Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

K. Zizi

Théorie spectrale de certains opérateurs de Schrödinger avec potentiel coulombien

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 12, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A11_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

THEORIE SPECTRALE DE CERTAINS OPERATEURS DE SCHRÖDINGER AVEC POTENTIEL COULOMBIEN

par K. ZIZI

Exposé n° XII   16 Janvier 1974

Dans cet exposé, nous voulons illustrer la théorie de la diffusion dans un problème extérieur pour l'opérateur de Schrödinger avec des potentiels asymptotiquement coulombien. Nous nous plaçons d'abord dans $\mathbb{R}^n$, où nous obtenons une généralisation de deux théorèmes.

Théorème 1 : (extension d'un résultat de Rellich-Kato-Agmon)
Soit $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\Omega \supset \{x \in \mathbb{R}^n |x| \geq R_o \qquad 0 \leq R_o < +\infty\}$$

Si u satisfait : $\Delta u + (k^2 + (q(x) - p(x))u = 0$ dans Ω $k > 0$ où :

1) q est une fonction réelle continue dans $|x| \geq R_o$, possédant une dérivée, par rapport à $|x| = r$, continue telle que :

(i) $\lim\limits_{r\to\infty} 4q^*(r) < k^2$

(ii) $\lim\limits_{r\to\infty} r(q'(r))^* < k^2$

(iii) $\int_{R_o}^{+\infty} (q')^*(r)\,dr < +\infty$

2) p est une fonction mesurable à valeurs complexes satisfaisant

(i) $\lim\limits_{r\to\infty} r\,p^*(r) < \frac{k}{2}$

(ii) $\int_{R_o}^{+\infty} p^*(r)\,dr < +\infty$

Alors, si u n'est pas identiquement nulle au voisinage de l'infini

3) $\liminf\limits_{R\to\infty} \int_{R<|x|<R+b} |u(x)|^2 dx > 0 \qquad \forall\, b > 0$ fixé.

Remarques :

a) A propos des notations :

i) par $h^*(r)$ nous entendons : $h^*(r) = \sup\limits_{|x|=r} |h(x)|$

ii) par u non identiquement nulle au voisinage de l'infini nous entendons : $\forall\, R > 0\ \exists\, A \subset \mathbb{R}^n$ A de mesure de Lebesgue strictement positive :

$$|u(x)| > 0 \quad \forall\, x \in A.$$

b) i) le cas $p = q = 0$ a été démontré par Rellich dans [1]

ii) lorsque $p \neq 0$, $q \equiv 0$, ce résultat a été obtenu par Kato dans [2]

iii) sous des hypothèses voisines de celles du théorème, Agmon a prouvé dans [3] :

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{R_o<|x|\leq R} |u(x)|^2 dx > 0 \tag{4}$$

relation plus faible que (3). Avec (4) on peut déjà conclure à l'absence de valeurs propres positives, mais on ne peut rien conclure sur le spectre continu singulier. Nous verrons plus loin comment éliminer ce spectre continu singulier grâce à (3).

c) Les conditions (1) et (2) du théorème sont énoncées pour un k fixé. En fait, $0 < k < +\infty$, les hypothèses sont équivalentes à

i) $\lim\limits_{r\to\infty} q^*(r) = \lim\limits_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)^* = \lim\limits_{r\to\infty} r\, p^*(r) = 0$

ii) $\int_{R_o}^{+\infty} \left[p^*(r) + r\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)^*\right] dr < +\infty$

La démonstration de ce théorème est une adaptation à notre cas ($q \neq 0$) de celle introduite par Kato dans [2]. Posons :

$$u(r) = u(r,\xi) = r^{-\frac{n-1}{2}}\, v(r,\xi)$$

$$v_m(r) = v_m(r,\xi) = r^m.v(r,\xi) = r^m v(r) \ ;$$

$$F(m,t,r) = \|v'_m(r)\|^2 + \|v_m(r)\|^2\left[k^2 - \frac{2kt}{r} + \frac{m(m+1)}{r^2}\right] + (Q(r)v_m(r)\,|\,v_m(r)) - \frac{1}{r^2}(Av_m\,|\,v_m)$$

où $v_m(r) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow L^2(S_{n-1})$

$$\|v_m(r)\|^2 = \int_{S^{n-1}} |v_m(r,\xi)|^2 d\omega(\xi)$$

$$v'_m(r) = \frac{d}{dr} v_m(r) = \frac{\partial}{\partial r} v_m(r,\xi) \; ; \quad Qv_m(r) = q(r\xi) v_m(r,\xi).$$

A est l'opérateur de Laplace Beltrami sur S_{n-1}, c'est-à-dire la partie angulaire du laplacien, lorsque celui-ci est exprimé en coordonnées sphériques (r,ξ).

Nous dégageons les lemmes suivants :

Lemme 1 : $\exists\, R_1 \geq R_o \quad \exists\, m_1 \geq 0 : 0 < t_o < \frac{kR_1}{r} \Rightarrow \frac{d}{dr} F(m,t,r) \geq 0,$

$\forall m \geq m_1 \geq 0 \quad \forall\, r \geq R_1$.

Lemme 2 : $\exists\, m_o \geq 0 \quad \exists R_2 \geq R_1 \; : \; F(m_o, t_o r) > 0 \quad \forall r \geq R_2$.

Lemme 3 : Supposons que $\| v\|^2$ ne soit pas strictement croissante dans tout intervalle du type $[R,+\infty[$, alors il existe des valeurs arbitrairement grandes pour lesquelles : $F(0,0,r) > 0$.

Lemme 4 : Sous les hypothèses (1) (2) du théorème 1

$$\liminf_{r \to \infty} \left(\| v'\|^2 + k^2 \|v\|^2 + (Qv|v)_{L^2(S_{n-1})} \right) > 0$$

Lemme 5 : $\exists R_4 \geq R_o \; : \; \frac{d^2}{dr^2} (\|v\|^2) + 7k^2 \|v\|^2 \geq C^2 > 0 \qquad \forall\, r \geq R_4$

Le théorème 1 est alors une conséquence du lemme B de [2]. Dans ce lemme, on situe le graphe de la fonction $\|v(r)\|^2$ solution de l'inéquation différentielle différentielle du lemme 5, par rapport à une sinusoïde, dans tout intervalle à l'infini. La conclusion (3) n'est autre qu'une minoration de l'aire déterminée par l'axe des r et le graphe de cette fonction.

Dans le théorème suivant, nous nous donnons une fonction p définie dans $\mathbb{R}^n$, mesurable et satisfaisant :

(5) $$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|p(x)|^2}{|x-y|^{n-\mu}} dx < +\infty \qquad \text{avec } \mu : 0 < \mu < 4$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $t \neq 0$, on définit un opérateur unitaire dans

$L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

(6) $$(e^{iH_o'(t)}f)(x) = (\tfrac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x|\xi>} e^{i\varepsilon(t)\frac{\alpha}{|\xi|}\mathrm{Log}(4|t||\xi|^2)} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Nous savons que si $n \geq 3$ (cf. exposé IV, fait par J. C. Guillot) l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$, et l'opérateur $H = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)$ sont autoadjoints sur $D(H_\alpha) = D(H) = H^2(\mathbb{R}^n)$ en tant qu'opérateurs non bornés.

<u>Théorème 2</u> : Dans les conditions ci-dessus, et si p satisfait

(7) $$(1+|x|)^{-(\frac{n}{2}-1)+\varepsilon}\, p(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

les opérateurs d'ondes généralisés $W_{\pm}^D(H,H_o) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)}$

existent.

<u>Remarques</u> : (0) Le théorème a été démontré dans le cas $\alpha = 0$ par Kuroda dans [7].

(1) Les opérateurs $e^{iH_o'(t)}$ ont été introduits par Dollard pour $n = 3$ dans [4]. Notons que seule la partie $e^{i\varepsilon(t)\frac{\alpha}{|\xi|}\mathrm{Log}|t|}$ intervient dans la convergence ; le facteur multiplicatif $e^{\pm i\frac{\alpha}{|\xi|}\mathrm{Log}\,4|\xi|^2}$ n'intervient que pour exprimer $W_{\pm}^D$ en fonction des opérateurs stationnaires.

(2) Depuis, Buslaeev et Matveev [5] et Alshom-Kato dans [6] ont introduit les opérateurs $e^{iX(t)}$ définis par :

$$(e^{iX(t)}f)(x) = (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x|\xi>} e^{i\int_0^t q(s\xi)\,ds}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

lorsque l'opérateur $H = -\Delta + q(x) + p(x)$, où $q(x)$ satisfait des hypothèses de régularité de décroissance et de régularité comme dans le théorème 1.

Nous pensons que le théorème 2 est aussi valable sous les hypothèses du théorème 1 pour q ; p satisfaisant toujours l'hypothèse (7).

<u>Preuve du théorème 2</u> : Supposons $t > 0$. Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \hat{f}(\xi) \equiv 0$ au voisinage de $\xi = 0\}$. Comme les opérateurs $W(t) = e^{itH} e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)}$ sont

isométriques, il suffit de montrer que $\lim_{t\to\pm\infty} W(t)f$ existe pour tout $f \in \mathcal{C}$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette limite existe si $\int_{t_o}^{+\infty} \|\frac{d}{dt} W(t)f\|\,dt < +\infty$ l'ensemble $\mathcal{C}$ a été choisi de façon que l'intégrale soit facile à calculer si $f \in \mathcal{C}$:

$$\frac{d}{dt}(W(t)f) = i\left[e^{itH}\left(\frac{-2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}\right)e^{-itH_o}e^{iH_o'(t)} f\right]$$

et par suite

$$\int_{t_o}^{+\infty} \|\frac{d}{dt} W(t)f\|\,dt \le \int_{t_o}^{+\infty} \|\left(-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}\right)e^{-itH_o}e^{iH_o'(t)} f\|\,dt$$

Utilisons alors le fait que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(e^{-itH_o} f)(x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

et le lemme suivant

<u>Lemme</u> : $\forall f \in \mathcal{C}\ \forall \mu > 0\ \exists C \in \mathbb{R}_+\ \exists \gamma \in \mathbb{R}_+$:

$$(e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f)(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} e^{i\frac{2\alpha t}{|x|}\operatorname{Log}\frac{|x|^2}{t}} \hat{f}\left(\frac{x}{2t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}} R_f(x,t)$$

où $|R_f(x,t)| \le \frac{C}{t} \frac{(\operatorname{Log} t)^{\gamma}}{(1+(\frac{x}{2t})^2)^{\mu}}$.

La démonstration s'achève en montrant que sous l'hypothèse (7) :

$$\| - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}\, e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f\| \le \frac{C(f)}{(1+t)^{1+\varepsilon}}$$

Soit Ω l'extérieur d'une hypersurface régulière compacte $\Gamma \subset \mathbb{R}^h - \{0\}$. Soit $H^2(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par :

(8) $$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \le 2\}.$$

Nous savons que les fonctions u, ainsi que leurs dérivées normales possèdent des traces dans Γ et que l'on a la formule de Green :

$$(9) \qquad \int_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \nu} \, d\sigma = - \int_{\Omega} (g \Delta f + \nabla f . \nabla g) \, dx \qquad \forall f , \ g \in H^2(\Omega)$$

supposons que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_i est soit vide égale à la réunion de certaines de ses composantes connexes. Soient σ une fonction définie sur Γ_1 réelle et lipschitzienne sur Γ_1, et une fonction $p(x)$ définie dans $\Omega \cup \Gamma$ mesurable, satisfaisant :

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(i) \quad \sup_{y \in \Omega \cup \Gamma} \int_{\substack{|x-y| \leq 1 \\ y \in \Omega \cup \Gamma}} \frac{|p(x)|^2}{|x-y|^{n-\beta}} \, dx < +\infty \quad , \quad 0 < \beta < 4 \\ &(ii) \quad \lim_{y \to \infty} \int_{|x-y| \leq 1} |p(x)|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Posons

$$(11) \qquad \begin{cases} Hu = -\Delta u - \dfrac{2\alpha}{|x|} u(x) + p(x) u(x) \\ D(H) = \{ u \in H^2(\Omega) \ : \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \ ; \ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \ \} \end{cases}$$

Nous avons alors la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> : i) Sous les hypothèses (10) H est un opérateur autoadjoint.
ii) $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty[$.

<u>Preuve</u> : N. Schenk et D. Thoe ont montré dans [8] que l'opérateur

$$(12) \qquad \begin{aligned} &H = -\Delta + q \\ &D(H) = \{ u \in H^2(\Omega) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \ , \ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \ \} \end{aligned}$$

est autoadjoint sous réserve que q satisfasse à certaines hypothèses de régularité et de décroissance. En particulier, pour $q = 0$:

$$(13) \qquad \begin{cases} H_1 = -\Delta \\ D(H_1) = \{ u \in H^2(\Omega) \ : \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \ \} . \end{cases}$$

Nous allons considérer H comme une perturbation de H_1. En effet, considérons l'opérateur de multiplication V, défini par :

(14) $$(Vu)(x) = \left(\frac{-2\alpha}{|x|} + p(x)\right)u(x)$$

Nous savons, d'après Schechter [9] que si V est un opérateur compact de $D(H_1)$ dans $L^2(\Omega)$ alors $H = H_1 + V$ est auto adjoint sur $D(H_1)$ et $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_1)$.

D'après Schenk et The [8], $\sigma_{ess}(H_1 = = [0, +\infty[$. Il suffit de montrer la compacité de l'opérateur V. Posons :

(15) $$\tilde{p}(x) = p(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega \cup \Gamma, \quad \tilde{p}(x) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$(\tilde{V}u)(x) = \left(-\frac{2\alpha}{|x|} + \tilde{p}(x)\right)u(x) \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

Alors, il est clair que $\tilde{p}(x)$ satisfait (5) $\left(\frac{2\alpha}{|x|}\right.$ aussi) et (10) ii) . Donc, d'après Schechter $\tilde{V}$ est un opérateur compact de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La régularité de Γ entraîne que V est aussi un opérateur compact de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous allons voir comment utiliser les théorèmes (1) et (2).

<u>Corollaire 1</u> : Soit μ une fonction appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, supp $\mu \subset \Omega$ $|\mu| \leq 1$, $\mu \equiv 1$ au voisinage de l'infini, alors les opérateurs d'ondes généralisés

$$W_D^{\pm}(H,H_0) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}\mu\, e^{-itH_0}\, e^{iH_0'(t)}$$

existent (et ne dépendent pas de μ) pourvu que

$$(1 + |x|)^{-(\frac{n}{2} - 1) + \varepsilon} p(x) \in L^2(\Omega)$$

<u>Preuve</u> : Rappelons que H_0 est considéré dans $\mathbb{R}^n$ et $H_0'(t)$ défini par (6). Si μ_1 et μ_2 satisfont les hypothèses du corollaire, pour montrer l'indépendance, il suffit de montrer que :

(16) $$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}(\mu_1 - \mu_2)\, e^{-itH_0}\, e^{iH_0'(t)} = 0$$

Soit $f \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire $f \in \mathscr{S}$, $\hat{f}(\xi) \equiv 0$ au voisinage de $\xi = 0$ et d'après le lemme 1 :

$$(e^{itH_o} e^{iH_o'(t)} f)(x) = (\frac{1}{4\pi i t})^{\frac{n}{2}} [\varphi_1(x/t) + \varphi_2(x/t)]$$

où $|(\frac{x}{t})^p \varphi_j(x/t)| \leq C(p) \quad \forall p, \forall j = 1,2.$

Comme $(\mu_1 - \mu_2)$ est à support compact dans Ω, il est clair, qu'en choisissant p convenable , (16) est vraie.

Comme $\mathscr{C}$ est dense et que $|\mu_1 - \mu_2| \leq 2$ (16) est vraie aussi dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ tout entier.

Comme pour le théorème 2, pour prouver l'existence, nous montrons que :

$$(17) \quad \int_{t_o}^{+\infty} \| \frac{d}{dt} (e^{itH} \mu e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f) \| dt < +\infty \quad \text{pour } f \in \mathscr{C}.$$

$$\frac{d}{dt} W(t) = \frac{d}{dt} e^{itH} \mu e^{-itH_o} = i e^{itH} [H\mu + \mu(-H_o + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}})] e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f$$

$$[H\mu + \mu(-H_o)] g = [(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x))\mu(x) + \mu(x)\Delta] g = (-\Delta\mu + \mu\Delta) g + (-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x))\mu g$$

$$\frac{d}{dt} W(t) f = i e^{itH} \mu(-\frac{2\alpha}{|x|} + q(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f +$$

$$i e^{itH} (\mu\Delta - \Delta\mu) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f$$

Nous avons montré que les hypothèses sur p dans le corollaire, permettent de montrer que la limite du premier terme existe car :

$$\int_{t_o}^{+\infty} \| \frac{d}{dt} W(t) f \| dt \leq \int_{t_o}^{+\infty} \| (\frac{-2\alpha}{|x|} + q(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f \|_{L^2(\Omega)} dt$$

Reste à montrer la convergence du deuxième terme

$$e^{itH} (\mu\Delta - \Delta\mu) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f = e^{itH} (\Delta\mu) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f + e^{itH} (\nabla\mu . \nabla g)$$

où $g = e^{-itH_o} e^{iH'_o(t)} f$.

Comme $\Delta\mu$ est une fonction à support compact dans Ω, il est facile d'utiliser le lemme 1 pour montrer que le terme en $\Delta\mu$ s'intègre en t.

Par ailleurs, posons :

$$h(x,t) = (e^{iH'_o(t)} f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{i\frac{c}{|\xi|}\operatorname{Log} t} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

alors

$$g(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} h(y,t)\, dy.$$

Comme $h \in \mathcal{S}$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{2(x_i - y_i)}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} h(y,t)\, dy$$

Comme $\frac{d\mu}{dx_i}$ est à support compact, il est clair que $\|\nabla\mu.\nabla g\|$ est intégrable par rapport à t ; ce qui achève la démonstration.

<u>Remarques</u> : Ce résultat a été démontré avec $\alpha = 0$ pour le problème de Dirichlet avec une fonction p plus régulière par Ikebé dans [9], et, pour le problème mixte avec p continue et bornée par Schenk et Thoe dans [8].

<u>Corollaire 2</u> : Soit H_α l'opérateur autoadjoint défini par

$$\begin{cases} H_\alpha u = -\Delta - \dfrac{2\alpha}{|x|} \\ D(H_\alpha) = H^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Soit H l'opérateur défini par (11)'. Alors si μ et p satisfont les conditions du corollaire 1, les opérateurs d'ondes

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}\mu\, e^{-itH_\alpha} E_\alpha(]0,+\infty[) \text{ existent.}$$

<u>Preuve</u> : C'est la transitivité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Rellich : Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten Jber Deutsch. Math Verein. 53 (1943) 57-65.

[2] T. Kato : Growth properties of solutions of the reduced wave equations with a variable coefficient. Comm. Pure App. Math. 12 (1959) 403-425.

[3] S. Agmon : Lower bounds for solutions of Schrödinger equation. Journ. Anal. Jerusalem 23 (1970) 1-25.

[4] J. Dollard : Asymptotic convergence and the coulomb interaction J. M. P. 5 (1964) 729-738.

[5] V. S. Buslaeev et V. B. Matveev : Wave operators for the scattering equation with a slowly decreasing potential, Theo. Math. Phys. 2 (1970) 266-274.

[6] P. Alshom et T. Kato : Scattering with long range potentials, Preprint 1971.

[7] S. T. Kuroda : On the existence and the unitarity property of the scattering operator, Nuovo Cimento 12 , 431-454 (1959).

[8] N. Schenk et D. Thoe : Eigenfunction expansion and scattering theory for perturbation of $-\Delta$, J. M. A. A. 36-2 (1971) 313-351.

[9] Schechter : Spectra of partial differential operators, Noth-Holland (1971).

[10] T. Ikebé : Scattering for the Schrödinger operator in an exterior domain, J. Math. Kyoto Univ. (1967) 93-112.