C. Zuily

Hypoellipticité des opérateurs différentiels du second ordre à coefficients réels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

HYPOELLIPTICITE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS REELS

par C. ZUILY

Exposé N° XVII

27 Février 1974

§ 0. INTRODUCTION

On se propose dans cet exposé de donner quelques résultats sur l'hypoellipticité des opérateurs différentiels du second ordre à coefficients réels. Si on note $P(x,D)$ un tel opérateur, $p^o(x,\xi)$ son symbole principal, il a été montré par L. Hörmander en 1967 que l'hypoellipticité de P implique que : (*) le signe de $p^o(x,\xi)$ est indépendant de ξ (mais dépend de x en général) (voir [5]) ; cet auteur a donné (dans ce même article) une condition suffisante d'hypoellipticité pour une large classe d'opérateurs P pour lesquels : (**) le signe de $p^o(x,\xi)$ est indépendant de ξ <u>et de x</u>. M. Derridj ([2]) a montré que dans le cas des coefficients analytiques cette condition suffisante était aussi nécessaire et O. A. Oleinik et E. V. Radkevitch [12] ont étendu ces résultats à tous les opérateurs P vérifiant (**).

Dans le cas général (*), les résultats évoqués ci-dessus sont mis en défaut sur des exemples simples comme l'a montré Y. Kannai dans [6]. Nous donnons ici quatre conditions nécessaires, quelques conditions suffisantes d'hypoellipticité et nous conjecturons une condition suffisante très proche des conditions nécessaires données.

Ces résultats ont été annoncés dans [16], [17]

§ 1. NOTATIONS ET RAPPELS

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P = P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre deux dans Ω.

$$(I.1) \qquad P = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\leq k}}^{n} a_{jk}(x) D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) ,$$

où $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$ et $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

$P^o(x,D)$ désignera la partie principale de l'opérateur $P(x,D)$ et $Q(x,D)$ la partie d'ordre un, de sorte que l'on peut écrire :

$$P = P^o + Q + c$$

Pour $j = 1,\dots,n$ nous noterons $P^{o(j)}(x,D)$ l'opérateur différentiel d'ordre un dans Ω, de symbole $\frac{\partial}{\partial \xi_j} p^o(x,\xi)$, où p^o désigne le symbole de $P^o(x,D)$.

L'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $P^{o(1)},\dots,P^{o(n)},Q$ sera par définition le plus petit C^∞-module contenant $P^{o(1)},\dots,P^{o(n)}, Q$ stable par l'opération crochet : $[A,B] = A.B - BA$. Son rang au point x de Ω sera la dimension de l'espace vectoriel engendré par les $Z(x)$, où Z appartient à l'algèbre de Lie.

Nous dirons que l'opérateur P est non totalement dégénéré dans Ω, en abrégé N.T.O. , si :

$$\text{(I.2)} \qquad \forall\, x_o \in \Omega \quad \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\leq k}}^{n} |a_{jk}(x_o)| + \sum_{j=1}^{n} |b_j(x_o)| \neq 0.$$

L'espace des fonctions analytiques sur Ω à valeurs réelles sera noté $\mathcal{a}(\Omega,\mathbb{R})$.

Enfin rappelons que l'opérateur P est dit hypoelliptique dans Ω si pour tout ouvert ω de Ω, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $Pu \in C^\infty(\omega)$ impliquent $u \in C^\infty(\omega)$.

On a le résultat suivant dû à L. Hörmander.

Théorème I.1 : ([5]) Soit $P = P^o + Q + c$ un opérateur différentiel d'ordre deux dans Ω à coefficients $C^\infty(\Omega)$, tel que les coefficients de P^o soient réels. Si P est hypoelliptique dans Ω, pour tout x_o de Ω on a : ou bien $p^o(x_o,\xi) \geq 0$ pour tout ξ de $\mathbb{R}^n$, ou bien $p^o(x_o,\xi) \leq 0$ pour tout ξ de $\mathbb{R}^n$.

§ 2. CONDITIONS NECESSAIRES

A. Enoncé des résultats

Théorème II.1 : Soit $P = P^o + Q + c$ un opérateur différentiel du second ordre dans Ω à coefficients dans $\mathcal{a}(\Omega,\mathbb{R})$ et non totalement dégénéré. Si P est hypoelliptique, alors, pour tout point x_o de Ω, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_o}$ de ce point, une fonction φ de $\mathcal{a}(\mathcal{V}_{x_o},\mathbb{R})$ tels que :

$$\text{(II.1)} \qquad P = \varphi(x)\,\mathcal{A}(x,D) + Q(x,D) + c(x) \qquad x \in \mathcal{V}_{x_o}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel d'ordre deux dans Ω à coefficients dans $\mathcal{a}(\mathcal{V}_{x_o},\mathbb{R})$ de symbole

$$(\text{II}.2) \qquad a(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{V}_{x_o}\ ,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Remarques : En fait dans ce résultat, seule l'analyticité des coefficients de P^o est importante (ceux de Q et c peuvent être pris C^∞) et cette hypothèse est importante pour cette factorisation.

Si le signe de $p^o(x,\xi)$ est indépendant de x et de ξ on prendra évidemment $\varphi \equiv \mp 1$. De plus on peut supposer que $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_k$ où les φ_i sont irréductibles et premiers entre eux dans $\mathcal{a}(\Omega,\mathbb{R})$.

Dans ce qui suit nous supposerons donc que P est de la forme (II.1), N.T.D., et vérifie (II.2) ; nous préciserons suivant les cas la régularité des coefficients de P.

Théorème II.2 : Soit $P = \varphi\mathcal{A} + Q + c$ à coefficients analytiques. Si P est hypoelliptique dans Ω, l'algèbre de Lie engendrée par Q et $\varphi\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\varphi\mathcal{A}^{(n)}$ est de rang maximal dans Ω.

Remarques :

. L'hypothèse d'analyticité des coefficients est ici essentielle comme le prouve l'exemple de l'opérateur hypoelliptique $P = D_y^2 + e^{-1/y^2}.D_x^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (voir [10]).

. Ce théorème généralise des résultats de [2] (cas des opérateurs de L. Hörmander) et de [12] (cas où $\varphi \equiv \mp 1$).

Théorème II.3 : Soit $P = \varphi\mathcal{A} + Q + c$ à coefficients C^∞. Si P est hypoelliptique dans Ω alors :

$$(\text{II}.3) \qquad a(x;\ \text{grad}\ \varphi(x)) = 0 \qquad \forall\ x \in \{t : \varphi(t) = 0\}$$

Remarques : Ce théorème est un cas particulier du théorème 1 de [4] et demeure vrai lorsque les coefficients de $\mathcal{A}$ et de Q sont à valeurs complexes.

Exemple : L'opérateur $P = \dfrac{\partial}{\partial t} + (t - a(x))\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ n'est pas hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$. $a \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, $a \not\equiv 0$.

<u>Théorème II.4</u> : Soit $P = \varphi\mathcal{X} + Q + c$ à coefficients analytiques. Si P est hypoelliptique dans Ω alors :

$$(Q\varphi)(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \{t : \varphi(t) = 0\} \tag{II.4}$$

<u>Remarques</u> : Ici l'hypothèse des coefficients ne semble pas essentielle, mais la méthode de démonstration l'exige.
Ce résultat généralise le phénomène observé, sur l'exemple $P = \frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, par Y. Kannaï dans [6] (Voir aussi [7].

B. <u>Indications sur les démonstrations</u>

Le théorème II.1 résulte du théorème I.1 ainsi que d'un lemme sur les fonctions analytiques (voir lemme 2.1 de [11].

La démonstration du théorème II.2 se fait par l'absurde en plusieurs étapes :
1. Lie $(Q, \mathcal{X}^{(j)})$ est en x_o de rang $k < n$. Dans ce cas la méthode de démonstration est semblable à celle de [2], [12].
2. Lie $(Q, \mathcal{X}^{(j)})$ est de rang n en x_o, mais Lie $(Q, \varphi\mathcal{X}^{(j)})$ est de rang $k < n$ en x_o.

Dans certains cas, on utilise un résultat de [15] et on construit des solutions de $Pu = 0$ de la forme $\delta_{E_k} \otimes V(y_1,\dots,y_k)$ où δ_{E_k} est la masse de Dirac portée par un hyperplan E_k de dimension k.

Dans d'autres cas, l'irrégularité des solutions est de nature différente (en t^λ ou $\mathrm{Log}|t|$) et on utilise un théorème de Cauchy-Kovalewska pour certains opérateurs récemment démontré par M. S. Baouendi et C. Goulaouic dans [1].

Le théorème II.3 est un cas particulier du théorème 1 de [4].

Pour démontrer le théorème II.4, on raisonne par l'absurde et on procède de la manière suivante. En utilisant les hypothèses et le théorème II.3 on est ramenés à montrer la non hypoellipticité de l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + t\mathcal{B}(x,t;D_x,tD_t) + c \qquad (x,t) \in \mathcal{V}_{(0,0)} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \tag{II.5}$$

avec $b^0(x,t;\xi,t\eta) \geq 0 \quad \forall\ (x,t;\xi,\eta) \in \mathcal{V}_{(0,0)} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

On construit alors une suite (u_n) de fonctions telles que $Lu_n \sim 0$ $(\mathrm{mod}\, \mathbb{C}^n)$ de la forme :

(II.6) $$u_n(x,t) = \int e^{i<x,\xi>} f(\xi)\, k_n(x,t;\xi)\, d\xi$$

Pour cela soit $\hat{L}$ l'opérateur défini formellement par :

$$Lu(x,t) = \int e^{i<x,\xi>} f(\xi)\, \hat{L}k(x,t;\xi)\, d\xi \; .$$

On pose

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} + t \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \\ L_2 = \hat{L} - L_1 \end{cases}$$

et on construit les k_n, comme dans [9], en résolvant :

(II.8) $$\begin{cases} L_1 k_o = 0 & k_o(x,0,\xi) = 1 \\ L_1 k_{j+1} = -L_2 k_j \, , & k_{j+1}(x,0,\xi) = 0 \, , \quad j = 0,1,\dots \end{cases}$$

On montre alors les :

<u>Lemme II.5</u> : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 4m$, il existe des fonctions analytiques $g_{m,\alpha}$ telles que

(II.9) $$k_m(x,t;\xi) = \Big(\sum_{|\alpha| \leq 4m} g_{m,\alpha}(x,t)\, t^{\lambda|\alpha| + m}\xi^\alpha\Big) e^{-\int_o^t s \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j ds}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est indépendant de m.

Posant

$$v_m(x,t) = \int e^{i<x,\xi>} f(\xi) k_m(x,t;\xi)\, d\xi \; , \quad m \in \mathbb{N}$$

où $f(\xi)$ est convenablement choisie, on a en utilisant (II.7), (II.8) et et le lemme II.5 :

<u>Lemme II.6</u> : Il existe $l > 0$, $\delta > 0$ entiers tels que si l'on pose $u_m = v_{\delta m}$, on ait :

$$u_m \notin C^{\ell}(\mathcal{V}_{(0,0)}) \ , \quad Lu_m \in C^m(\mathcal{V}_{(0,0)})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

La non hypoellipticité de l'opérateur L défini en (II.5) est alors une conséquence immédiate du lemme II.6.

<u>Remarque</u> : Le fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ soit d'ordre deux n'est pas ici intervenu de façon essentielle. Des généralisations à des opérateurs $\mathcal{A}$ d'ordre supérieur sont possibles.

§ 3. UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$; on note $I =]-T,+T[$, $Q = \Omega \times I$ et (x,t) , $x \in \Omega$, $t \in I$ le point générique de Q.

On se donne une famille de champs de vecteurs sur Q, $(X_1,\ldots,X_r)$ à coefficients réels de classe C^∞, de la forme

$$\text{(III.1)} \qquad X_j = X_j(x;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = a_j(x)\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'on pose

$$\text{(III.2)} \qquad A_j = A_j(x,t\ ;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \alpha_j(x,t)\,t^{k_j}X_j$$

où $k_j \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_j \in C^\infty(Q,\mathbb{R})$, $\alpha_j \not\equiv 0$.

$$\text{(III.3)} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}(x,t;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{j=1}^{r} A_j^2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j(x,t)A_j + \gamma(x,t)$$

où β_j, γ sont dans $C^\infty(Q,\mathbb{C})$.

Théorème III.1 : Supposons que l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \ldots, X_r$ soit de rang $n+1$ en tout point de Q alors l'opérateur

(III.4) $$L = L(x,t\ ;\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} + t\,\mathcal{A}(x,t;\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$$

où $\mathcal{A}$ est défini en (III.3), est hypoelliptique dans Q.

Remarques III.2 :

a) Le symbole principal de L est réel mais change de signe dans Q contrairement à la situation décrite dans [12].

b) Des résultats du type de celui du théorème III.1 lorsque $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel en la variable x seule et elliptique, sont données dans [6], [7] et [13]. D'autres résultats de ce type se trouvent aussi dans [3].

Esquisse de la démonstration du théorème III.1

En vertu du théorème principal de [14], l'hypoellipticité de l'opérateur L résultera des deux lemmes suivants :

Lemme III.3 : Pour tout point M_o de Q, il existe $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $s \geq 0$, il existe $U_{M_o,s}$, voisinage de M_o, et $C_{M_o,s} > 0$ tels que :

$$\|u\|_{s+\varepsilon} \leq C_{m_o,s}\{\|Lu\|_s + \|u\|_s\} \quad ; \quad u \in C_o^\infty(U_{M_o,s}).$$

Lemme III.4 : Pour tout point M_o de Q, il existe $\eta > 0$, tel que, pour tout $s \geq 0$, il existe $V_{M_o,s}$ voisinage de M_o, et $C'_{M_o,s} >$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{r} \|t\,A_j u\|_{s+\eta} \leq C'_{M_o,s}\{\|Lu\|_s + \|u\|_s\} \ ;\ u \in C_o^\infty(V_{M_o,s}).$$

Le lemme III.3 s'obtient en considérant l'expression $(\Lambda^s Lu, \Lambda^s \frac{\partial u}{\partial t})_o$ (où Λ^s est l'o.p.d. de symbole $\varphi(x,t)(1+|\xi|^2+\eta^2)^{s/2}$ convenablement choisi) et en faisant des intégrations par parties. Le lemme III.4 s'obtient par des méthodes analogues.

Remarques

On peut généraliser le théorème III.1 à des opérateurs L de la forme (III.4) avec

$$A_j = \alpha_j(x,t)\{a_j(x)t^{p_j}\frac{\partial}{\partial t} + t^{q_j}\sum_{j=1}^{n} b_{pj}\frac{\partial}{\partial x_p}\} \text{ avec } p_j \in \mathbb{N}^* \text{ et } q_j \in \mathbb{N}$$

Dans ce cas les lemmes III.3 et III.4 restent encore valables, mais on ne peut plus utiliser la condition suffisante d'hypoellipticité de [14] ; on la remplace par des techniques de [5].

Les mêmes méthodes de démonstration permettent de montrer l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - t\mathcal{A}(x;t^qD_x,t^pD_t) + c,\quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,\quad p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}$$

où $a(x,t^q\xi,t^p\eta) \geq 0 \quad \forall (x,t;\xi.\eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et Lie $(\frac{\partial}{\partial t},\mathcal{A}^{(j)})$ de rang 2 dans $\mathbb{R}^2$.

Compte tenu des résultats énoncés dans cet exposé, nous sommes conduits à faire la conjecture suivante :

<u>Conjecture</u> : Soit P un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, non totalement dégénéré de la forme

$$P = \varphi\mathcal{A} + Q + c$$

où $\mathcal{A}$ a un symbole $a(x,\xi)$ positif ou nul pour tout (x,ξ) de $\Omega\times\mathbb{R}^n$.
Supposons :

1) Lie $(Q,\varphi\mathcal{A}^{(j)})$ de rang n en tout point de Ω
2) $a(x,\text{grad}\,\varphi(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \{t : \varphi(t) = 0\}$
3) $(Q\varphi)(x) < 0 \quad \forall\, x \in \{t : \varphi(t) = 0\}$.

Alors P est hypoelliptique dans Ω.

Compte tenu des hypothèses faites on peut facilement se ramener à démontrer l'hypoellipticité de l'opérateur :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - t\tilde{\mathcal{A}}(x,t;D_x,tD_t) + c \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$$

(où $\tilde{\mathcal{A}}$ n'est plus homogène), $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \geq 0 \;\; \forall (x,t;\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ et

Lie $(\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{\mathscr{X}}^{(j)})$ de rang n dans $\mathbb{R}^n$.

Le théorème III.1 et la remarque qui suit montrent que la conjecture est vraie dans certains cas.

Il faut enfin signaler qu'entre les conditions nécessaires démontrées et la condition suffisante conjecturée, il y a un "trou" constitué par des opérateurs du type :

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - (t^3 - x^2)\left[(t^3-x^2)^2 D_x^2\right] + c \quad ,$$

$$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

pour lequel $(Q\varphi) = -3t^2 \leq 0$ dans un voisinage de $(0,0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, Comm. on pure and appl. Math. Vol. XXVI (1973) p.455.

[2] M. Derridj : Un problème aux limites pour une classe.... Ann. Inst. Fourier, Tome 21, Fasc. 4 (1971).

[3] B. Helffer : Une classe d'opérateurs hypoelliptiques, Comptes rendus Acad. Sc. Paris t.277 Série A, p.531 (1973).

[4] B. Helffer, C. Zuily : Non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t.277, p.1061 (1973).

[5] L. Hörmander : Hypoelliptic second order equations, Acta Math. 119 (1967) p.147-161 .

[6] Y. Kannaï : An unsolvable hypoelliptic second order operator, Israël Journ. of Math. Vol. 9, n°3 (1971) p.306-315.

[7] Y. Kato : Remarks on hypoellipticity of degenerate... Proceedings of Japan Acad.

[8] J. J. Kohn : Pseudo differential operators and hypoellipticity, C. I. M. E. Stresa 1968.

[9] T. Matsuzawa : On some degenerate parabolic equations, Nagoya Math. Journ. Vol. 51 (1973) p.57-77.

[10] V. S. Fedii : On a criterion of hypoellipticity .Math USSR Sbornik Vol.14 (1971) n°1.

[11] L. Nirenberg, F. Trèves : On local solvability II. Comm. pure and applied Math. Vol. 23 n°3 (1969).

[12] O. A. Oleinik, E. V. Radkevitch : On local smoothness of generalized. Russian Math. Surveys, Vol. n°2 (1971).

[13] F. Trèves : Concatenations of second order ...., Comm. pure and appl. Math. Vol. XXVI (1973) p.201.

[14] F. Trèves : An invariant criterion of hypoellipticity, Amer. Journ. of Math. 83 (1961) p.645-668.

[15] E. C. Zachmanoglou : Propagation of zeroes... Archive for Rat. mech. and analyis 38 (1970).

[16] C. Zuily : Sur l'hypoellipticité des opérateurs différentiels... Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t.277 série A p.529 (1973).

[17] C. Zuily : Comptes rendus (A paraître).

ERRATA

Pages	Au lieu de :	Lire :
XVII.2 Ligne 23	...dans $\mathcal{A}(\Omega,\mathbf{R})$ et non totalement dégénéré.	...dans $\mathcal{A}(\Omega,\mathbf{R})$.
XVII.3 Ligne 27	$a \neq 0$	$a'_x \neq 0$
XVII.4 Ligne 7	(Voir aussi [7].	(Voir aussi [7]).
XVII.4 Ligne 10	(voir lemme 2.1 de [11].	(voir lemme 2.1 de [11]).
XVII.5 Ligne 19	$f(\xi)k_m(x,t;\xi)d\xi,\ldots$	$f(\xi)\sum_{j=0}^{m} k_j(x,t;\xi)d\xi,\ldots$
XVII.6 Ligne 7	une conséquence immédiate du lemme II.6.	une conséquence du lemme II.6.