

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. J. DUISTERMAAT

J. SJOSTRAND

Sur une classe d'opérateurs de type sous-elliptique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 7,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A8_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DE TYPE SOUS-ELLIPTIQUE

par J. J. DUISTERMAAT et J. SJOSTRAND

exposé par J. SJOSTRAND

Exposé N° VII

15 Novembre 1972

§ 1. INTRODUCTION

Soit X une variété C^∞ , para-compacte de dimension n et soit $P \in L^m(X)$ un opérateur pseudodifférentiel, proprement supporté, de type 1, 0 et de symbole principal $p \in C^\infty(T^*(X) \setminus 0)$ positivement homogène de degré m . Nous posons

$$(1.1) \quad \Sigma = \{(x, \xi) \in T^*(X) \setminus 0 ; p(x, \xi) = 0\}.$$

Soit

$$(1.2) \quad \{p, \bar{p}\} = 2i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$$

le crochet de Poisson de p et \bar{p} .

Hörmander [4] a démontré que si $\frac{1}{i} \{p, \bar{p}\} > 0$ sur Σ on a l'estimation a priori :

$$(1.3) \quad \|u\|_s \leq C_{K,s} (\|P^* u\|_{s-m+\frac{1}{2}} + \|u\|_{s-1}),$$

$$u \in H_{s+\frac{1}{2}}^{loc}(X) \cap \mathcal{E}'(K), \quad K \lll X, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ici P^* est l'adjoint de P par rapport au produit sesquilinéaire :

$$(1.4) \quad \int u \bar{v} \, d\mu, \quad u, v \in C_0^\infty(X)$$

où $d\mu$ est une densité C^∞ , strictement positive que nous prenons fixe.

(1.3) implique que P^* est hypoelliptique et qu'on a résolubilité locale pour P . Hörmander [4] a aussi montré que si $\frac{1}{i} \{p, \bar{p}\} > 0$ en un point de Σ , alors P n'est pas hypoelliptique. (Voir [6] pour des résultats plus généraux et plus précis.)

Dans cet exposé nous allons esquisser la construction des projections naturelles ("orthogonales") sur le noyau et le conoyau de P considéré comme opérateur : $\mathcal{D}'(X)/C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)/C^\infty(X)$ sous la condition que $\frac{1}{i} \{p, \bar{p}\} \neq 0$ sur Σ . Dans le cas où $\frac{1}{i} \{p, \bar{p}\}$ est toujours négatif ou toujours positif sur Σ et X est compacte nous pouvons choisir des projections qui donnent une description exacte du noyau et du conoyau de P .

sidéré comme opérateur de $\mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$.

Nous considérons donc la sous-classe la plus simple des opérateurs de type sous-elliptique considérée par Egorov [2]. Notons aussi que Kawai [7] dans le cas analytique a construit une suite exacte, microlocale qui décrit le noyau et le conoyau de P considéré comme opérateur sur le faisceau \mathcal{C} de Sato.

Notons finalement que dans [10] il y a un résultat quand la projection $\Sigma \rightarrow X$ est de rang $n - 1$ et aussi un résultat microlocale dans le cas général.

Notations : Si $A : C_0^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ est continu, linéaire, nous écrivons A^* pour l'adjoint par rapport au produit (1.4). Pour les opérateurs A, B nous écrivons $A \equiv B$ si $A-B$ est un opérateur intégral de noyau C^∞ . Nous désignons par I l'opérateur d'identité et par WF (ou par WF') le "wavefrontset" introduit par Hörmander [5]. (Pour des opérateurs, " WF' " est souvent la notion la plus convenable.) Pour chaque ensemble V , nous posons $\text{diag}(V) = \{(\rho, \rho); \rho \in V\}$.

Théorème 1.1 : Soit $P \in L^m(X)$, proprement supporté, de symbole principal $p \in C^\infty(T^*(X) \setminus 0)$ positivement homogène de degré m . Supposons que

$$(1.5) \quad \frac{1}{i}\{p, \bar{p}\} \neq 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et écrivons $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ où

$$\Sigma^\pm = \{(x, \xi) \in \Sigma ; \frac{1}{i}\{p, \bar{p}\} \gtrless 0 \}.$$

Alors il existe des opérateurs linéaires et proprement supportés $F, F^+, F^- : \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ tels que F est continu : $H_s^{\text{loc}}(X) \rightarrow H_{s+m-1/2}^{\text{loc}}(X)$ et F^\pm sont continus : $H_s^{\text{loc}}(X) \rightarrow H_s^{\text{loc}}(X)$ pour tout s . En plus :

$$(1.6) \quad F^+ + FP \equiv I$$

$$(1.7) \quad F^- + PF \equiv I$$

$$(1.8) \quad (F^+)^* \equiv F^+, \quad (F^-)^* \equiv F^-$$

$$(1.9) \quad WF'(F) = \text{diag}(T^*(X) \setminus 0)$$

$$(1.10) \quad WF'(F^\pm) = \text{diag}(\Sigma^\pm)$$

Si \tilde{F} , \tilde{F}^+ , \tilde{F}^- sont des opérateurs linéaires, continus de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et aussi de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(X)$, satisfaisant (1.6) - (1.8) et si $WF'(\tilde{F}^+) \cap WF'(\tilde{F}^-) = \emptyset$, $WF'(\tilde{F}) \cap (\Sigma^+ \times \Sigma^-) = \emptyset$, alors $\tilde{F} \equiv F$, $\tilde{F}^+ \equiv F^+$.

Remarque : Si on multiplie (1.6) à gauche et (1.7) à droite par P et si on prend la différence et utilise (1.10), on obtient

$$(1.11) \quad PF^+ \equiv F^-P \equiv 0.$$

Multipliant (1.6) à droite par F^+ et (1.7) à gauche par F^- on obtient de (1.11) que

$$(1.12) \quad (F^+)^2 \equiv F^+, \quad (F^-)^2 \equiv F^-.$$

Donc dans un sens approximatif les opérateurs F^+ et F^- sont les projections orthogonales sur le noyau de P et le conoyau de P respectivement .

Multipliant (1.6) à droite et (1.7) à gauche par F et prenant la différence, on obtient de (1.9) et (1.10) que

$$(1.13) \quad F^+F \equiv FF^- \equiv 0.$$

Si X est compact et Σ^+ ou Σ^- est vide le théorème 1.1 est valable dans un sens exact et pas seulement modulo des opérateurs à noyau C^∞ . Par exemple si $\Sigma^+ = \emptyset$ on a

Théorème 1.2 : Si X est compact et si $\frac{1}{i}\{p, \bar{p}\} < 0$ sur Σ , alors, il existe des opérateurs E , E^+ , $E^- : \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ tels que

$$(1.14) \quad E^+ + EP = I \quad , \quad E^- + PE = I \quad , \quad E^-P = PE^+ = 0;$$

$$(1.15) \quad (E^+)^* = E^+ \quad , \quad (E^-)^* = E^-.$$

(1.16) Le rang de E^+ est fini et son noyau distribution est C^∞ .

(1.17) E est continu : $H_s(X) \rightarrow H_{s+m-\frac{1}{2}}(X)$ et E^- est continu : $H_s(X) \rightarrow H_s(X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

$$(1.18) \quad WF'(E) = \text{diag} (T^*(X) \setminus 0)$$

$$(1.19) \quad WF'(E^-) = \text{diag} (\Sigma).$$

Notons qu'un opérateur différentiel, non elliptique ne peut pas satisfaire les conditions du théorème 1.1. Nous donnons maintenant un exemple avec $\Sigma^+ \neq \emptyset$ montrant que en général on ne peut pas avoir le théorème 1.1 avec égalité au lieu de congruence dans (1.6)-(1.8). Soit $X = \mathbb{R}^2 / 2\pi \mathbb{Z}^2$ le tore de dimension 2 et soit

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\phi(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

où $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ a des valeurs réelles et un nombre fini de zéros qui sont tous simples. Alors P satisfait les conditions du théorème 1.1 et $\Sigma^+ \neq \emptyset$. Si $\int_0^{2\pi} \phi(x_1) dx_1 \neq 0$ on voit, en prenant la transformée de Fourier par rapport à x_1 , que $u \in \mathcal{D}'(X)$, $Pu = 0 \Rightarrow u = \text{constante}$. D'autre part, si le théorème 1.1 était valable dans le sens exact, le noyau de P aurait une dimension infinie.

Nirenberg [8] a donné un exemple d'un opérateur vérifiant les conditions du théorème 1.1, tel que toute solution locale de classe C^1 de l'équation $Pu = 0$ est constante.

Dans les paragraphes 2 et 3, nous allons esquisser la démonstration du théorème 1.1 et dans le paragraphe 4 nous démontrerons le théorème 1.2.

§ 2. L'UNICITE ET REDUCTION A UNE CONSTRUCTION MICROLOCALE.

Soient $X, P, F, F^\pm, \tilde{F}, \tilde{F}^\pm$ comme dans le théorème 1.1. L'argument donnant (1.11) donne aussi que $P\tilde{F}^+ \equiv \tilde{F}^-P \equiv 0$. Multiplication de (1.6) à droite par \tilde{F}^+ donne $F^+\tilde{F}^+ \equiv \tilde{F}^+$ et par symétrie, on a aussi $\tilde{F}^+F^+ \equiv F^+$. Comme F^+, \tilde{F}^+ sont approximativement autoadjoints on a donc

$$F^+ \equiv (F^+)^* \equiv (F^+)^*(\tilde{F}^+)^* \equiv F^+\tilde{F}^+ \equiv \tilde{F}^+.$$

Similairement on a $F^- \equiv \tilde{F}^-$. Comme $F^+ + FP \equiv \tilde{F}^+ + \tilde{F}^-P (\equiv I)$ on a $FP \equiv \tilde{F}^-P$. Multiplication à droite par F donne

$$(2.1) \quad F(I - F^-) \equiv \tilde{F}^-(I - \tilde{F}^-).$$

L'argument donnant (1.13) donne maintenant que $\tilde{F}^+ \tilde{F} \equiv \tilde{F} \tilde{F}^- \equiv 0$.
Donc (2.1), (1.13) impliquent que $F \equiv \tilde{F}$ et nous avons démontré l'unicité dans le théorème 1.1.

Notation : Si A_j , $j = 1, 2$ sont des opérateurs tels que

$WF'(A_j) \subset \text{diag}(T^*(X) \setminus 0)$ et si $V \subset T^*(X) \setminus 0$ est ouvert et conique, nous écrivons : " $A_1 \equiv A_2$ dans V " si $WF'(A_1 - A_2) \cap \text{diag}(V) = \emptyset$.

Supposons maintenant que pour chaque $\rho \in T^*(X) \setminus 0$ il y a un voisinage ouvert conique $V_\rho \ni \rho$ et des opérateurs $F_\rho, F_\rho^\pm : \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ tels que

$$(2.2) \quad F_\rho \text{ est continu } H_s^{\text{loc}}(X) \rightarrow H_{s+m-1/2}^{\text{loc}}(X), \quad F_\rho^\pm \text{ est continu } H_s^{\text{loc}}(X) \rightarrow H_s^{\text{loc}}(X) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

$$(2.3) \quad WF'(F_\rho) \subset \text{diag}(T^*(X) \setminus 0), \\ WF'(F_\rho^\pm) \subset \text{diag}(\Sigma^\pm)$$

$$(2.4) \quad (1.6) - (1.8) \text{ sont satisfaits dans } V_\rho \text{ avec } F, F^\pm \text{ remplacés par } F_\rho, F_\rho^\pm.$$

Soit $\chi_j \in L^0(X)$, $j \in J$ une famille localement finie d'opérateurs proprement supportés, tels que, pour des ρ_j correspondants, on ait

$$(2.5) \quad WF(\chi_j) \subset V_{\rho_j}, \quad \sum_j \chi_j \equiv I.$$

Posons

$$(2.6) \quad F = \sum_j \chi_j F_{\rho_j}, \quad F^\pm = \sum_j \chi_j F_{\rho_j}^\pm.$$

Alors

$$(2.7) \quad WF'(F) \subset \text{diag}(T^*(X) \setminus 0), \quad WF'(F^\pm) \subset \text{diag}(\Sigma^\pm)$$

et après avoir additionné des opérateurs à noyau C^∞ , on peut supposer que F, F^\pm sont proprement supportés avec la même continuité dans H_s^{loc} que dans le théorème 1.1.

La démonstration de l'unicité ci-dessus montre aussi que $F_\rho \equiv F_{\rho'}$, $F_\rho^\pm \equiv F_{\rho'}^\pm$, dans $V_\rho \cap V_{\rho'}$, pour tout ρ, ρ' . Donc (2.5), (2.6) impliquent que $F \equiv F_\rho$, $F^\pm \equiv F_\rho^\pm$ dans V_ρ pour tout ρ , et comme les V_ρ recouvrent $T^*(X) \setminus 0$ on voit que (1.6), (1.8) sont satisfaites globalement.

Hörmander [6] a montré (pour des opérateurs plus généraux) que, pour chaque $\Gamma \subset \Sigma^+$, fermé, conique, il existe $u \in \mathcal{D}'(X)$ telle que $Pu \in C^\infty(X)$, $WF(u) = \Gamma$. Comme $u \equiv F^+u \pmod{C^\infty(X)}$, (2.7) montre que $WF^+(F^+) = \text{diag } \Sigma^+$ (et similairement pour F^-). Utilisant (2.7) il est facile de montrer (1.9) et on a donc démontré le théorème 1.1 en supposant l'existence des F_ρ, F_ρ^\pm .

§ 3. CONSTRUCTION DES F_ρ, F_ρ^\pm

Si $\rho \notin \Sigma$ on peut prendre $F_\rho \in L^{-m}(X), F_\rho^\pm = 0$. On peut donc supposer que $\rho \in \Sigma$ et par dualité même que $\rho \in \Sigma^+$. Pour $\rho \in \Sigma^+$ nous allons esquisser la construction des F_ρ, F_ρ^\pm satisfaisant (2.2) - (2.4) avec $F_\rho^- = 0$.

Sato-Kawai-Kashiwara [9] ont annoncé dans le cas analytique que si P satisfait les conditions du théorème 1.1 alors P est micro-localement équivalent à l'opérateur $D_n + i x_n D_{n-1}$ dans un certain sens. Dans le cas non-analytique on a le même résultat et notre démonstration est probablement celle de Sato-Kawai-Kashiwara à quelques modifications près.

Proposition 3.1 : Soient P et $\rho \in \Sigma^+$ comme ci-dessus. Alors il existe une transformation canonique, homogène \mathcal{H} d'un voisinage V_ρ de ρ dans $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$ et des opérateurs intégraux Fourier de type 1 :

$$B = I^{1-m}(\mathbb{R}^n \times X, \Gamma'), \quad C \in I^0(\mathbb{R}^n \times X, \Gamma')$$

tels que

(3.1) Γ est un sous-ensemble fermé, conique du graphe de \mathcal{H} et

$$\Gamma' = \{(\mu, -\nu) ; (\mu, \nu) \in \Gamma\} .$$

(3.2) B et C sont non-caractéristiques au point $(\mathcal{H}(\rho), -\rho)$.

(3.3) $(\mathcal{H}(\rho), \rho) \notin WF'(BP - (D_n + i x_n D_{n-1})C)$.

Pour montrer cette proposition il faut d'abord construire \mathcal{H} transformant $p(x, \xi)$ en $a(x, \xi)(\xi_n + i x_n \xi_{n-1})$ où $a(x, \xi)$ est elliptique d'ordre $m-1$. Avec une telle \mathcal{H} on obtient la proposition avec $D_n + i x_n D_{n-1} + C_0$ au lieu de $D_n + i x_n D_{n-1}$, où $C_0 \in L^0(\mathbb{R}^n)$. Pour éliminer C_0 on montre qu'il existent $B', C' \in L^0(\mathbb{R}^n)$ elliptiques tels que $B'(D_n + i x_n D_{n-1} + C_0) \equiv (D_n + i x_n D_{n-1})C'$ près de $\mathcal{H}(\rho)$.

Nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda = D_n + i x_n D_{n-1}$ près du point $\eta = \mathcal{H}(\rho) = (x^0, \xi^0)$ où $x_n^0 = \xi_n^0 = 0, \xi_{n-1}^0 < 0$. Considérons les opérateurs $G : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), G^+ : C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par

$$(3.4) \quad \widetilde{Gf}(\xi', x_n) = i \int_0^{x_n} e^{\gamma/2(x_n^2 - y_n^2)\xi_{n-1}} \psi(\xi') \widetilde{f}(\xi', y_n) dy_n$$

$$(3.5) \quad \widetilde{G^+g}(\xi', x_n) = e^{\gamma/2 x_n^2 \xi_{n-1}} \psi(\xi') \widetilde{g}(\xi'),$$

où $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ et \sim est la transformée de Fourier par rapport à \dot{x}' et ψ est une fonction dans $C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, que l'on choisit à valeurs réelles, positivement homogène de degré zéro pour $|\xi'|$ grand. De plus $\text{supp } \psi \subset \{\xi' ; \xi_{n-1} < 0\}$ et $\psi(\xi') = 1$ quand $|\xi'|$ est grand et $\xi'/|\xi'| \approx \xi'_0/|\xi'_0|$. On vérifie que

$$(3.6) \quad \Lambda G = \psi(D'), \quad \gamma G = 0, \quad \Lambda G^+ = 0, \quad \gamma G^+ = \psi(D'),$$

$$(3.7) \quad G\Lambda = \psi(D') - G^+\gamma,$$

où $\gamma : C^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ est l'opérateur de restriction à $x_n = 0$. On a aussi :

$$(3.8) \quad (G^+)^* G^+ = (\psi(D'))^2 a(D')$$

où $a(\xi') \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ est positivement homogène pour $|\xi'|$ grand de degré $-1/2$ et $a(\xi') \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\forall \xi'$.

Soit $T = T(D) \in L^0(\mathbf{R}^n)$, proprement supporté tel que

1) $T \equiv I$ près de $\eta = \mathcal{K}(\rho)$.

2) $T(\xi)$ est d'ordre $-\infty$ en dehors d'un petit voisinage de ξ^0 .

3) $\frac{\partial}{\partial \xi_n} T(\xi)$ est d'ordre $-\infty$ dans un voisinage conique de $\xi_n = 0$.

Posons

$$(3.9) \quad E_\eta^+ = G^+(a(D'))^{-1}(G^+)^*$$

$$(3.10) \quad E_\eta = T(D)(G - G^+(a(D'))^{-1}(G^+)^*G)T(D).$$

Proposition 3.2 : E_η, E_η^+ vérifient :

- (i) E_η est continu $H_s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H_{s+\gamma/2}(\mathbf{R}^n)$, $\forall s \in \mathbf{R}$
- (ii) E_η^+ est continu $H_s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H_s(\mathbf{R}^n)$, $\forall s \in \mathbf{R}$.
- (iii) $WF'(E_\eta) \subset \text{diag}(T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0)$
- (iv) $WF'(E_\eta^+) \subset \text{diag}(\{(x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0; x_n = \xi_n = 0\})$
- (v) $\Lambda E \equiv I$ près de η .
- (vi) $E^+ + E\Lambda \equiv I$ près de η
- (vii) $(E^+)^* \equiv E^+$ près de η .

Toutes les propriétés sauf (iii) découlent assez facilement de la construction. Pour montrer (iii) on montre d'abord que $\chi E_\eta, E_\eta \chi$ sont des opérateurs pseudodifférentiels si $\chi \in L^0(\mathbf{R}^n)$ et $WF(\chi) \cap \{(X, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0; x_n = \xi_n = 0\} = \emptyset$.

Utilisant ce fait et une estimation de $WF'(E_\eta)$ dans la direction de (x', ξ') qui se déduit de (3.4), (3.10), on montre (iii).

Nous pouvons maintenant construire les F_ρ, F_ρ^+ dans (2.2)-(2.4). Soient P comme dans le théorème 1.1, $\rho \in \Sigma^+$ et B, C, Γ comme dans la proposition 3.1. Prenons $U \in I^0(\mathbf{R}^n \times X, \Gamma')$ tel que $U^*U \equiv I$ près de ρ , $UU^* \equiv I$ près de $\eta = \mathcal{X}(\rho)$. (Un tel U peut être construit en utilisant la proposition 2.2.2 dans [5]). Nous écrivons (3.3) sous la forme

$$(3.11) \quad (\mathcal{X}(\rho), \rho) \notin WF'(UP - (C_1 \wedge C_2)U),$$

où $C_1 \in L^{m-1}(\mathbf{R}^n)$, $C_2 \in L^0(\mathbf{R}^n)$ sont non-caractéristiques près de η . S'il existe des opérateurs $F_\eta, F_\eta^+, (F_\eta^- = 0)$ satisfaisant (2.2) - (2.4) près de η pour l'opérateur $C_1 \wedge C_2$, alors les opérateurs

$$(3.12) \quad F_\rho = U^* F_\eta U, \quad F_\rho^+ = U^* F_\eta^+ U$$

vérifient (2.2)-(2.4) près de ρ pour l'opérateur P . On a donc réduit le

problème à l'opérateur $C_1 \wedge C_2$.

Soient $C_1^i \in L^{1-m}(\mathbb{R}^n)$, $C_2^i \in L^0(\mathbb{R}^n)$ à noyaux de distributions dans \mathcal{E}' tels que $C_j^i C_j^i \equiv C_j^i C_j^i \equiv I$ près de η . Il est facile de montrer que

$$K = (C_2^i G^+)^*(C_2^i G^+) \in L^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

et que K est non-caractéristique en $\eta' = (X^{0'}, \xi^{0'})$.

Soit $B \in L^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ à noyau de distribution dans \mathcal{E}' tel que $BK \equiv KB \equiv I$ près de η' et posons

$$F_{\eta}^+ = C_2^i G^+ B (C_2^i G^+)^*$$

$$F_{\eta} = (C_2^i E_{\eta} - F_{\eta}^+ C_2^i E_{\eta}) C_1^i.$$

Alors F_{η} , F_{η}^+ satisfont (2.2) -- (2.4) près de η pour l'opérateur $C_1 \wedge C_2$ et notre esquisse de la démonstration du théorème 1.1 est terminée.

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2

Soit P , X comme dans le théorème 1.2. Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ nous considérons P comme un opérateur non-borné $P_s : H_{s+m-1/2}(X) \rightarrow H_s(X)$. Soient F , F^- les opérateurs du théorème 1.1, donc

$$(4.1) \quad FP \equiv I$$

$$(4.2) \quad F^- + PF \equiv I$$

(4.1) implique que $N_{P_s} = N_P \subset C^\infty(X)$ est un espace de dimension finie, indépendant de s . Prenons une base orthonormée (f_1, \dots, f_ν) de N_P et posons :

$$(4.3) \quad E^+ u = \sum_{j=1}^{\nu} (u, f_j) f_j, \quad u \in \mathcal{D}'(X).$$

Alors E^+ est de rang fini, son noyau distribution est C^∞ et $E^+ \Big|_{H_0(X)}$ est la projection orthogonale sur N_P . Posons

$$(4.4) \quad N_{P_s}^i = \{u \in H_{s+m-1/2}(X) ; E^+ u = 0\},$$

$H_{s+m-\mathcal{D}}(X)$ est la somme directe topologique de N_{P_s} et N'_{P_s} .

(4.1) donne l'estimation à priori :

$$(4.5) \quad \|u\|_{s+m-\mathcal{D}} \leq C_{s,\rho} (\|Pu\|_s + \|u\|_{s+m-\mathcal{D}-\rho}),$$

$$u \in H_{s+m}(X), \quad \rho > 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Un argument dans la démonstration du théorème 8.7.2 dans [3] donne

$$(4.6) \quad \|u\|_{s+m-\mathcal{D}} \leq C_s \|P_s u\|_s, \quad u \in N'_{P_s} \cap \mathcal{D}_{P_s}.$$

Donc $\text{Im } P_s = \text{Im } P \cap H_s(X)$ est fermé dans H_s pour tout $s \in \mathbb{R}$ et la fermeture de $\text{Im } P_0$ dans H_s est contenu dans $\text{Im } P_s$ pour tout $s \leq 0$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe un opérateur unique, borné $\underline{E}_s : \text{Im } P_s \rightarrow N'_{P_s}$ tel que $P_s \underline{E}_s = I$ sur $\text{Im } P_s$ et $\underline{E}_s P_s = I$ sur $N'_{P_s} \cap \mathcal{D}_{P_s}$ et $\underline{E}_s = \underline{E}_s'$ sur $\text{Im } P_s \cap \text{Im } P'_s$. Soit $E_0^- : H_0(X) \rightarrow (\text{Im } P_0)^\perp$ la projection orthogonale. Alors $I - E_0^-$ est la projection sur $\text{Im } P_0$ et nous posons

$$(4.7) \quad E_0 = \underline{E}_0 (I - E_0^-) : H_0(X) \rightarrow H_{m-\mathcal{D}}(X).$$

Alors

$$(4.8) \quad E_0^- P_0 = 0$$

$$(4.9) \quad P_0 E_0 = I - E_0^-$$

$$(4.10) \quad E_0 P_0 \subset I - E^+$$

$$(4.11) \quad P_0 E^+ = 0$$

Supposons que E_0^- a une restriction ou une extension continue $E_s^- : H_s \rightarrow H_s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors $E_s = \underline{E}_s (I - E_s^-)$ est une extension ou une restriction continue : $H_s(X) \rightarrow H_{s+m-\mathcal{D}}(X)$ de E_0 . Les unions $E^- = \bigcup_s E_s^-$, $E = \bigcup_s E_s$ sont continus de $\mathcal{D}^i(X)$ dans $\mathcal{D}^i(X)$ et aussi de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(X)$. En plus (1.14), (1.15) sont satisfaites et l'énoncé d'unicité dans le théorème 1.1 montre que $E \equiv F$, $E^- \equiv F^-$, ce qui nous donne le théorème 1.2.

Pour montrer que E_0^- est continu dans tous les espaces $H_s(X)$ nous multiplions (4.2) à gauche par E_0^- et utilisons (4.8) :

$$(4.12) \quad E_0^- F^- \equiv E_0^- \pmod{\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_0(X))} \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{R}.$$

Ici $\mathcal{L}(A, B)$ est l'espace des opérateurs bornés : $A \rightarrow B$. Multiplions (4.9) à gauche par F^- . Comme $F^- P \equiv 0$ on obtient

$$(4.13) \quad F^- E_0^- \equiv F^- \pmod{\mathcal{L}(H_0(X), H_s(X))}, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Prenant les adjoints et utilisant que $(F^-)^* \equiv F^-$, $(E_0^-)^* = E_0^-$, on obtient

$$(4.14) \quad E_0^- F^- \equiv F^- \pmod{\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_0(X))}, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

(4.12) et (4.14) impliquent que

$$(4.15) \quad E_0^- \equiv F^- \pmod{\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_0(X))}, \quad \forall s \in \mathbf{R},$$

et prenant les adjoints on a

$$(4.16) \quad E_0^- \equiv F^- \pmod{\mathcal{L}(H_0(X), H_s(X))}, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Comme F^- est continu $H_s(X) \rightarrow H_s(X)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ on déduit de (4.15), (4.16) que E_0^- a pour tout $s \in \mathbf{R}$ une extension ou une restriction E_s^- continue : $H_s(X) \rightarrow H_s(X)$. Le théorème 1.2 est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Duistermaat J. J. et Hörmander L. : Fourier integral operators II, Acta Math. 128 (1972), 183-269.
- [2] Egorov Yu. V. : Non degenerate subelliptic pseudo-differential operators, Math. USSR Sbornik 11(1970), 291-308.
- [3] Hörmander L. : Linear partial differential operators, Springer-Verlag 1963.
- [4] Hörmander L. : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. Math. 83(1966), p. 129-209.
- [5] Hörmander L. : Fourier integral operators I, Acta Math. 127(1971), 79-183.

- [6] Hörmander L. : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential operators, *l'Enseignement Mathématique* 17(2) (1971), p. 99-163.
 - [7] Kawai T. : Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients, II, *Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ.* 7 (1971), p. 399-426.
 - [8] Nirenberg L. A. : Lectures on Linear Partial Differential Equations, *Proc. of Regional Conference at Texas Tech., Conference Board of the Math. Sciences of the A. M. S.* (à paraître).
 - [9] Sato M., Kawai T., Kashiwara M. : On pseudo-differential equations in hyperfunction theory, *Proc. of the A. M. S. Summer Institute on Partial Differential Equations, Berkeley* 1971.
 - [10] Sjöstrand J. : Operators of principal type with interior boundary conditions. A paraître dans *Acta Math.* 130 (1973).
-