\text{cqfd}}.$$

<u>2nd cas</u> : Si N est l'ordre du groupe $\sigma^1(T)$, l'opérateur T^N a un spectre périphérique réduit au point 1. D'ailleurs $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ est valeur propre et son vecteur propre associé à s vérifie $Ts^n = s^n$, donc $s^n = 1$. Par conséquent s s'écrit sous la forme

$$\sum_{K=o}^{N-1} \alpha^k 1_{A_K}$$

et l'on en tire donc $T^p 1_{A_K} = 1_{A_{K-p}}$ (modulo N).

Nous allons montrer que les restrictions à $A_o, \dots A_{N-1}$ de l'opérateur T^N sont conservatives et ergodiques et que $1 - T^N$ est un automorphisme de $L^1_o(A_i)$ $(i = 0,\dots,n-1)$. Nous noterons Q la restriction de T^N à $L^1(A_o)$.

L'ergodicité de Q vient de l'égalité évidente, f appartenant à $L^1_+(A_o)$

$$(\Sigma\, Q^p f = \infty) = A_o \cap (\Sigma\ T^k f) = \infty).$$

Reste à montrer que $1 - Q$ est un automoprhisme de $L^1_o(A_o)$. Du fait de l'ergodicité $1 - Q$ est injectif et d'image dense sur $L^1_o(A_o)$; soit une suite f_p de $L^1_o(A_o)$ vérifiant $\|f_p\| \leq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_p - Qf_p\| = 0$. Soit φ_p défini par :

$$\varphi_p = f_p + \dots + T^{N-1} f_p$$

on a alors

1) $N\|f_p\| \geq \|\varphi_p\| \geq \|f_p\|$

2) $\int \varphi_p = \Sigma \int T^k f_p = \Sigma \int f_p = 0$

et par télescopage :

$$\|(1-T)\varphi_p\| = \|(1-T^N)f_p\| \to 0 \ .$$

Ce qui implique que $1-T$ est un automorphisme de $L^1_o(X)$, puisque φ_p, et donc aussi f_p, converge fortement vers 0. Donc $I-Q$ est d'image fermée. En conséquence, nous pouvons appliquer les résultats du 1er cas et

$$\lim_{p \to +\infty} \|T^{N^p} I_{A_i} - I_{A_i} - E I_{A_i}\| = 0$$

où I_{A_i} est l'opérateur définit par $I_{A_i} f = f.I_{A_i}$ et par conséquent

$$\lim_{p \to +\infty} \|T^{N^{p+k}} - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_{A_{i-k}} E I_{A_i}\| = 0$$

Ce résultat est en fait plus précis que celui annoncé et implique en particulier le théorème ergodique fort

$$\lim_{k \to \infty} \|\frac{1}{k} \sum_o^k T^p - E\| = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. Akcoglu et A. Brunel : Contractions on L^1-spaces. Trans. Amer. Soc. 155 (1971).

[2] A. Brunel et D. Revuz : Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité (à paraître).

[3] R. V. Chacon et U. Krengel : Linear Modulus of a linear operator Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964)

[4] U. Krengel : Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen. Math. Scand. 13 (1963), 151-187.

[5] J. Neveu : Bases mathématiques du calcul des probabilités (Masson et Cie).