Y. COLIN DE VERDIÈRE

Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 14, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A13_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

SPECTRE DU LAPLACIEN ET LONGEURS DES GEODESIQUES FERMEES

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé N° XIV

30 Janvier 1974

§ 0. INTRODUCTION

Nous exposons ici les idées essentielles de l'article [1] auquel on pourra se reporter pour les détails techniques, et nous esquissons dans le dernier paragraphe une application qui ne se trouve pas dans [1].

Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^d$ et Γ^* son dual, la formule de Poisson classique donne

(1) $$\forall t \in \mathbb{R}_*^+ , \sum_{\omega\in\Gamma^*} \exp(-4\pi^2\|\omega\|^2 t) = (4\pi t)^{-d/2}\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d/\Gamma)\sum_{\gamma\in\Gamma}\exp(-\|\gamma\|^2/4t).$$

On peut interpréter cette relation en introduisant la variété riemannienne plate $M = \mathbb{R}^d/\Gamma$

i) $\{4\pi^2\|\omega\|^2 \mid \omega \in \Gamma^*\}$ est le spectre du laplacien Δ opérant sur $C^\infty(M;\mathbb{R})$ (les fonctions propres associées étant $\exp(2\pi i\omega)$)

ii) $\{\|\gamma\| \mid \gamma \in \Gamma\}$ est l'ensemble des longueurs de géodésiques fermées de M (obtenu par projection de $t \mapsto x_0 + t\gamma$).

On déduit notamment : si deux tores plats ont même spectre du laplacien, ils ont même longueurs des géodésiques périodiques.

On veut essayer de généraliser la formule (1) et sa conséquence à une variété riemannienne M, C^∞ compacte et sans bord ; notamment dans le but de voir quelle information géométrique est contenue dans le spectre du laplacien .

Il existe un développement asymptotique (dû à Minakshisundaram et Pleijel, cf.[2]) de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)$ ($\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \cdots$ étant les valeurs propres de Δ répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité) quand $t \to 0^+$, $\sum \exp(-\lambda_n t) \sim (4\pi t)^{-d/2}(a_0 + a_1 t + \ldots)$ (d = dimension de M), mais les termes $\exp(-\|\gamma\|^2/4t)$ ($\|\gamma\| > 0$) de la formule (1) n'y figurent pas à cause de leur décroissance exponentielle, on est donc amené à regarder ce qui se passe pour des valeurs complexes de t, de façon à avoir au lieu de termes très petits des termes oscillants, plus précisément on pose $t = (\xi_0 + i\eta)^{-1}$ ($\xi_0 > 0$ fixé) et on étudie ce qui se passe quand $\eta \to \infty$

($t \to 0$ le long d'un cercle tangent en 0 à l'axe imaginaire).

§ 2. CALCUL DU NOYAU DE L'EQUATION DE LA CHALEUR (cf. [2])

Définition : On appelle noyau de l'équation de la chaleur la fonction $e(t,x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$ telle que :

$$\forall f \in C^\infty(M), \qquad u(t,x) = \int_M e(t,x,y)\, f(y)\,dy$$

(dy = élément de volume riemannien de M) soit solution de l'équation de la chaleur sur M avec donnée initiale f, c.à.d. $u = \exp(-t\Delta).f$ vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 \quad \text{pour } t > 0 \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0^+} u(.,t) = f \,. \end{cases}$$

On peut calculer e de deux façons différentes :

i) En utilisant une décomposition spectrale de Δ (i.e. on considère une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de Δ associées aux valeurs propres λ_n telle que les $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système othonormé complet de $L^2(M,dx)$) on voit que :

$$(2) \qquad e(t,x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)\,.\,\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)\,.$$

ii) On peut construire une "parametrix" $P(t,x,y)$ de l'équation de la chaleur : si ρ est le rayon d'injectivité de M (i.e. $\forall x \in M$, $\exp_x : \{\xi \in T_xM \mid \|\xi\| < \rho\} \to \{y \in M \mid \overline{xy} < \rho\}$ (où $\overline{xy}$ est la distance riemannienne de x à y, est un difféomorphisme), on cherche P sous la forme (par analogie avec ce qui se passe dans $\mathbb{R}^d$)

$$P(t,x,y) = (4\pi t)^{-d/2}\,.\,\exp(-\overline{xy}^2/4t)\,.\,\Big(\sum_{i=0}^{k} U_i(x,y)\,t^i\Big)$$

où les U_i sont C^∞ à support compact et $\operatorname{supp} U_i \subset \{\overline{xy} \le \rho_1 < \rho\}$ (k est ici fixé à $2d+1$).

Posant $L(t,x,y) = (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_y)P(t,x,y)$, on choisit les U_i de façon que :

$$L(t,x,y) = (4\pi t)^{-d/2} . \exp(-\overline{xy}^2/4t) . (\sum_{i=-1}^{k} V_i(x,y)\, t^i)$$

où les V_i sont C^∞ et vérifient : $i \leq k-1$, $\operatorname{supp}(V_i) \subset \{\overline{xy} \in [\rho_o, \rho_1]\}$ $(\rho_o > 0)$ et supp $(V_k) \subset \{\overline{xy} \leq \rho_1\}$.

On peut alors calculer e de la façon suivante : dans $X = \mathbb{R} \times M$ considérons les opérateurs $\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ et, si $Q \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times M \times M)$, $\hat{Q} : \mathcal{D}(X) \to C^\infty(X)$ défini par $\hat{Q}f(t,x) = \int_o^t du \int_M Q(t-u,x,\alpha)\, f(u,\alpha)\, d\alpha$. Si j est l'injection de $\mathcal{D}(X) \to C^\infty(X)$, on a :

$$\mathcal{H} \circ \hat{e} = j, \; , \; \hat{P} \circ \mathcal{H} = j + \hat{L}$$

et donc $\hat{P} = (Id + \hat{L}) \circ \hat{e}$, on en déduit $\hat{e} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \hat{L}^n \hat{P}$ (série qui converge grâce au choix de P). Pour deux noyaux A et B posons :

$$A * B(t,x,y) = \int_o^t du \int_M A(t-u,x,\alpha) B(u,\alpha,y)\, d\alpha$$

on a $\widehat{A * B} = \hat{A} \circ \hat{B}$. On en déduit finalement :

$$e(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{*n} * P .$$

Introduisant $X_n = \{(u_o, \dots, u_n) \mid u_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{n} u_i = 1\}$ on peut écrire encore cette somme :

$$(3) \qquad e(t,x_o,x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{M^n \times X_n} \exp(-\frac{1}{4t} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}) . P_n(\tfrac{1}{t}; u_i; x_i)$$

où $P_n(\frac{1}{t}; u_i; x_i) = \sum_{\ell=\ell_o}^{(n+1)d} p_{n,\ell}(u_i,x_i)\, t^{\ell/2}$ et

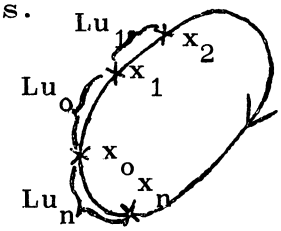
$$\operatorname{supp} p_{n,\ell} \subset \{(u_i,x_i) \mid \forall i, \overline{x_i x_{i+1}} \leq \rho_1\}.$$

Comparant (2) et (3) et intégrant e(t,x,x) sur M, il vient :

$$(4) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n/t) = \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{M_o^{n+1}\times X_n} \exp\Big(-\frac{t}{4}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{\overline{x_ix_{i+1}}^2}{u_i}\Big).P_n(t,u_i,x_o,\dots,x_n,x_o)$$

avec ici $x_{n+1} = x_o$, $M_o^{n+1} = \{(x_o,\dots,x_n) \mid \overline{x_ix_{i+1}} \le \rho_1\}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que (4) est encore vraie pour t complexe à partie réelle > 0. Les intégrales du second membre sont donc des intégrales oscillantes ($t = \xi_o + i\eta$, $\eta \to \infty$) que l'on peut essayer d'évaluer par la méthode de la phase stationnaire. Regardant les points critiques de la phase, on voit facilement que ce sont les suites $(u_i,x_i) \in X_n \times M_o^{n+1}$ telle que $\overline{x_ix_{i+1}} = Lu_i$ et les x_i sont situés sur une même géodésique fermée γ (g.f. en abrégé) de longueur L. Un tel point critique ne peut pas être isolé, car il faut tenir compte d'une action de SO(2) et du fait que pour γ donnée, il existe beaucoup de choix des u_i. On est donc amené à étudier les hypothèses de non dégénérescence pour des variétés critiques.



§ 3. VARIETES CRITIQUES NON DEGENEREES ET GEODESIQUES FERMEES

X étant une variété hilbertienne réelle C^∞ (éventuellement de dimension ∞) et $E : X \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, une sous-variété connexe W de X sera dite variété critique non dégénérée de E si tout point x de W est un point critique de E et que la restriction de $\mathrm{Hess}_x E$ à l'espace normal N_x en x à W est non dégénérée, i.e. $\exists$ A automorphisme symétrique de N_x tel que $\mathrm{Hess}_x E(V,W) = \langle AV,W\rangle_x$ pour tous v et $w \in N_x$.

La nullité de W est sa dimension ($\le \infty$).

L'indice de W est le nombre de valeurs propres < 0 de A ($\le\infty$).

On applique ceci à $X = \Omega(M) = \{\gamma : S^1 \to M \mid \gamma$ de classe $H^1\}$ et $E : \gamma \to \int_{S^1} \|\dot\gamma\|^2$ (l'énergie). Les points critiques de E sont alors les géodésiques fermées de M que l'on peut identifier à l'ensemble des applications périodiques de période 1 de $\mathbb{R} \to M$ qui sont des géodésiques.

On dira que M vérifie (ND) si les points critiques de E se trouvent tous dans des variétés critiques non dégénérées. La nullité et l'indice d'une g.f. sont alors la nullité -1 et l'indice de la variété critique correspondante.

Remarque 1 : La nullité est ≥ 0 à cause de l'action de SO(2). Elle est nulle quand les g.f. sont isolées. Elle est $\leq 2d-2$.

L'indice est l'indice de Morse pour les g.f. Il est toujours $< +\infty$.

Remarque 2 : Abraham a montré que sur une variété compacte, la propriété (ND) avec nullité 0 est générique (i.e. vérifiée pour presque toutes les métriques riemanniennes).

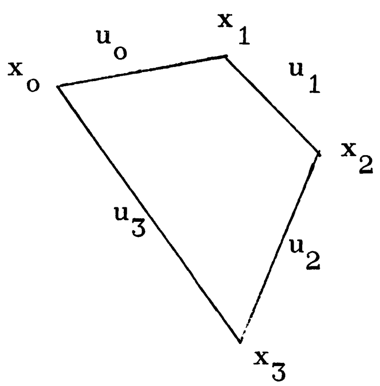
Exemples : 1) Les tores $\mathbb{R}^d/\Gamma$ plats. Les indices sont 0, les nullités $d-1$.

2) Les sphères S^d munies de leur métrique usuelle. Les géodésiques sont toutes fermées. La nullité est $2(d-1)$ et l'indice pour la $n^{\text{ième}}$ itérée $(2n-1)(d-1)$.

3) Variétés à courbure sectionnelle $\sigma < 0$ (il existe de telles métriques sur les tores de dimension 2 à p trous ($p \geq 2$)). Les géodésiques fermées sont obtenues en prenant le minimum de l'énergie dans une classe d'homotopie libre. Les indices sont 0 et les nullités aussi.

4) Il faut aussi mentionner dans les exemples précédents la variété critique $E = 0$ qui correspond aux lacets constants dont la nullité est $d-1$ et l'indice 0.

Proposition : Soit $J : M_o^{n+1} \times X_n \to \Omega(M)$ défini par $J(u_i, x_i)$ = le lacet γ géodésique par morceaux tel que $\gamma(u_o + \ldots + u_{i-1}) = x_i$.



Si M vérifie (ND) les points critiques de $E\circ J = \sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}$ sont situés dans des variétés critiques non dégénérées dont les images par J sont les variétés critiques de E d'énergie $< ((n+1)\rho_1)^2$ si $J(W_o) = W$, on a: $\mathrm{ind}(W_o) = \mathrm{ind}(W)$, nullité (W_o) = nullité $(W) + n$.

Cette proposition s'inspire de l'étude faite par Milnor de l'approximation de dimension finie de l'espace des géodésiques joignant a à b ([3]).

§ 4. ENONCE DES RESULTATS

Si on fait l'hypothèse (ND) sur M et qu'on applique la méthode de la phase stationnaire dans (4), on trouve formellement :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n/z) \underset{\substack{z=\xi_o+i\eta \\ \eta\to+\infty}}{\sim} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{(n\rho_o)^2<E(W_o)<((n+1)\rho_1)^2} \exp(-\tfrac{z}{4}E(W_o)).i^{j(W_o)} z^{\frac{n(W_o)+1}{2}} Q^n_{W_o}(z)$$

où la somme est faite sur les variétés critiques W de $E\circ J$ dans $X_n \times M_o^{n+1}$.

Regroupant les termes suivant leurs images par J, on a :

$$(5)\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n/z) \sim \sum_{W} \exp(-\tfrac{z}{4}E(W)).i^{j(W)}.z^{\frac{n(W)+1}{2}}.P_W(z)\ .$$

où la somme porte sur toute les variétés critiques de E et où $P_W(z) = a_o^W + a_1^W z^{-1} + \ldots$ avec $a_o^W > 0$.

La difficulté principale est d'attribuer un sens raisonnable à ce développement asymptotique de façon à ce qu'il y ait unicité du développement. Ayant à faire une somme de termes oscillants une transformation de Fourier est naturelle, nous le faisons au sens des distributions en utilisant la fonction test $h(\eta,\sigma) = \exp(-\sigma(\eta - \frac{1}{\sigma})^2)$. Pour une fonction F(z) nous posons :

$$\hat{F}(\sigma,t) = \int_{\mathbb{R}} F(\xi_o+i\eta)\, e^{it\eta}.h(\eta,\sigma)\, d\eta\ .$$

et nous donnons la définition suivante : on écrira :

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)\exp(-zt_n) \quad (\mathcal{F})$$

où t_n est une suite strictement croissante de réels si :

i) $\forall\, t \notin \{t_n\}$, $\hat{F}(\sigma,t) = 0(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\hat{F}(\sigma,t_n) = \exp(-\xi_o t_n)\,.\,\hat{f}_n(\sigma,0) + 0(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$

Il y a alors unicité d'un tel développement si les f_n sont du type donné par la méthode de la phase stationnaire.

Théorème : Si M vérifie (ND) le développement (5) a lieu au sens $(\mathcal{F})$. Posons $Z(z) = \sum \exp(-\lambda_n/z)$, même si M ne vérifie pas (ND), on a $(\hat{Z}(\sigma,t_n) \notin 0(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})) \Rightarrow (\sqrt{4t_n}$ est la longueur d'une g.f de M).

Corollaire : Supposons que M vérifie (ND) et supposons que les variétés critiques soient d'énergie deux à deux distinctes (sauf peut être des couples de variétés correspondants au changement de l'orientation des g.f.), c'est encore une propriété générique et le spectre du laplacien de M, détermine les longueurs des g.f. leur indice (mod.4) et leurs nullités.

Dans le cas général le théorème donne seulement une borne inférieure pour l'ensemble des longueurs de g.f.

§ 5. SCHEMA DE LA DEMONSTRATION

Posant $Z(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n/z)$, on voit que :

$$\hat{Z}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M_o^{n+1}\times X_n\times\mathbb{R}} \exp\left(i\eta\left(t-\frac{E\circ J(U,x_i)}{4}\right)-\sigma\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right)$$
$$\exp\left(-\frac{\xi_o}{4}E\circ J\right).P_n(\xi_o+i\eta,U,x_i)\,.$$

Soient P_n^+ (resp. P_n^-) les parties de P_n correspondant à des degrés ≥ 0 (resp < 0) en z , on décompose $\hat{Z}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (I_n^+(\sigma,t) + I_n^-(\sigma,t))$.

i) On montre pour des majorations des $\widehat{(z^{\ell})}(\sigma,t)$ pour $\ell < 0$, que $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n^-(\sigma,t)| = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$.

ii) t étant fixé, il existe n_o tel que, $\forall n \geq n_o$, dans $\mathrm{Supp}(P_n^+)$ on ait $E(U,x_i) \geq 4(t+1)$ on obtient alors $\sum_{n=n_o}^{\infty} |I_n^+(\sigma,t)| = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$.

iii) On a alors $\hat{Z}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{n_o} \hat{J}_n(\sigma,t) + O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ avec

$$J_n(z) = \int_{M_o^{n+1} \times X_n} \exp(-\frac{z_o+i\eta}{4} E(U,x_i)).P_n^+(z,U,x_i) \ .$$

On essaie d'évaluer directement $J_n(z)$ par la méthode de la phase stationnaire, mais il y a une difficulté car P_n^+ n'est pas régulière quand $u_n \to 0$ (on a des termes du type $\exp(-\frac{\xi_o+i\eta}{4} \cdot \frac{\overline{x_n x_o}^2}{u_n}) . \frac{U_i(x_n,x_o)}{u_n^{d/2-i}}$. On choisit la parametrix P (i.e. ρ_o et ρ_1) telles que pour $n \leq n_o$ les variétés critiques de $E \circ J$ correspondant à la valeur critique 4t soient dans $u_n \geq \alpha > 0$. On découpe l'intégrale $J_n(z)$ en 3 morceaux grâce à des partitions de l'unité

$$J_n(z) = \int_{|E\circ J - 4t| \geq \beta} + \int_{\substack{|E\circ J - 4t| \leq 2\beta \\ u_n \geq \alpha}} + \int_{\substack{|E\circ J - 4t| \leq 2\beta \\ u_n \leq 2\alpha}}$$

β étant choisi pour que $E\circ J$ n'ait pas d'autre valeur critique que 4t dans $[4t-\beta, 4t+\beta]$. On montre que la 1ère et la 3ème intégrale donnent des termes en $O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ et on applique la méthode de la phase stationnaire à la seconde intégrale :

<u>Enoncé du théorème de phase stationnaire pour des variétés critiques non dégénérées</u>.

X <u>est une variété riemannienne</u> C^{∞} <u>de dimension</u> N, $f \in C^{\infty}(X,\mathbb{R})$ <u>admettant une variété critique</u> W <u>de nullité n et d'indice j non dégénérée unique</u> et $g \in \mathcal{D}(X)$, on a

$$\int_X \exp(-(\xi_o+i\eta).f) . g \sim (\frac{2\pi}{\xi_o+i\eta})^{\frac{N-n}{2}} i^j \exp(-(\xi_o+i\eta) f(W)) \times (a_o + a_1 z^{-1} + \dots)$$

quand $z = \xi_o + i\eta$, $\eta \to \infty$; $a_o = \int_W g.|\det \mathrm{Hess}_\perp f|^{-V_2}$ où $\mathrm{Hess}_\perp f$ est la restriction de Hess f au fibré normal à W.

La démonstration se fait en x ramenant à la méthode de phase stationnaire usuelle à l'aide de la réduction de Morse pour les variétés critiques non dégénérées;on peuttrouver des coordonnées locales telles que f s'écrive :

$$f(x_1,\dots,x_N) = -x_1^2 - \dots - x_j^2 + x_j^2 + \dots + x_{N-n}^2$$

§ 6. CONSEQUENCE : PROPRIETES GEOMETRIQUES DETERMINEES PAR LE SPECTRE DU LAPLACIEN

1) Génériquement, le spectre du laplacien d'une variété riemannienne compacte détermine les longueurs des géodésiques périodiques, leurs indices et leurs nullités.

2) En particulier si M vérifie (ND) et qu'il existe une longueur L de géodésique fermée telle que le terme correspondant dans le développement asymptotique soit en $z^{d-1/2}$ toutes les géodésiques de longueur L de la variété sont fermées. (Comme par exemple sur la sphère S^2 munie de la métrique canonique).

3) Le développement asymptotique permet parfois de lire des propriétés topologiques de M, par exemple on a une majoration du nombre de géodésiques périodiques d'indice 0, donc du nombre de classes de conjugaison du groupe $\pi_1(M)$.

4) En utilisant le laplacien Δ_k opérant sur les formes différentielles extérieures de degré k, si on suppose que les géodésiques fermées sont de nullité 1 et de longueurs deux à deux distinctes, on peut montrer que la connaissance des $(Sp(\Delta_k))_{0\leq k\leq d}$ détermine le transport parallèle le long d'une géodésique fermée (c'est pour chaque $m \in \gamma$ g.f. une isométrie de T_mM) et notamment quelles sont les g.f. qui sont des chemins de désorientation.

§ 7. GENERALISATIONS DIVERSES

On peut généraliser ces résultats au cas d'un opérateur elliptique à coefficients C^∞ sur une variété compacte, mais l'étude alors est facilitée par l'usage des opérateurs Fourier Intégraux étudiés par Hörmander : une telle extension a été faite indépendamment par Chazarain et par Duistermaat et Guillemin. Chazarain doit en parler dans un prochain exposé.

Nous indiquons ici quelques généralisations que nous avons étudiées en utilisant la même méthode:

- On peut étudier le cas d'opérateurs géométriques du type laplacien opérant sur les sections d'un fibré vectoriel (par exemple sur les formes différentielles extérieures).
- On peut en partant de l'expression de e(t,x,y) trouver un développement asymptotique ($\mathcal{F}$) où interviennent les géodésiques joignant x à y.
- On va parler ici d'une autre généralisation qui permet d'aborder le cas de variétés à bord X d'un type particulier : celle qui sont obtenues comme quotient d'une variété sans bord M par une involution σ ayant pour points fixes une sous variété X de dimension $d-1$ (le bord de X).

Pour cela on considère la situation suivante : si T est une isométrie d'une variété riemannienne, T opère sur les espaces propres E_λ de manière évidente, soit t_λ la trace de $T_{|E_\lambda}$ et cherchons un développement asymptotique de

$$\sum_{\lambda \text{ val. propre de } \Delta} t_\lambda \exp(-t\lambda) = \int_M e(\tfrac{1}{z}\, x, Tx).$$

On obtient une somme d'intégrales :

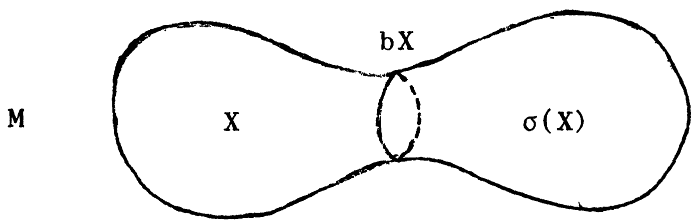
$$I_{n,T}(z) = \int_{M_o^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\Big(-\frac{z}{4}\Big) \cdot \frac{\overline{x_o x_1}^2}{u_o} + \dots + \frac{\overline{x_n Tx_o}^2}{u_n}\Big) P_n(z, u_i, x_o, x_1, \dots, Tx_o).$$

La recherche des points critiques de la phase fait apparaître les géodésiques de M qui sont translatées par T d'une longueur L, L^2 étant la valeur critique correspondante.

On peut alors introduire des hypothèses de non dégénérescence à l'aide de l'espace $\Omega(T;M) = \{\gamma \in H^1(S^1,M) | \gamma(1) = T.\gamma(0)\}$ et de la fonction $E_T : \Omega(T;M) \to \mathbb{R}$, $E_T(\gamma) = \int_{S^1} \|\dot{\gamma}\|^2$.

La valeur critique L = 0 admet pour variété critique (non dégénérée cf [4]) l'ensemble des points fixes de T et le terme $f_o(z)$ du développement asymptotique est en $z^{h/2}.a_o$ où h est la dimension de la variété des points fixes et $a_o > 0$ l'existence du d.a. se fait de la même manière que pour le d.a. de $\sum e^{-\lambda_n t}$ qui correspond à T = Id.

On considère maintenant une variété à bord du type décrit plus haut (il suffit par exemple qu'X soit telle que bX ait un voisinage dans X isométrique à $[0,\varepsilon[\times bX$ ($\varepsilon > 0$), il est nécessaire, mais non suffisant que bX soit totalement géodésique).



On s'intéresse alors au problème de Neumann (ou de Dirichlet dans X), les noyaux de l'équation de la chaleur $e^{\pm}$ s'exprime facilement à partir de celui e de M

$$e_{\pm}(t,x,y) = e(t,x,y) \pm e(t,x,\sigma y)$$

On a donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n^{\pm} t) = \frac{1}{2} \int_M \{e(t,x,x) \pm e(t,x,\sigma x)\}$$

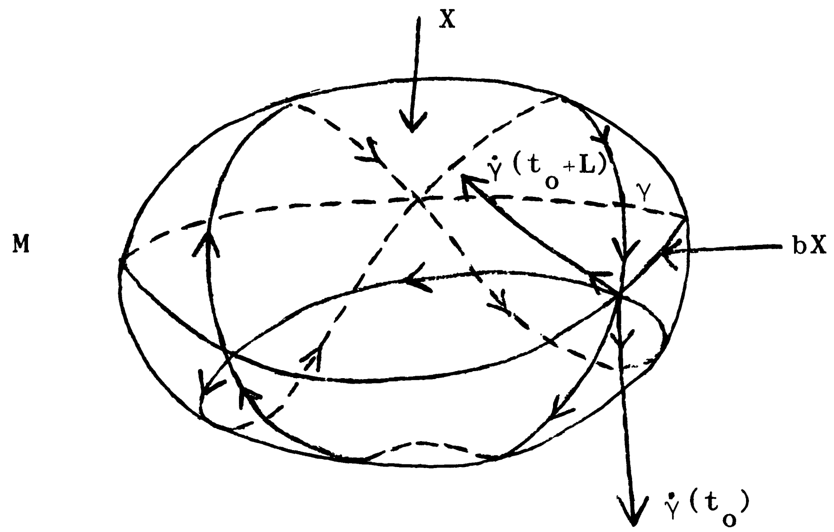
σ étant une isométrie on peut utiliser ce qui précède pour obtenir le développement asymptotique.

a) la valeur critique 0 donne lieu d'une part à une intégrale sur M en $z^{d/2}$, d'autre part une intégrale sur bX en $z^{(d-1)/2}$.

b) A une géodésique périodique γ de M que l'on obtient dans le développement asymptotique de la première intégrale, on peut associer une trajectoire fermée sur X obtenue en prenant $(\gamma \cap X) \cup \sigma(\gamma \cap \sigma X)$, c'est une trajectoire fermée pour le billard X à bord bX (réfléchir des géodésiques sur le bord).

c) Une géodésique γ de M translatée de L par σ est telle que si $\gamma(t_o) \in bX$ on a $\gamma(t_o + L) = \gamma(t_o)$, les vecteurs tangents étant symétriques par rapport à bX. On peut donc aussi lui associer une trajectoire de billard fermée sur X.

Les trajectoires obtenues en b) est un nombre pair de sommets, celle obtenue en c) un nombre impair. On obtient de cette manière toutes les trajectoires de billard fermées possibles.



BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II. A paraître dans Compositio Mathematica 27, Fasc. 3, 1973.

[2] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet : Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194.

[3] J. Milnor : Morse theory.

[4] K. Grove : Preprint à paraître J. Diff. Geometry, vol.8, 1973.