

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. FRANK

## **Fonctions de mailles et théorie elliptique des opérateurs aux différences finies**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 5,  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A6_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

FONCTIONS DE MAILLES ET THEORIE ELLIPTIQUE  
DES OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES

par L. FRANK

Exposé N° V

25 Octobre 1972



§ 0. INTRODUCTION

Au voisinage des problèmes elliptiques différentiels, il y a des approximations "non-elliptiques" ne conservant pas sur les réseaux les propriétés fondamentales des opérateurs approchés, la situation que l'on va illustrer avec un exemple simple.

Soit l'opérateur

$$D_x = -i \frac{d}{dx} \quad (1)$$

On va considérer trois approximations de (1). Soit  $R_{x,h}^1 = \{x \in \mathbb{R}_x^1, x=kh, k = 0, \pm 1, \dots\}$  une famille de réseaux sur la droite de pas  $h$ . On désigne par  $\theta_{x,h}$  et  $\bar{\theta}_{x,h}$  les opérateurs de translation d'un pas respectivement en avant et en arrière et l'on introduit les opérateurs

$$D_{x,h} = \frac{\theta_{x,h} - 1}{ih} \quad (2)$$

$$\bar{D}_{x,h} = \frac{1 - \bar{\theta}_{x,h}}{ih} \quad (3)$$

Enfin, on pose

$${}^s D_{x,h} = \frac{1}{2} (D_{x,h} + \bar{D}_{x,h}) = \frac{\theta_{x,h} - \bar{\theta}_{x,h}}{2h} \quad (4)$$

On prend  $\mathcal{D}(R_x^1)$  comme domaine de l'opérateur (1) et les traces des fonctions de  $\mathcal{D}(R_x^1)$  sur  $R_{x,h}^1$  comme domaine des opérateurs (2) (4). On a,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  :

$$\left. \begin{aligned} (D_x - D_{x,h})\varphi &= 0(h) \\ (D_x - \bar{D}_{x,h})\varphi &= 0(h) \\ (D_x - {}^s D_{x,h})\varphi &= 0(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (h \rightarrow 0)$$

Donc, apparemment l'opérateur (4) approche mieux l'opérateur (1) que (2), (3). Néanmoins, cet opérateur ne conserve pas sur  $R_{x,h}^1$  la propriété fondamentale de (1), à savoir, celle de n'avoir pour solutions de l'équation homogène correspondante que les constantes, car on a parmi les solutions de l'équation

$${}^s D_{x,h} u = 0$$

la fonction  $(-1)^{\frac{x}{h}}$  qui possède sur  $R'_{x,h}$  de très mauvaises propriétés de régularité, vu que les dérivées au sens de différences finies de cette fonction sont

$$D_{x,h}^k (-1)^{\frac{x}{h}} = (2i)^k h^{-k} (-1)^{\frac{x}{h}} \sim 0(h^{-k}) (h \rightarrow 0)$$

$$D_{x,h}^k (-1)^{\frac{x}{h}} = (-2i)^k h^{-k} (-1)^{\frac{x}{h}} \sim 0(h^{-k}) (h \rightarrow 0).$$

Par contre, toutes les solutions des équations

$$D_{x,h} u = 0 \quad \bar{D}_{x,h} u = 0$$

sont constantes sur  $R^1_{x,h}$ .

Introduisant les analogues discrets des normes de Sobolev d'ordre 0 et 1 :

$$\|u\|_{0,h}^2 = \sum_{x \in R'_{x,h}} |u(x)|^2 h, \quad \|u\|_{1,h}^2 = \|u\|_{0,h}^2 + \|D_{x,h} u\|_{0,h}^2,$$

on constate que la majoration,

$$\|u\|_{1,h} \leq C (\|{}^s D_{x,h} u\|_{0,h} + \|u\|_{0,h})$$

avec une constante  $C$  indépendante de  $h$  est impossible, car il suffit de prendre  $u = h(-1)^{\frac{x}{h}} C(x)$ ,  $C \in \mathcal{D}$ , pour obtenir une contradiction avec (5), le premier membre étant  $0(1)$  et le second  $0(h)$  ( $h \rightarrow 0$ ). On va passer maintenant à l'introduction des analogues discrets des espaces de Sobolev  $H_s(R_x^n)$  et ensuite à l'introduction et l'étude d'une algèbre des opérateurs aux différences finies qui permettra d'établir la théorie elliptique de ces opérateurs.

§ 1. ESPACES DES FONCTIONS DE MAILLES

1) Notations : On désigne par  $\mathbb{Z}^n$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}_x^n$  à coordonnées nombres entiers et par  $R_{x,h}^n$  ou  $R_h^n$  la famille de réseaux de pas  $h$  dans  $\mathbb{R}_x^n$  qui s'obtient de  $\mathbb{Z}^n$  par l'homothétie :

$$R_{x,h}^n = h\mathbb{Z}^n, \quad h \in ]0, h_0].$$

$h_0$  est supposé fixe et suffisamment petit.

On note par  $T_{\xi,h}^n$  ou par  $T_h^n$  tout court la famille des tores duals à  $R_h^n$  :  $T_h^n = \{\xi \in \mathbb{R}_{\xi}^n, |h\xi_j| \leq \pi\}$ .

Les symboles  $\theta_{x_j,h}$  et  $\bar{\theta}_{x_j,h}$  sont réservés pour les opérateurs de translation d'un pas  $h$  le long de l'axe des  $x_j$  respectivement en avant et en arrière.

On introduit

$$D_{x_j,h} = (ih)^{-1}(\theta_{x_j,h} - 1), \quad \bar{D}_{x_j,h} = (ih)^{-1}(1 - \bar{\theta}_{x_j,h})$$

les opérateurs de dérivation au sens des différences finies, respectivement en avant et en arrière, multipliés par  $-i$ .

On pose :

$$\zeta_{\xi_j} = (ih)^{-1}(\exp(ih\xi_j) - 1),$$

$$\zeta_{\xi} = (\zeta_{\xi_1}, \dots, \zeta_{\xi_n}), \quad \omega_{\xi} = \zeta_{\xi} |_{h=1}$$

On note pour tout multi-index  $\alpha$  :

$$D_{x,h}^{\alpha} = D_{x_1,h}^{\alpha_1} \dots D_{x_n,h}^{\alpha_n}, \quad Z^{\alpha} = Z_1^{\alpha_1}, \dots, Z_n^{\alpha_n}, \quad \langle Z \rangle^s = (1 + |Z|^2)^{s/2},$$

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n.$$

2) Espaces  $\mathcal{S}_h$ ,  $\mathcal{S}'_h$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_h^h$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}'_h^h$ .

Définition 1.1 : On appelle fonction de mails (f.m.) toute application

$$u : ]0, h_0] \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}^p \quad (1.1)$$

continue en  $h \in ]0, h_0]$ .

Pour tout  $h \in ]0, h_0]$  on peut considérer une f.m.  $u(x)$  comme une application

$$u : \mathbb{R}_{x,h}^n \rightarrow \mathbb{C}^p. \quad (1.2)$$

On désigne par  $\mathcal{S}_h$  l'ensemble des f.m. à décroissance rapide pour  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{S}'_h$  désignant l'ensemble dual des f.m. à croissance lente pour  $|x| \rightarrow \infty$ . On désigne par  $\mathcal{S}(0, h_0)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}_h$  de f.m.  $\varphi^{(x)}$  pour lesquelles sont finies les semi-normes :

$$\sup_h \sup_x \langle x \rangle^j |D_{x,h}^\alpha \varphi| < \infty, \quad \forall (j, \alpha)$$

a) A toute f.m.  $u \in \mathcal{S}_h$  on fait correspondre sa transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{u}^h(\xi) = F_{x \rightarrow \xi, h} u = \sum_{x \in \mathbb{R}_{x,h}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi h^n} \quad (1.3)$$

avec la formule évidente d'inversion

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi,h}^n} e^{ix \cdot \xi} \tilde{u}^h(\xi) d\xi$$

et celle de Perséval

$$\sum_x u(x) \overline{v(x)} h^n = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi,h}^n} \tilde{u}^h(\xi) \overline{\tilde{v}^h(\xi)} d\xi$$

En outre,

$$F_{x \rightarrow \xi, h}(D_{x, h}^\alpha u) = \zeta_\xi^\alpha \tilde{u}^h, \quad F_{x \rightarrow \xi, h}(\overline{D}_{x, h}^\alpha u) = \bar{\zeta}_\xi^\alpha \tilde{u}^h, \quad F_{x \rightarrow \xi, h}(x^\alpha u) = (i \partial_\xi)^\alpha \tilde{u}^h(\xi)$$

Il est clair que  $\tilde{\mathcal{S}}_h = F_{x \rightarrow \xi, h} \mathcal{S}_h$  est l'ensemble des fonctions  $\tilde{u}^h(\xi) \in C_\xi^\infty$ , périodiques en  $\xi$  de période  $2\pi/h$ ,  $\forall h \in ]0, h_0]$ .

De même,  $\tilde{\mathcal{S}}_h' = F_{x \rightarrow \xi, h} \mathcal{S}_h'$  est l'ensemble des distributions périodiques de périodes  $2\pi/h$  d'ordre fini,  $\forall h \in ]0, h_0]$ .

$$\tilde{\mathcal{S}}(0, h_0) = \{u : \sup_h \sup_x \langle \zeta_\xi \rangle^j |\partial_\xi^\alpha u^h| < \infty\}.$$

b) Opérateurs de restriction  $\pi_n$  et de prolongement  $\ell_n$ .  
 Pour toute fonction  $u \in C(\mathbb{R}_x^n)$  est définie la projection (restriction sur  $\mathbb{R}_{x, h}^n$ ) :

$$\pi_h u = u(x), \quad x \in \mathbb{R}_{x, h}^n$$

Pour toute f.m.  $u \in \mathcal{S}_h$  est défini l'opérateur de prolongement  $\ell_n$  :

$$\ell_h u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi, h}^n} e^{ix \cdot \xi} \tilde{u}^h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}_x^n \quad (1.4)$$

Proposition 1.1 : on a l'inclusion :

$$\pi_h \mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{S}}(0, h_0)$$

les semi-normes

$$|\varphi|_{k, j} = \sup_h \sup_x \langle x \rangle^k \sum_{|\alpha|=j} |D_{x, h}^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

étant finies,  $\forall k, j, \forall \varphi \in \mathcal{S}$ , et vérifiant les inégalités :

$$|\varphi|_{k, j} \leq 2^{k/2} (1 + j^2 h_0^2)^{k/2} [\varphi]_{k, j}$$

où  $[\varphi]_{k, j}$  sont les semi-normes correspondantes dans  $\mathcal{S}$ . La démonstration est immédiate.



3) Espaces  $H_s(0, h_0)$  : On introduit les normes

$$\|u\|_{s,h}^2 = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi,h}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{u}^h(\xi)|^2 d\xi \quad (1.5)$$

$$[|u|]_s = \sup_{0 < h \leq h_0} \|u\|_{s,h} \quad (1.6)$$

et l'on désigne par  $H_s(0, h_0)$  l'ensemble de  $u \in \mathcal{S}'_h$  à la norme (1.6) finie.

Pour  $s = m \geq 0$ ,  $m$  entier, on vérifie aisément que  $H_m(0, h_0)$  est l'espace des f.m.  $u$  telles que

$$\sup_h \sum_{x \in \mathbb{R}_{x,h}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} |D_{x,h}^\alpha u|^2 h^n < \infty$$

Evidemment,  $H_{s_1}(0, h_0) \leq H_{s_2}(0, h_0)$  si  $s_1 \leq s_2$ . L'opérateur  $\pi_h$  étant défini sur  $H_s$  avec  $s \geq n/2$ , on peut demander si

$$\pi_h H_s \subset H_s(0, h_0).$$

La réponse est fournie par le

Théorème 1.1 : Soit  $u \in H_s$ ,  $s > n/2$ . Alors  $\pi_h u \in H_t(0, h_0)$ ,  $\forall t \leq s$  et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\pi_h u\|_{t,s} \leq \|u\|_t + C_{s,t} h^{s-t} \left( \int_{CT_{\xi,h}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ \|u\|_t \leq [|\pi_h u|]_t \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Démonstration : On pose

$$v = \pi_h u$$

et l'on utilise la formule de Poisson :

$$\tilde{v}^h(\xi) = \tilde{u}(\xi) + \tilde{w}(\xi)$$

avec

$$w(\xi) = \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}^n} \tilde{u}(\xi + 2\pi \alpha h^{-1}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$|\tilde{w}(\xi)|^2 \leq C_s h^{2s} \sum_{\alpha} \langle \xi + 2\pi \alpha h^{-1} \rangle^{2s} |\tilde{u}(\xi + 2\pi \alpha h^{-1})|^2, \quad \forall \xi \in T_{\xi, h}^n \quad (1.8)$$

Multipliant (1.8) par  $\langle \zeta_{\xi} \rangle^{2t}$  et intégrant par  $\xi \in T_{\xi, h}^n$ , on obtient la première des inégalités (1.7).

Pour prouver la seconde, on utilise (1.8) et le théorème de Lebesgue .

Remarque 1.2 : Il résulte des inégalités (1.7) que pour tout  $u \in H_s$  avec  $s > n/2$ , on a :

$$\|u\|_t = \lim_{h \rightarrow 0} \|\pi_h u\|_{t, h}, \quad \forall t \leq s.$$

Pour  $s$  quelconque on peut se donner une autre projection qui garantit l'inclusion voulue et donne sur les réseaux une f.m. qui pour  $h$  petit diffère peu de la fonction donnée initialement. Notamment est vraie la

Proposition 1.2 : Soit  $u \in H_s$ . Alors il existe  $v_h$  vérifiant les conditions :

- a)  $v_h \in H_{s+t}$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $h^t \|v_h\|_{s+t} \leq C_{s, t} \|u\|_s$
- b)  $\pi_h v_h \in H_s(0, h_0)$ ,  $[|\pi_h v_h|]_s \leq C \|u\|_s$
- c)  $\|u - v_h\|_{s-s'} \leq C_{s, s'} h^{s-s'} \|u\|_{s'}$ ,  $\forall s' \leq s$ .

Démonstration : Soit  $\phi_0(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\xi^n)$ ,  $1 \geq \phi_0(\xi) \geq 0$ ,  $\phi_0(\xi) \equiv 1$  dans un voisinage du zéro,  $\text{supp } \phi_0 \subset \{|\xi| \leq 1\}$ . On pose :

$$\tilde{v}_h(\xi) = \phi_0(h\xi) \tilde{u}(\xi)$$

Les propriétés a), c) sont évidentes. La propriété b) résulte du théorème 1.1 et de a).

Proposition 1.3 : Soit  $u \in H_s(0, h_0)$ . Il existe un prolongement  $\mathcal{L}_h u = v_h$  vérifiant les inégalités :

$$h^t \|v_h\|_{s+t} \leq C_{s,t} [|u|]_s, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.9)$$

Démonstration : On utilise le prolongement :

$$v_h(x) = \mathcal{L}_n u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi, h}^n} e^{ix \cdot \xi} \tilde{u}^h(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}_x^n. \quad (1.10)$$

On peut trouver dans [6] une étude assez détaillée des espaces de fonctions de mailles, y compris ceux qui pourraient être utilisés dans les problèmes aux limites discrètes.

§ 2. OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES. CLASSES DE SYMBOLES  $K_\nu$ .  
SYMBOLE GRADUE. CLASSES  $\mathcal{L}_\nu$ .

1) Classes  $K_\nu$  de symboles canoniques

Soit une fonction  $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0 \pmod{2\pi}\})$  à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre  $p$ , périodique en  $\xi$  de périodes  $(2\pi, \dots, 2\pi)$ .

On suppose, en outre, qu'il existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x, \xi) = a(\infty, \xi)$$

et l'on note

$$\mathcal{A}(x, \xi) = a(x, \xi) - a(\infty, \xi).$$

Pour tout couple de multi index  $\alpha, \beta$  et tout  $j$  entier  $\geq 0$ , on pose :

$$a_\beta^\alpha(x, \xi) = D_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)$$

$$\tilde{a}_{\langle x \rangle^j \xi^\alpha}(\chi, \xi) = \langle \chi \rangle^j F_{x \rightarrow \chi} a^\alpha$$

et l'on introduit les normes

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}_{\langle x \rangle}^j \xi^\alpha\|_{|\alpha|^{-\nu}} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_x^n} \sup_{\xi} \langle x \rangle^j |\tilde{\alpha}^\alpha(x, \xi)| |\omega_\xi|^{|\alpha|^{-\nu}} dx + \\ &+ (2\pi)^{-n} \sup_{\xi} |a^\alpha(\infty, \xi)| |\omega_\xi|^{|\alpha|^{-\nu}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec  $\omega_\xi = (\omega_{\xi_1}, \dots, \omega_{\xi_n})$ ,  $\omega_{\xi_j} = -i(e^{i\xi_j} - 1)$

Définition 2.1 : On définit pour tout  $\nu$  réel la classe  $k_\nu$  des fonctions matricielles avec les propriétés ci-dessus et telles que les normes (2.1) sont finies,  $\forall \alpha, j$ ; les éléments de  $k_\nu$  sont dits symboles canoniques.

Remarque 2.1 : La fonction  $h^{-\nu} a(x, h\xi)$  homogène d'ordre  $\nu$  en  $(h^{-1}, \xi)$  est analogue à un symbole homogène d'ordre  $\nu$  dans le cas pseudodifférentiel. En outre, si pour tout compact  $k \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  on a

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h^{-\nu} a(x, h\xi) = \alpha(x, \xi) \neq 0,$$

alors  $\alpha(x, \xi)$  est homogène d'ordre  $\nu$  et  $\alpha(x, \xi) \in \mathcal{S}^\nu$  (classe de Kohn-Nirenberg, Hörmander, [1], [2]).

Définition 2.2 : Soit une suite numérique monotone  $\{\mathcal{J}_j\}$ ,  $\mathcal{J}_j \rightarrow -\infty$ , et une suite de symboles canoniques  $\{\mathcal{J}_a^j\}$ ,  $\mathcal{J}_a^j \in k_{\mathcal{S}_j}$ . On appelle symbole gradué et l'on note  $\sigma_\Gamma(a)$  la somme formelle

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j=0} \mathcal{J}_a^j(x, \xi), \quad \mathcal{J}_a^j \in k_{\mathcal{S}_j}$$

## 2) Classes $\mathcal{L}_\nu$

Soit une fonction  $a(h, x, \xi)$  sur  $]0, h_0] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre  $p$ . On suppose que  $a \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ ,  $a \in C(]0, h_0] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ ,  $a$  est périodique en  $\xi$  de périodes  $(2\pi/h, \dots, 2\pi/h)$ . Avec les mêmes hypothèses de comportement à l'infini ( $|x| \rightarrow \infty$ ) et les mêmes notations que ci-dessus on pose

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}_{\langle x \rangle}^j \xi^\alpha\|_{|\alpha|^{-\nu}} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_x^n} \sup_{h, \xi} \langle x \rangle^j |\tilde{\alpha}^\alpha(x, \xi)| \langle \zeta_\xi \rangle^{|\alpha|^{-\nu}} dx + \\ &+ (2\pi)^{-n} \sup_{h, \xi} |a^\alpha(h, \infty, \xi)| \langle \zeta_\xi \rangle^{|\alpha|^{-\nu}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Soit  $\varphi(t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^1)$ ,  $\varphi \equiv 1$  pour  $t \geq 1$ ,  $\varphi \equiv 0$  pour  $0 \leq t \leq 1/2$ ,  $1 \geq \varphi \geq 0$ .

On note

$$\varphi_\xi = \varphi(|\zeta_\xi|)$$

**Définition 2.3** : Pour tout  $\nu$  réel on définit la classe  $\mathcal{L}_\nu$  des fonctions matricielles  $a(h, x, \xi)$  ayant les propriétés ci-dessus et telles qu'il existe un symbole gradué

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j \geq 0} j a(x, \xi), \quad j a \in k_{s_j}, \quad s_0 = \nu, \quad s_j \rightarrow -\infty$$

tel que pour tout  $N \geq 0$ ,  $N$  entier, les restes

$$N_\tau(h, x, \xi) = \begin{cases} a(h, x, \xi) - \varphi_\xi \sum_{0 \leq j < N} h^{-s_j} k_a(h, x, \xi), & N > 0 \\ a(h, x, \xi), & N = 0 \end{cases} \quad (2.)$$

vérifient les inégalités :

$$|\widetilde{N}_\tau \langle x \rangle^j \xi^\alpha| |\alpha|^{-s_N} < \infty, \quad \forall j, \alpha, N$$

**Théorème 2.1** : Soit un symbole gradué  $\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j \geq 0} j a$ ,  $j a \in k_{s_j}$ ,  $s_0 = \nu$

Alors il existe un symbole  $a(h, x, \xi) \in \mathcal{L}_\nu$  ayant  $\sigma_\Gamma(a)$  pour symbole gradué.

**Démonstration** : Soit  $\varphi(t)$  la fonction introduite ci-dessus et  $\{t_k\}$  une suite numérique  $t_0 = 1$ ,  $t_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . On note

$$k_b(h, x, \xi) = \varphi(t_k |\zeta_\xi|) h^{-s_k} k_a(x, h, \xi) \quad (2.5)$$

et l'on pose

$$a(h, x, \xi) = \sum_{k \geq 0} k_b(h, x, \xi)$$

Choisissant  $t_k$  de manière à ce que  $t_k \rightarrow 0$  assez rapidement, on prouve que  $a \in \mathcal{L}_\nu$ . D'autre part, on vérifie aisément que  $a(h, x, \xi)$  a pour symbole gradué  $\sigma_\Gamma(a)$  donné initialement.

§ 3. DEFINITION D'UN OPERATEUR AUX DIFFERENCES FINIES (o.d.f.)

Soit  $a \in \mathcal{L}_\nu$ . On définit une famille des o.d.f.  $A^h$ ,

$$A^h : \mathcal{S}'_h \rightarrow \mathcal{S}'_h$$

par la formule

$$A^h u = F_{\xi \rightarrow x, h}^{-1} a(h, x, \xi) F_{x \rightarrow \xi, h} u + T_\infty^h, \quad \forall u \in \mathcal{S}'_h$$

où  $T_\infty^h$  est un opérateur tel que pour tout  $s$  on a :

$$T_\infty^h H_s(0, h_0) \subset H_\tau(0, h_0) \tag{3.1}$$

On appelle symbole de  $A^h$  et l'on note  $\sigma(A^h)$  la fonction  $a(h, x, \xi)$ . Tout opérateur  $T_\infty^h$  ayant la propriété (3.1) sera dit régularisant. Le symbole gradué de  $a$  est dit symbole gradué de  $A^h$  et est noté :  $\sigma_\Gamma(A^h)$ .

Exemples : a)  $a(h, x, \xi) = e^{ih\xi k}$ . On vérifie aisément que

$$a \in \mathcal{L}_0, \quad \sigma_\Gamma(a) = \Sigma^j a, \quad {}^0 a = e^{i\xi k}, \quad j_a \equiv 0, \quad j \geq 1, \quad s_0 = 0$$

$s_j$  quelconque, pourvu que  $s_j \rightarrow -\infty, s_j < 0, j \geq 1$ . L'opérateur  $A^h$  correspondant est la translation en avant  $\theta_{x_j, h}$  d'un pas le long de l'axe des  $x_j$ .

$$b) \quad a(h, x, \xi) = -|\zeta_\xi|^2 \in \mathcal{L}_2, \quad {}^0 a(x, \xi) = -|\omega_\xi|^2, \quad s_0 = 2,$$

$j_a \equiv 0, s_j$  sont arbitraires, pourvu que  $s_j \rightarrow -\infty, s_j < 2, j > 0$ .

Le symbole  $-|\zeta_\xi|^2$  définit l'approximation classique  $\Delta^h$  de l'opérateur de Laplace, dite "croix" qui s'exprime par la formule

$$\Delta^h u = \sum_{j=1}^n \frac{u(x+he_j) - 2u(x) + u(x-he_j)}{h^2} = -D_{x, h} \bar{D}_{x, h} u$$

où  $e_j$  est le vecteur-unité le long de l'axe des  $x_j$ .

$$c) \quad a(h, x, \xi) = h^2 |\zeta|^4 + |\zeta|^2 + b_1 \zeta + b_2 \bar{\zeta} + C, \quad a \in \mathcal{L}_2,$$

$${}^0a = |\omega|^4 + |\omega|^2, \quad {}^1a = b_1\omega + b_2\bar{\omega}, \quad {}^2a = C, \quad {}^3a = {}^4a = \dots = 0, \quad v = s_0 = 2, \\ s_1 = 1, \quad s_0 = 0, \quad s_j \rightarrow -\infty, \quad s_j < 0.$$

L'opérateur correspondant s'exprime par la formule :

$$A^h = h^2(D_{x,h} \bar{D}_{x,h})^2 + D_{x,h} \bar{D}_{x,h} + b_1 D_{x,h} + b_2 \bar{D}_{x,h} + C.$$

d)  $a(h, x, \xi) = \langle \zeta_\xi \rangle^{-2} \in \mathcal{L}_{-2}$ ,  $j_a(x, \xi) = (-1)^j |\omega_\xi|^{-2(j+1)} \in \mathcal{K}_{-2j-2}$ ,  $s_j = -2(j+1)$ . L'opérateur  $A^h$  correspondant est la fonction de Green discrète de l'opérateur  $I - \Delta_h$ , où  $\Delta_h$  est le laplacien discret de l'exemple b).

---

E R R A T A

<u>Pages</u>	<u>Au lieu de :</u>	<u>Lire :</u>
V.10 Ligne 9	$N_{\tau}(h, x, \xi) = \begin{matrix} a(\dots \\ a(\dots \end{matrix}$	$N_r(h, x, \xi) = \begin{matrix} a(\dots \\ a(\dots \end{matrix}$
V.10 Ligne 11	$ \widetilde{N}_{\tau \langle x \rangle} \dots$	$ \widetilde{N}_r \langle x \rangle \dots$
V.10 Ligne 16	$\dots k_a(x, h, \xi)$	$\dots k_a(x, h\xi)$
V.11 Ligne 5	$\dots + T_{\infty}^h$	$\dots + T_{\infty}^h u, \forall \dots$

---