

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

**Théorèmes de factorisation dans les espaces  $L^p$  (suite)**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 4, p. 1-7*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A4_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES PARIS 6  
Téléphone : MÉDICIS 3. 17  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES  $L^p$   
(suite)

par B. MAUREY

Exposé n° IV

18 Octobre 1972



Nous commencerons cet exposé en tirant les conséquences du corollaire du théorème 3 de l'exposé précédent.

Faisons une remarque évidente : soit  $F$  un espace de Banach tel que tout opérateur  $u$  de  $F$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ . La même propriété est alors vraie pour tout quotient de  $F$ .

Théorème 1 : a) Soient  $(X, \nu)$  et  $(\Omega, \mu)$  deux espaces mesurés quelconques. Tout opérateur linéaire de  $L^s(X, \nu)$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $s = +\infty$  ;  $1 \leq p \leq q \leq 2$
- 2)  $2 \leq s < +\infty$  ;  $0 < p \leq q \leq 2$
- 3)  $1 \leq s \leq 2$  ;  $0 < p \leq q < s$

b) Soient  $p, q$  tels que  $0 < p \leq q < 1$ . Tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach  $E$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  se factorise par  $L^q(\Omega, \mu)$ .

Démonstration : Dans a), on traduit les théorèmes suivants sur les applications  $p$ -sommantes :

- 1)  $\forall F, \pi_2(L^1, F) = \pi_1(L^1, F)$  [2] ou [6]
- 2)  $\forall F, \pi_2(L^{s'}, F) = \pi_p(L^{s'}, F), 0 < p \leq 2 \leq s < +\infty$
- 3)  $\forall F, \pi_q(L^{s'}, F) = \pi_p(L^{s'}, F), 0 < p < q < s \leq 2, (\text{voir [4]}).$

Pour montrer b), on remarque que  $E$  est un quotient d'un  $l^1(I)$  pour  $I$  convenable, et on applique :

$$\forall F, \pi_q(c_0(I), F) = \pi_p(c_0(I), F), \quad 0 < p < q < 1 \quad (\text{voir [1]})$$

Notons que le théorème 1b implique immédiatement le résultat suivant : tout espace de Banach plongéable dans un espace  $L^p(\Omega, \mu)$  avec  $0 < p < 1$  est plongéable dans  $L^q(\Omega, \mu)$  pour tout  $q$  tel que  $0 < p < q < 1$ .

Le théorème 1 permet de résoudre un problème posé par Lindenstrauss et Pelczynski [6], résolu par S. Kwapien par une méthode totalement différente : [5].

Corollaire : Soient  $(X, \nu)$  et  $(\Omega, \mu)$  deux espaces mesurés,  $p, q, r$  trois réels tels que  $1 \leq p \leq q \leq r \leq +\infty$ . Tout opérateur linéaire de  $L^r(X, \nu)$  dans  $L^p(\Omega, \mu)$  se factorise par un espace  $L^q$ . (Mais pas nécessairement par  $L^q(\Omega, \mu)$ !)

Démonstration : Les cas :

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \leq r \leq \infty \quad \text{et} \quad 1 \leq p \leq q \leq r \leq 2$$

sont donnés par le théorème 1, ou sont évidents (si  $q = r$ )

On obtient par transposition les cas :

$$1 \leq p \leq 2 \leq q \leq r \leq +\infty \quad \text{et} \quad 2 \leq p \leq q \leq r \leq +\infty,$$

ce qui couvre finalement tous les cas possibles.

Nous examinerons maintenant le problème transposé du problème étudié dans l'exposé précédent : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu  $u$  de  $L^q(\Omega, \mu)$  dans un espace quasi-normé  $E$  admette la factorisation :

$$L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu) \longrightarrow E, \quad 0 < p \leq q \leq \infty.$$

En fait nous allons résoudre une question un peu plus générale. Soient  $S_q$  un sous-espace fermé de  $L^q(\Omega, \mu)$ , et  $u \in L(S_q, E)$ . Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  admette la factorisation :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} L^q(\Omega, \mu) & \xrightarrow{T_g} & L^p(\Omega, \mu) \\ \cup & & \cup \\ S_q & \xrightarrow{j_g} & S_p \longrightarrow E \end{array}$$

où  $S_p$  est un sous-espace fermé de  $L^p(\Omega, \mu)$ ,  $0 < p \leq q \leq \infty$ ,  $g \in L^r(\Omega, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ , et  $j_g$  l'opérateur induit par la multiplication  $T_g$ .

Cela signifie exactement que :

$$\forall f \in S_q, \quad \|u(f)\| \leq \left( \int |gf|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Le théorème suivant est l'analogie du théorème 1 de l'exposé précédent :

Théorème 2 : Soient  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $I$  un ensemble d'indices,  $p, q, r$  tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ , et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $L^q(\Omega, \mu)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \exists g \in L^r(\Omega, \mu) \quad \int |g|^r d\mu = 1, \text{ et} \\ & \forall i \in I \quad \int |gf_i|^p d\mu \geq 1 \end{aligned}$$

b) Pour tout  $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$ , on a :

$$(\sum |\alpha_i|^p)^{1/p} \leq \left( \int (\sum |\alpha_i f_i|^p)^{q/p} d\mu \right)^{1/q}$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème 1 de l'exposé précédent. Esquissons-la dans le cas  $0 < p < q < +\infty$ . Posons  $s = \frac{q}{p}$ . Soit  $K$  le convexe compact pour  $\sigma(L^{s'}, L^s)$  des fonctions  $g \geq 0$  telles que  $\int |g|^{s'} d\mu \leq 1$ .

Pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$ , on définit  $F_\alpha$  sur  $K$  par :

$$F_\alpha(g) = \sum \int |\alpha_i f_i|^p g d\mu - \sum |\alpha_i|^p$$

chaque  $F_\alpha$  est continue et affine sur  $K$ , et l'ensemble des  $F_\alpha$  est convexe. De plus :

$$F_\alpha(g_\alpha) \geq 0, \text{ avec } g_\alpha = \frac{(\sum |\alpha_i f_i|^p)^{q/r}}{C},$$

$$\text{et } C = \left( \int (\sum |\alpha_i f_i|^p)^{q/p} d\mu \right)^{1/s'}.$$

On conclut par le lemme de l'exposé précédent .

Corollaire : Soient  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $E$  un espace quasi-normé,  $p$  et  $q$  tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$ ,  $S_q$  un sous-espace fermé de  $L^q(\Omega, \mu)$ , et  $u$  un opérateur linéaire continu de  $S_q$  dans  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $u$  admet la factorisation (1)

b) Il existe une constante  $C$  telle que pour toute suite  $(f_n)$  d'éléments de  $S_q$ , on ait :

$$(\sum \|u(f_n)\|^p)^{1/p} \leq C \left( \int (\sum |f_n|^p)^{q/p} d\mu \right)^{1/q}$$

Démonstration : On se ramène immédiatement à l'application du théorème 2, en prenant

$$I = S_q \div \{f \in S_q \mid u(f) = 0\}, \text{ et si } x \in I, f_x = \frac{x}{\|u(x)\|}.$$

Nous utiliserons le résultat suivant, qui est très facile :

Proposition 1 : Soient  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $q \in ]0, +\infty[$ ,  $S_q$  un sous-espace fermé de  $L^q(\Omega, \nu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \nu)$ ,  $T_g$  l'opérateur de multiplication par  $g$  de  $L^\infty(\Omega, \mu)$  dans  $L^q(\Omega, \nu)$ ,  $S_\infty = T_g^{-1}(S_q)$ , et  $j_g$  l'opérateur induit par  $T_g$  sur  $S_\infty$ . L'opérateur  $j_g$  est  $q$ -sommant, avec

$$\pi_q(j_g) \leq \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Faisons quelques remarques à propos de la définition des applications  $p$ -sommantes. Soient  $E$  un espace de Banach,  $F$  un sous-espace fermé de  $E$ , et  $(x_1, \dots, x_n) \in F$ . On a d'après Hahn-Banach :

$$\sup_{\substack{\xi \in F' \\ \|\xi\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{1/p} = \sup_{\substack{\eta \in E' \\ \|\eta\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{1/p}$$

Si maintenant  $E$  est le dual d'un espace de Banach  $G$ , la boule unité de  $G$  est dense dans celle de  $E'$  pour  $\sigma(E', E)$ , donc :

$$\sup_{\substack{\eta \in E' \\ \|\eta\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{1/p} = \sup_{\substack{\zeta \in G \\ \|\zeta\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \zeta \rangle|^p)^{1/p}$$

Ces deux remarques seront utilisées dans la démonstration du théorème suivant, qui est l'analogie du corollaire du théorème 3 de l'exposé précédent :

Théorème 3 : Soient E un espace quasi-normé, p, q deux réels tels que  $0 < p \leq q \leq +\infty$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une constante C telle que pour tout espace de Banach F et tout opérateur  $v \in \pi_q(F, E)$ , on ait

$$\pi_p(v) \leq C \pi_q(v)$$

b) Pour tout espace mesuré  $(\Omega, \mu)$  et tout sous-espace fermé  $S_q$  de  $L^q(\Omega, \mu)$ , tout opérateur linéaire continu de  $S_q$  dans E admet la factorisation (1):

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_p \longrightarrow E$$

Démonstration : Démontrons b)  $\Rightarrow$  a). D'après [8], tout opérateur q-sommant de F dans E admet la factorisation :

$$\begin{array}{ccccccc} L^\infty(\Omega, \mu) & \xrightarrow{j} & L^q(\Omega, \mu) & & & & \\ \cup & & \cup & & & & \\ F & \longrightarrow & S_\infty & \longrightarrow & S_q & \longrightarrow & E, \end{array}$$

où  $\mu$  est une probabilité et j l'injection canonique. On en déduit aisément que b)  $\Rightarrow$  a).

Montrons que a)  $\Rightarrow$  b). Soient  $(f_1, \dots, f_n) \in S_q$ . Considérons  $g = (\sum |f_i|^p)^{1/p}$ , et  $S_\infty = T_g^{-1}(S_q)$ . Posons  $h_i = \frac{f_i}{g}$ . On a  $|h_i| \leq 1$ , donc  $h_i \in S_\infty$ . D'après la proposition 1,  $u \circ j_g$  est q-sommant, avec :

$$\pi_q(u \circ j_g) \leq \|u\| \|g\|_{L^q}$$

donc d'après l'hypothèse a) :

$$\pi_p(u \circ j_g) \leq C \|u\| \|g\|_{L^q}$$



Posons  $K = C \|u\| \|g\|_q$ . On a par conséquent, d'après les remarques qui précèdent le théorème 3 :

$$\begin{aligned} (\Sigma \|u(f_i)\|^p)^{1/p} &= (\Sigma \|u \cdot j_g(h_i)\|^p)^{1/p} \\ &\leq K \sup_{\substack{\varphi \in L^1 \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\Sigma |\int h_i \varphi \, d\mu|^p)^{1/p} \\ &\leq K \sup_{\substack{\varphi \in L^1 \\ \|\varphi\| \leq 1}} \int (\Sigma |h_i|^p)^{1/p} |\varphi| \, d\mu \end{aligned}$$

Mais  $(\Sigma |h_i|^p)^{1/p} = 1$ , donc :

$$(\Sigma \|u(f_i)\|^p)^{1/p} \leq C \|u\| (\int (\Sigma |f_i|^p)^{q/p} \, d\mu)^{1/q},$$

d'où le résultat par le corollaire du théorème 2.

Nous admettons le résultat suivant : (voir [7] et [4]).

Proposition 2 : Soit  $E$  un espace quasi-normé plongeable dans un espace  $L^0(\Omega, \mu)$ , ou un Banach isomorphe à un sous-espace d'un quotient d'un  $L^p(\Omega, \mu)$ , avec  $1 < p \leq 2$ . Pour tout  $q < \infty$ , il existe une constante  $C_q$  telle que pour tout Banach  $F$ , et tout  $v \in \pi_q(F, E)$ , on ait :

$$\pi_2(v) \leq C_q \pi_q(v)$$

Théorème 4 : Soient  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $E$  un espace vérifiant les hypothèses de la proposition 2,  $S_q$  un sous-espace fermé de  $L^q(\Omega, \mu)$ , avec  $2 \leq q < +\infty$ . Tout opérateur linéaire continu  $u$  de  $S_q$  dans  $E$  admet la factorisation :

$$S_q \xrightarrow{j_g} S_2 \longrightarrow E .$$

En particulier, tout opérateur linéaire continu  $u$  de  $S_q$  dans  $E$  admet un prolongement linéaire et continu de  $L^q(\Omega, \mu)$  dans  $E$ .

Démonstration : La première assertion résulte immédiatement du théorème 3 et de la proposition 2, la deuxième du fait que  $S_2$  est complété dans  $L^2(\Omega, \mu)$ .

Le théorème 4 admet le corollaire suivant, qui généralise un théorème de Kadec et Pelczynski [3].

Corollaire : Soit  $E$  un sous-espace de  $L^q(\Omega, \mu)$  vérifiant les hypothèses de la proposition 2, avec  $2 \leq q < +\infty$ . L'espace  $E$  est hilbertisable et il est complété dans  $L^q(\Omega, \mu)$ .

Démonstration : D'après le théorème 4, l'identité de  $E$  admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{j_g} S_2 \xrightarrow{\bar{u}} E ,$$

d'où résultent immédiatement les résultats voulus.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Chevet : Deux journées p-radonifiantes, exposé n°2, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1971-72.
- [2] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. da Soc. Math. de Sao-Paulo 8 (1956) p.1.79.
- [3] M.I. Kadec et A. Pelczynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces  $L^p$ , Studia Math. 21 (1962) p. 161-176.
- [4] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math. 38 (1970) p. 193-201.
- [5] S. Kwapien : On operators factorizable through  $L^p$  spaces (à paraître).
- [6] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in  $L^p$ -spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.
- [7] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris, (Octobre 1972).
- [8] Séminaire L. Schwartz, 1969-1970.