Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Chazarain

Flot hamiltonien et spectre d'un opérateur elliptique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

FLOT HAMILTONIEN ET SPECTRE D'UN OPERATEUR ELLIPTIQUE

par J. CHAZARAIN

Exposé n° XVI

20 Février 1974

§ 0. INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous nous proposons de donner une idée des résultats détaillés dans l'article [2] et nous en profitons aussi pour préciser certains points (théorème II, Lemme 1).

Interprétons la formule de Poisson classique

(1) $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k\pi)$$

en considérant le cercle S_1 ($\simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) comme une variété riemannienne dont le laplacien est donné par l'opérateur $\Delta = \frac{d^2}{dt^2}$. Le spectre de $-\Delta$ est constitué des entiers de la forme k^2, aussi le membre de gauche de (1) peut encore s'écrire

$$S(t) = \frac{1}{2} \Sigma\, e^{\pm i\sqrt{\lambda_k}\, t}$$

où $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ désigne la suite des valeurs propres de $-\Delta$ en répétant chacune selon sa multiplicité. D'autre part, le membre de droite de (1) nous indique les singularités de la distribution S ; on constate qu'elles sont situées aux points de la forme $\pm 2k\pi$ qui s'interprète comme l'ensemble des longueurs et de leurs oppposées des géodésiques périodiques.

De plus, la singularité en $\ell = 2k\pi$ de S est de la forme δ_ℓ, c'est à dire une distribution de Fourier sur $\mathbb{R}$ associée à la variété lagrangienne conique

$$T^*_\ell \mathbb{R} = \{(\ell,\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

En résumé, la restriction de S au voisinage de ℓ définit un élément de $I(\mathbb{R}; T^*_\ell \mathbb{R})$ de symbole principal égal à 1 sur $T^*_\ell \mathbb{R}$, on renvoie à [6] et [4] pour la théorie et les notations concernant les opérateurs intégraux de Fourier.

On se propose de montrer comment ceci se généralise au cas d'une variété riemannienne compacte de dimension quelconque et même plus généralement, il suffit de se donner un opérateur elliptique auto-adjoint positif sur une variété compacte X.

Motivé à l'origine par la thèse de Colin de Verdière [3], ce travail n'est pas une généralisation des résultats de Colin mais une approche parallèle de questions analogues par une méthode "plus géométrique".

§ 1. LE FLOT HAMILTONIEN

Soit X une variété compacte convexe de dimension n, munie d'une densité dx, soit P(x,D) un opérateur (éventuellement pseudo-différentiel) elliptique du 2ème ordre et auto-adjoint positif sur X. On note $p(x,\xi)$ son symbole principal comme fonction : $T^*X \to \mathbb{R}$. Soit H_p le champ hamiltonien de p ($H_p = p'_\xi \frac{\partial}{\partial x} - p'_x \frac{\partial}{\partial \xi}$) et G^t le flot associé au champ $\frac{1}{2} H_p$ sur T^*X. On sait que G^t conserve le fibré en sphères $S^*X = p^{-1}(\{1\})$, et que le flot G^t est défini pour tout t puisque S^*X est compacte.

<u>Définition</u> : On dira que $t \to G^t(y,\eta)$ est une trajectoire périodique sur S^*X, s'il existe $\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que $G^\ell(y,\eta) = (y,\eta)$. On dira alors que ℓ est une période ; soit $\mathcal{L}$ l'ensemble constitué de $\{0\}$ et de toutes les périodes ℓ.

<u>Remarque</u> : Dans le cas particulier où $-P$ est le laplacien d'une variété riemannienne X, la projection sur X des trajectoires $t \to G^t(y,\eta)$ constitue précisément les géodésiques de X et les périodes sont égales à $\pm$ la longueur des géodésiques fermées (grâce au facteur $\frac{1}{2}$ devant H_p).

D'autre part, on associe à l'opérateur P son spectre

$$0 = \lambda_o < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots .$$

qui est caractérisé par la distribution

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0} e^{\pm i\sqrt{\lambda_k}\, t} = \sum_{k\geq 0} \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}\Big(\sum_{k\geq 0} \delta(\tau \pm \sqrt{\lambda_k})\Big) .$$

Le lien entre $\mathcal{L}$ et S se fait via l'opérateur des ondes

$$\square = P(x,D) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}\times X.$$

§ 2. SUPPORT SINGULIER DE S

Soit $\tilde{\breve{E}}$ le noyau du problème de Cauchy, c'est à dire l'opérateur $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times X)$ solution de

$$(2) \qquad \begin{cases} \square\,.\,\tilde{\breve{E}} = 0 \\ \tilde{\breve{E}}\big|_{t=o} = \text{Identité de } X \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\breve{E}}\big|_{t=o} = 0\,. \end{cases}$$

Le noyau distribution $\tilde{\breve{E}}(t,x,y)$ de $\tilde{\breve{E}}$ s'exprime au moyen d'une base orthonormée de fonctions propres w_k par

$$\tilde{E}(t,x,y) = \sum_{k\geq o} w_k(x)\overline{w_k(y)} \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t)\,.$$

D'où l'on tire la relation bien connue

$$(3) \qquad \int_X \tilde{\breve{E}}(t,x,x)\,dx = S(t)\,.$$

L'étude des singularités de S est basée sur le

Théorème (Hörmander) cf.[4] : Il existe une distribution de Fourier $E \subset I^{1/4}(\mathbb{R}\times X\times x;C')$ telle que $(E-\tilde{E}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times X\times X)$. Et la relation canonique C est définie par

$$C = \{(t,\pm 1\,;\, G^t(y,\eta);y,\eta)\,|\,t\in\mathbb{R},\ (y,\eta)\in S^*X\} \subset S^*\mathbb{R}\times S^*X\times S^*X,$$

et C' se déduit de C en prenant $-\eta$ dans le terme (y,η).

Désignons par i l'inclusion $\mathbb{R}\times$ (diagonale $X\times X) \hookrightarrow \mathbb{R}\times X\times X$ et par j la projection $\mathbb{R}\times$ (diagonale $X\times X) \to \mathbb{R}$. Avec ces notations, on peut écrire (3) sous la forme

$$j_*\,.\,i^*\tilde{\breve{E}} = S$$

d'où

$$j_*.i^*E \equiv S \quad \text{mod } C^\infty(\mathbb{R})$$

En utilisant les théorèmes sur le spectre singulier (ou wave front dans [6], au support spectral,...) on obtient immédiatement

$$WF(S) \subset \{(t,\pm 1) \mid \text{il existe } (y,\eta) \in S^*X \text{ tel que } G^t(y,\eta) = (y,\eta)\}$$

$$= \mathcal{L} \times \{-1,+1\} ,$$

d'où finalement le

<u>Théorème 1</u> : On a l'inclusion supp.sing $S \subset \mathcal{L}$, ce qui signifie que les singularités de S sont situées sur les périodes des trajectoires périodiques.

Il s'agit ensuite de préciser la structure des singularités de S aux points de $\mathcal{L}$.

§ 3. <u>STRUCTURE DE S AU VOISINAGE D'UN POINT $\ell \in \mathcal{L}$</u>.

Soit ℓ un point isolé de $\mathcal{L}$, comme S est paire on peut supposer $\ell \geq 0$, soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans un petit voisinage de ℓ et tel que $\theta(\ell) = 1$.

Commençons par représenter l'ensemble des trajectoires de période ℓ ; on note que l'application $t \to G^t(y,\eta) \in S^*X$ est périodique de période ℓ si et seulement si on a

$$(\ell,\pm 1 \; ; \; y,\eta; \; y,\eta) \in C.$$

Ce qui conduit à définir l'ensemble W_ℓ des trajectoires de période ℓ comme l'intersection

$$W_\ell = C \cap \overbrace{(\{\ell,\pm 1\} \times \text{diagonale } (S^*X \times S^*X))}^{D_\ell}$$

qui est une partie compacte de $S^*\mathbb{R} \times S^*X \times S^*X$, on note W_ℓ^+ l'ensemble correspondant en prenant $\{\ell,+1\}$ à la place de $\{\ell,\pm 1\}$.

Afin d'utiliser une forme du théorème de la phase stationnaire on est conduit à faire l'hypothèse :

(H_ℓ) W_ℓ est une variété critique régulière au sens de Weinstein [7], c'est à dire : a) W_ℓ est une sous variété de $S^*\mathbb{R}\times S^*X\times S^*X$

b) en tout point $\lambda\in W_\ell$, on a l'égalité

$$T_\lambda W_\ell = T_\lambda C \cap T_\lambda D_\ell \ .$$

Soit $W_\ell^+ = \coprod_{j=1}^{N} W_{\ell,j}$ la décomposition de W_ℓ^+ en composantes connexes, désignons par ν_j la dimension de $W_{\ell,j}$. On est alors en mesure d'énoncer le

Théorème 2 : Soit $\ell\in\mathcal{L}$ un point isolé, supposons l'hypothèse (H_ℓ) satisfaite, alors la distribution θS est une somme finie de distributions de Fourier sur $\mathbb{R}$ indexées par les composantes connexes de W_ℓ^+ :

$$\theta S = \sum_{j=1}^{N} T_{\ell,j}$$

où $T_{\ell,j}\in I^{\nu_j-1/4}(\mathbb{R}\,;T_\ell^*\mathbb{R})$.

§ 4. ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME II

Il s'agit de montrer que l'expression $e^{i\tau\ell}<\theta S,e^{-i\tau t}>$ admet un développement asymptotique selon les puissances de τ quand $\tau\to+\infty$ (et lorsque $\tau\to-\infty$), le terme principal de ces développements donnant l'expression du symbole sur $T_\ell^*\mathbb{R}$.

Tout revient donc à étudier le comportement de la transformation de Fourier de (θS) :

$$(5)\qquad I(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t}\,\theta(t)S(t)\,dt$$
$$= \iint_{\mathbb{R}\times X} e^{-i\tau t}\,\theta(t)E(t,x,x)\,dt\,dx\ ,$$

il suffit de considérer le cas $\tau \to +\infty$ car $I(-\tau) = \overline{I(\tau)}$.

La distribution de Fourier $\theta E \in I^{1/4}(\mathbb{R} \times X \times ; C')$ s'explicite sous la forme d'une somme finie (car θE est à support compact) de distributions E_α définies au moyen d'intégrales oscillantes :

$$\theta E = \sum_{\text{finie}} E_\alpha \quad . \tag{6}$$

De façon plus précise, E_α s'exprime par

$$E_\alpha(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi_\alpha(t,x,\eta) - iy.\eta} \, a_\alpha(t,x,\eta) \, d\!\!\!{}^-\eta$$

où φ_α est une phase définie sur un ouvert conique

$$Z_\alpha \subset \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^n \quad ,$$

a_α est un symbole à support conique à base compacte dans Z_α , $d\!\!\!{}^-\eta = (2\pi)^{-n} d\eta$.

La phase φ_α est définie comme fonction génératrice de la transformation canonique G^t au moyen du choix d'une carte d'un voisinage d'un point $y \in X$, autrement dit l'application suivante est une carte d'un ouvert C_α de C

$$(t,x,\eta) \in Z_\alpha \xrightarrow{T_\alpha} (t, \varphi'_{t\alpha} \; ; \; x, \varphi'_{x\alpha} \; ; \; \varphi'_{\eta\alpha}, \eta) \in C_\alpha \subset C \tag{7}$$

(on considère ici $\mathbf{C}$ comme une variété conique de $T^*\mathbb{R} \times T^*X \times T^*X$).

Quitte à raffiner le recouvrement C_α de C, on peut supposer que les ouverts C_α rencontrent au plus une composante connexe de W_ℓ^+ , indexons par j celles qui rencontrent $W_{\ell,j}$. Compte tenu de (5) et (6), il vient

$$I(\tau) \equiv \sum_{j=1}^{N} I_j(\tau) \quad \text{mod. un élément à décroissance rapide en } \tau.$$

où l'on a défini la contribution I_j de $W_{\ell,j}$ par

$$I_j(\tau) = \sum_{\substack{\alpha \\ C_{\alpha,j}}} I_{j,\alpha}(\tau)$$

et où le terme général $I_{j,\alpha}$ est donné par

(8) $$I_{j,\alpha}(\tau) = \iiint_{Z_\alpha} e^{i\varphi_\alpha(t,x,\eta) - ix.\eta - i\tau t} a_\alpha(t,x,\eta)\,dt\,dx\,d\eta \quad .$$

En remplaçant η par $\tau.\eta$ dans (8), il vient

(9) $$I_{j,\alpha}(\tau) = \tau^n \iiint_{Z_\alpha} e^{i\psi_\alpha(t,x,\eta)} a_\alpha(t,x,\tau\eta)\,dt\,dx\,d\eta$$

avec $\psi_\alpha(t,x,\eta) = \varphi_\alpha(t,x,\eta) - x.\eta - t$.

Le comportement asymptotique de (9) dépend des points critiques de la phase ψ_α, c'est à dire de l'ensemble

$$\{\text{points critiques de } \psi_\alpha\} = \{(t,x,\eta) \in Z_\alpha \mid \varphi'_{t\alpha} = 1,\ \varphi'_{x\alpha} = \eta,\ \varphi'_{\eta\alpha} = x\} \ ;$$

on remarque que l'image de cet ensemble V_α par la carte T_α est précisément $W_{\ell,j} \cap C_\alpha$, on retrouve ainsi le théorème 1. Grâce à l'hypothèse (H_ℓ), l'ensemble V_α est une sous variété connexe de Z_α , de plus on a le

<u>Lemme 1</u> : L'hypothèse (H_ℓ) signifie que la restriction ψ''_α/N_α du hessien ψ''_α au fibré normal $N_\alpha = TZ_\alpha/TV_\alpha$ à V_α est une forme quadratique <u>non dégénérée</u> ; on désigne respectivement par $\sigma_{j,\alpha}$ et $e_{j,\alpha}$ sa signature et son index.

(Le lemme 1 est démontré dans l'appendice).

On est alors en mesure d'appliquer le théorème de la phase stationnaire sous la forme donnée par Colin de Verdière dans [3] (ou dans l'exposé n^{o}XIV). Il vient pour (9)

$$I_{j,\alpha}(\tau) = e^{-i\tau\ell}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{(\nu_j-1)/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}(\tau)$$

où

$$p_{j,\alpha}(\tau) \sim \sum_{k\geq o} p^k_{j,\alpha}\,\tau^{-k} \qquad\qquad \tau \to +\infty$$

avec

$$p^o_{j,\alpha} = \int_{V_\alpha} a^o_\alpha(\ell,x,\eta)\,|\det \psi''_\sigma|N_\alpha|^{-1/2}\,dx\,d\eta \ .$$

Et en regroupant la contribution de $W_{\ell,j}$, il vient

(10) $$I_j(\tau) = e^{-i\tau\ell}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{(\nu_j-1)/2}\left[\sum_\alpha e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}}\,p_{j,\alpha}(\tau)\right]$$

Mais les termes qui interviennent dans le crochet de (10) ont le même argument, de façon plus précise on a la

<u>Proposition 1</u> : Il existe un $\sigma_j \in \mathbb{Z}$, tel que pour tout α

$$\arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}}\,p^o_{j,\alpha}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j}\right) ,$$

on dit que σ_j est l'<u>indice de la variété critique</u> $W_{\ell,j}$.

La proposition 1 découle des deux lemmes suivants.

<u>Lemme 2</u> : On a

$$\arg p^o_{j,\alpha} = \arg a^o_\alpha(t,x,\eta)|_{V_\alpha} \equiv 0 \qquad \mod \frac{\pi}{2} \ .$$

En effet, P étant auto-adjoint, le symbole a de la distribution de Fourier E vérifie l'équation de transport (cf.[4]

$$\mathcal{L}_{H_{\tilde{q}}}\,.\,a = 0 \qquad\qquad \text{où} \quad q = p(x,\xi) - \tau^2 \ .$$

De plus, la restriction de a à $t = 0$ est égale à 1 car $E|_{t=o}$ = Identité, alors la définition du fibré de Maslov entraîne que a_α a pour argument un multiple de $\frac{\pi}{2}$ et par conséquent cet argument reste constant sur l'ensemble connexe V_α.

En calculant la contribution d'une même partie de $W_{\ell,j}$ dans deux cartes C_α et C_β qui se coupent, on établit le

<u>Lemme 3</u> : On a

$$\arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p^o_{j,\alpha}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\beta}} p^o_{j,\beta}\right).$$

La proposition 1 permet de sommer la partie entre crochets de (10) :

$$\sum_\alpha e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} p_j(\tau)$$

avec $p_j(\tau) \sim \sum_{k\geq 0} p^k_j \tau^{-k}$ et <u>$p^o_j > 0$</u>, car

$$p^o_j = \sum_\alpha \int_{V_\alpha} \left|a^o_\alpha(\ell,x,\eta)\right| \left|\det \psi''_\alpha|_{N_\alpha}\right|^{-\frac{1}{2}} dx\, d\eta .$$

On obtient finalement

$$(11) \qquad e^{-i\tau\ell} I_j(\tau) \sim \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\nu_j - 1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} p^o_j \qquad \tau \to +\infty$$

il existe donc des distributions de Fourier $T_{\ell,j}$, à support dans un voisinage de ℓ, telles que

$$(12) \qquad T_{\ell,j} \in I^{\nu_j - 1/4}(\mathbb{R}\, ;\, T^*_\ell\mathbb{R})$$

et

$$\theta S = \sum_{j=1}^{N} T_{\ell,j}$$

le symbole principal de $T_{\ell,j}$ est défini par (11).

Par partition de l'unité, il vient immédiatement le

<u>Corollaire 1</u> : On suppose que $\mathcal{L}$ est discret et que (H_ℓ) est satisfaite pour tout ℓ, alors on a la "formule de Poisson"

$$S = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} T_\ell$$

où la somme est localement finie, et $T_\ell \equiv \sum_{j=1}^{N} T_{\ell,j}$ mod. C^∞ avec $T_{\ell,j}$ vérifiant (11) et (12).

APPENDICE

Démonstration du lemme 1 : Etudions l'intersection $W_\ell = C \cap D_\ell$ dans la carte T_α. Dans ces coordonnées, les espaces tangents, en un point $\lambda \in W_\ell$, se représentent par (on omet l'indice α pour alléger)

$$T_\lambda C = \{(\delta t, \varphi''_{tt}\,\delta t + \varphi''_{tx}\,\delta x + \varphi''_{t\eta}\,\delta\eta\ ;\ \delta x, \varphi''_{xx}\,\delta x + \varphi''_{x\eta}\,\delta\eta\ ;\ \varphi''_{\eta x}\,\delta x + \varphi''_{\eta\eta}\,\delta\eta, \delta\eta)\}$$

$$T_\lambda D = \{(0, \qquad 0\ ;\ \delta x\ ,\ \delta\eta\ ;\ \delta x\ ,\ \delta\eta)\}$$

d'où l'intersection

$$(A_1) \qquad T_\lambda C \cap T_\lambda D \xrightarrow{\text{bijection}} \{(\delta x, \delta\eta) \mid A.\binom{\delta x}{\delta\eta} = 0 \text{ et } \varphi''_{tx}\,\delta x + \varphi''_{t\eta}\,\delta\eta = 0\}$$

en posant

$$A = \begin{pmatrix} \varphi''_{xx} & , & \varphi''_{x\eta} - I \\ \varphi''_{\eta x} - I & , & \varphi''_{\eta\eta} \end{pmatrix}$$

D'autre part, W_ℓ correspond par T_α à l'ensemble V_α de points $(t,x,\eta) \in Z_\alpha$ tels que $\psi'_\alpha(t,x,\eta) = 0$ et $t = \ell$. De sorte que

$$(A_2) \qquad T_\lambda W_\ell \subset \{\delta t, \delta x, \delta\eta) \mid \psi''.\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta x \\ \delta\eta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \delta t = 0\}$$

avec

$$\psi'' = \begin{pmatrix} \varphi''_{tt} & \varphi''_{tx} & \varphi''_{t\eta} \\ \varphi''_{tx} & & \\ \varphi''_{t\eta} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}} \end{pmatrix}$$

De (A_1) et (A_2) on tire l'équivalence suivante

$$(T_\lambda W_\ell = T_\lambda C \cap T_\lambda D_\ell) \Leftrightarrow (T_\lambda W_\ell = \{\mathrm{Ker}\ \psi'') \cap (\delta t = 0)\})$$

or cette dernière égalité signifie précisément que ψ'' est non dégénérée sur l'espace normal N_α, ce qui démontre le lemme 1.

Terminons cet exposé par quelques remarques.

<u>Remarque 1</u> : L'expression $S \equiv j_* i^* E$ permet d'interpréter le théorème II, comme un théorème de stabilité des distributions de Fourier vis à vis des opérations image directe-image réciproque, mais il reste à interpréter géométriquement les symboles principaux.

<u>Remarque 2</u> : Si P est un opérateur elliptique quelconque de degré m, on a un résultat analogue en considérant l'opérateur pseudo-différentiel $(P^*P)^{1/m}$.

<u>Remarque 3</u> : Si en un point $\ell \in \mathcal{L}$ les distributions $T_{\ell,j}$ ne se neutralisent pas dans la somme $T_\ell = \sum_j T_{\ell,j}$, on peut alors affirmer que ℓ est effectivement un point singulier de S ; génériquement on a l'égalité supp.sing.$S = \mathcal{L}$.

<u>Note</u> : Au moment où nous annoncions ces résulats [1], Duistermaat et Guillemin annonçaient des résultats analogues au colloque de Stanford en Août 1973 [5]. Plus exactement ces auteurs ont étudié les deux cas particuliers extrèmes suivants :

- celui où tous les ν_j sont égaux à 1, qui correspond au cas où les géodésiques périodiques sont isolées.
- celui où $\nu_j = 2n-1$, qui correspond au cas où toutes les géodésiques sont de période ℓ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Chazarain : Spectre d'un opérateur elliptique et bicaractéristique périodiques, Comptes Rendus 277, p 595-597 (1973).

[2] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes (à paraître dans Inventiones Math).

[3] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II. Compositio Math. 27 Fasc. 3 (1973) et exposé n^o XIV .

[4] J. J. Duistermaat : Fourier integral operators, Lectures Notes Courant Institute, New York (1973).

[5] J. J. Duistermaat et V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, proceed. Symp. differential geometry Stanford (Août 1973) à paraître.

[6] L. Hörmander : Fourier Integral operators I, Acta Math. 121 p.79-183 (1971).

[7] A. Weinstein : Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems, Ann. of Math. 93 p.377-410 (1973).