B. Maurey

Théorèmes de factorisation dans les espaces L^p

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES L^p

par B. MAUREY

Exposé n° III

11 Octobre 1972

En 1956, A. Grothendieck a démontré le théorème suivant ([2], voir aussi [5]) : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^{\infty}(X,\mu)$ dans $L^{1}(Y,\nu)$ admet la factorisation :

$$L^{\infty}(X,\mu) \longrightarrow L^{2}(Y,\nu) \xrightarrow{T_g} L^{1}(Y,\nu) \quad ,$$

où T_g est l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L^{2}(Y,\nu)$. Le but de l'exposé est de démontrer des théorèmes analogues pour des opérateurs de $L^{q}(X,\mu)$ dans $L^{p}(Y,\nu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, et d'établir le lien entre l'existence de tels théorèmes et les théorèmes connus de la théorie des applications p-sommantes.

Pour commencer, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur $u \in L(E,L^{p}(\Omega,\mu))$ se factorise par $L^{q}(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction $g \in L^{r}(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Cela revient à chercher une fonction $g \in L^{r}(\Omega,\mu)$ telle que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \left(\int \left|\frac{u(x)}{g}\right|^{q} d\mu\right)^{1/q} \leq C\,\|x\|$$

Il s'agit donc d'un problème de "division", que nous allons résoudre sous une forme un peu plus générale. Le théorème suivant généralise un théorème de H. P. Rosenthal [8].

<u>Théorème 1</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L^{p}(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \qquad \left(\int (\Sigma|\alpha_i f_i(\omega)|^{q})^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq (\Sigma|\alpha_i|^{q})^{1/q}$

b) Il existe g telle que $\int |g|^{r} d\mu \leq 1$, et :

$$\forall\, i \in I, \qquad \int \left|\frac{f_i}{g}\right|^{q} d\mu \leq 1$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soient K un convexe compact d'un elcs, $\mathcal{H}$ un ensemble convexe de fonctions scs, ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que :

a) Chaque fonction $f \in \mathscr{H}$ est concave

b) $\forall f \in \mathscr{H}$, $\exists\, x \in K$, $f(x) \geq 0$

Il existe alors un point $x_o \in K$ tel que $f(x_o) \geq 0$ pour toute $f \in \mathscr{H}$.

Ce lemme étant admis, démontrons le théorème 1.
Le cas $p = q$ est trivial, le cas $q = \infty$ résulte du fait bien connu qu'une famille filtrante croissante dans $L^p(\Omega,\mu)$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est bornée en norme. Supposons donc $0 < p < q < +\infty$, et posons $s = \frac{q}{p}$ (d'où $s' = \frac{r}{p}$). Désignons par K l'ensemble des fonctions $g \geq 0$ sur Ω telles que $\int g^{s'} d\mu \leq 1$. L'ensemble K est convexe et compact pour la topologie $\sigma(L^{s'},L^s)$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$, considérons la fonction F_α sur K définie par :

$$F_\alpha(g) = \Sigma|\alpha_i|^q - \int \Sigma \frac{|\alpha_i f_i|^q}{g^s} d\mu$$

L'ensemble des F_α est convexe, chaque fonction F_α est concave, et scs (d'après le lemme de Fatou). De plus posons :

$$g_\alpha = \frac{(\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{\frac{1}{ss'}}}{C} \quad , \quad \text{avec } C = (\int(\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu)^{1/s'}$$

On vérifie que $\int g_\alpha^{s'} d\mu = 1$, c'est-à-dire $g_\alpha \in K$, et :

$$F_\alpha(g_\alpha) = \Sigma|\alpha_i|^q - C^s \int (\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{1/s} d\mu$$

$$= \Sigma|\alpha_i|^q - (\int (\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu)^{q/p} \geq 0$$

D'après le lemme, il existe $g_o \in K$ telle que :

$$\forall\, i \in I \qquad \int\frac{|f_i|^q}{g_o^s} d\mu \leq 1, \text{ d'où le résultat avec } g_1 = g_o^{1/p}.$$

Notons finalement que b) $\Rightarrow$ a) est une application facile de l'inégalité de Hölder.

<u>Remarque</u> : Supposons que la famille $(f_i)_{i\in I}$ vérifie l'hypothèse :

$$\Sigma|\alpha_i|^q < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int(\Sigma|\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega) < +\infty$$

On a alors une application linéaire:

$$(\alpha_i) \longrightarrow (\alpha_i f_i(\omega)) \text{ de } l^q(I) \text{ dans } L^p(\Omega,\mu,\ l^q(I)) ,$$

qui est continue par le théorème du graphe fermé. Il existe donc une constante C telle que :

$$\left(\int (\Sigma|\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C(\Sigma|\alpha_i|^q)^{1/q},$$

et l'on peut maintenant appliquer le théorème 1.

On déduit immédiatement du théorème 1 et de la remarque ci-dessus la condition nécessaire et suffisante de factorisation annoncée. (On prendra pour ensemble d'indices I la boule unité de E, et on posera :

$$f_x = u(x)).$$

<u>Corollaire 1</u> : Soient E un espace de Banach, (Ω,μ) un espace mesuré, $u \in L(E,L^p(\Omega,\mu))$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute suite (x_n) d'éléments de E,

$$\Sigma\|x_i\|^q < +\infty \Rightarrow \int (\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q} d\mu < +\infty$$

b) L'opérateur u admet la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu),$$

où T_g est l'opérateur de multiplication par $g \in L^r(\Omega,\mu)$.

Nous allons donner un exemple où l'application du corollaire 1 est particulièrement simple. Dans la suite, nous abrègerons l'énoncé du b) du corollaire 1 sous la forme suivante : $u \in L(E, L^p(\Omega,\mu))$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Corollaire 2</u> : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, u un opérateur <u>positif</u> de $L^q(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, et $q \geq 1$. L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Soient $(x_1,\ldots,x_n) \in L^q(X,\nu)$. On a :

$$(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/q} = \sup\{\Sigma\,\alpha_i u(x_i) \mid \Sigma|\alpha_i|^{q'} \leq 1\}$$

$$\leq u(\sup\{\Sigma\alpha_i\, x_i \mid \Sigma|\alpha_i|^{q'} \leq 1\}) = u((\Sigma|x_i|^q)^{1/q}),$$

puisque u est positif. Donc :

$$\left(\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q}d\mu\right)^{1/q} = \|(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/q}\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

$$\leq \|u\|\ \|(\Sigma|x_i|^q)^{1/q}\|_{L^q(X,\nu)} = \|u\|\ (\Sigma\|x_i\|^q)^{1/q},$$

d'où le résultat.

Avant de poursuivre, rappelons quelques définitions : Nous dirons qu'un espace vectoriel F est quasi-normé s'il est muni d'une application $x \to \|x\|$ de F dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ;\quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\ \|x\| \text{ et :}$$

$$\exists\, q \in]0,1],\ \forall\, x,y \in F,\ \|x+y\|^q \leq \|x\|^q + \|y\|^q.$$

Soient E un espace de Banach, F un espace quasi-normé, et $u \in L(E,F)$. Nous dirons que u est p-sommante, $0 < p \leq +\infty$, s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$(\Sigma\|u(x_i)\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E'}\leq 1} (\Sigma|\langle x_i,\xi\rangle|^p)^{1/p}$$

Donnons un exemple élémentaire mais fondamental d'application p-sommante : (cf. [9])

<u>Proposition</u> : Soit $\alpha \in l^p$, $0 < p \leq +\infty$. L'opérateur diagonal de multiplication défini par α $((c_n) \to (\alpha_n c_n))$ est p-sommant de l^∞ dans l^p.

Soient E un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω,μ) un espace de probabilité et $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Soient d'autre part G un espace quasi-normé de dimension finie, et $\pi \in L(E,G)$. Il existe une uniqu application $\varphi_{u,\pi} \in L^p(\Omega,\mu,G)$ telle que :

$$\forall\, \xi \in G' \qquad u({}^t\pi(\xi)) = \xi \circ \varphi_{u,\pi}$$

Nous dirons que u est quasi-p-décomposée s'il existe une constante C telle que pour tout espace quasi-normé de dimension finie G et toute $\pi \in L(E,G)$, on ait :

$$\left(\int \|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|_G^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C \;\; \|\pi\|$$

On trouve dans [9] un théorème voisin du théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soient E un espace de Banach vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique, F un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω,μ) un espace de probabilité, $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$ et v une application p-sommante de E dans F. L'application $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée. De plus, l'hypothèse d'approximation est inutile pour $p \geq 1$.

<u>Théorème 3</u> : Soient p, q, $0 < p \leq q \leq +\infty$, E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation si $q < 1$), (Ω,μ) un espace de probabilité, et $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$

b) Pour tout espace quasi-normé F séparé par son dual et toute application q-sommante v de E dans F, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée.

<u>Démonstration</u> : Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Supposons que $u = T_g \circ u_1$, avec $u_1 \in L(E',L^q(\Omega,\mu))$ et $g \in L^r(\Omega,\mu)$. D'après le théorème 2, $u_1 \circ {}^t v$ est quasi-q-décomposée, donc il existe C telle que pour toute $\pi \in L(F,G)$, on ait :

$$\left(\int \|\varphi_{u_1,\pi}(\omega)\|^q d\mu(\omega)\right)^{1/q} \leq C\|\pi\|$$

Or il est clair que $\varphi_{u,\pi} = g\,\varphi_{u_1,\pi}$, donc :

$$\left(\int \|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq \|g\|_{L^r} \left(\int \|\varphi_{u_1,\pi}(\omega)\|^q d\mu(\omega)\right)^{1/q},$$

ce qui prouve que $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée.

Montrons maintenant b) $\Rightarrow$ a). Soit (ξ_n) une suite d'éléments de E' telle que $\Sigma\|\xi_n\|^q < +\infty$. Elle définit un opérateur v_ξ de E dans l^q par :

$$v_\xi(x) = (<x,\xi_n>)_{n\in\mathbb{N}}$$

On voit que v_ξ admet la factorisation :

$$E \to l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^q, \text{ où } \alpha \text{ est diagonal,}$$

donc v_ξ est q-sommant (Proposition). Soit $n \in \mathbb{N}$; désignons par l^q_n le sous-espace de l^q formé des vecteurs dont les coordonnées d'indice > n sont nulles, et par π la projection de l^q sur l^q_n. Par hypothèse, il existe C, indépendante de n, telle que :

$$\left(\int\|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C\ \|\pi\| = C$$

Mais nécessairement :

$$\varphi_{u,\pi}(\omega) = (u(\xi_k)(\omega))_{1\leq k\leq n}$$

Donc :

$$\left(\int\left(\sum_{k=1}^{n} |u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leq C, \quad \text{pour tout } u, \text{ d'où :}$$

$$\left(\int\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leq C.$$

Finalement, $\Sigma\|\xi_k\|^q < +\infty$ implique :

$$\int(\Sigma|u(\xi_k)|^q)^{p/q} d\mu < +\infty.$$

On conclut en appliquant le corollaire 1 du théorème 1.

<u>Corollaire 1</u> : Soient p, q, r, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $q < 1$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace quasi-normé F, on a :

$$\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F) \qquad , \qquad (\Pi_p(E,F) \text{ désignant}$$

l'ensemble des opérateurs p-sommants de E dans F)

b) Pour tout espace mesuré (Ω,μ), tout opérateur $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

c) Toute suite scalairement l^p sur E peut s'écrire $x_n = \alpha_n y_n$, où $(\alpha_n) \in l^r$, et où (y_n) est une suite scalairement l^q sur E.

<u>Démonstration</u> : Démontrons que a) $\Rightarrow$ b). Si μ est une probabilité, le résultat découle de la conjonction des théorèmes 2 et 3. Supposons μ quelconque, et soit $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Nous devons montrer que :

$$\Sigma\|x_n\|^q < +\infty \Rightarrow \int(\Sigma|u(x_n)|^q)^{p/q}\, d\mu < +\infty$$

Or on peut trouver une fonction $h \geq 0$ dans $L^1(\Omega,\mu)$ telle que : $\int h d\mu = 1$ et :

$$\forall\, n \qquad |u(x_n)|^p \mu \ll h\mu = \nu$$

Soit $A = \{g > 0\}$. Considérons l'opérateur w de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(\Omega,\nu)$ défini par

$$f \to \frac{f\chi_A}{h^{1/p}}$$

D'après le début de la démonstration, $w \circ u$ se factorise par $L^q(\Omega,\nu)$, donc :

$$\int(\Sigma|w \circ u(x_i)|^q)^{p/q}\, d\nu < +\infty$$

Mais $u(x_n)\mu \ll h\mu$ implique :

$$\{u(x_n) > 0\} \subset \{h > 0\} \text{ donc :}$$

$$w(u(x_n)) = \frac{u(x_n)}{h^{1/p}} \quad , \text{ d'où :}$$

$\int (\Sigma |u(x_i)|^q)^{p/q} d\mu < +\infty$, ce qui prouve a) $\Rightarrow$ b).

Montrons que b) $\Rightarrow$ c). Soit (x_n) une suite scalairement l^p sur E. Elle définit un opérateur de E' dans l^p, par :

$$u(\xi) = (<\xi, x_n>).$$

D'après b), appliqué à $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu = \Sigma \delta_n$, u admet la décomposition :

$$E' \longrightarrow l^q \xrightarrow{\alpha} l^p,$$

où α est un opérateur diagonal défini par une suite $(\alpha_n) \in l^r$.

Posons $y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$. On a bien :

$$\Sigma |<y_n, \xi>|^q = \Sigma |<\frac{x_n}{\alpha_n}, \xi>|^q < +\infty,$$

d'où le résultat.

Montrons que c) $\Rightarrow$ a). Soit $v \in \pi_q(E,F)$. Nous devons montrer que pour toute suite scalairement l^p (x_n) dans E, on a

$$\Sigma \|v(x_n)\|^p < +\infty.$$

Mais en écrivant $x_n = \alpha_n y_n$, c'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder :

$$(\Sigma \|v(x_n)\|^p)^{1/p} \leq (\Sigma |\alpha_n|^r)^{1/r} (\Sigma \|v(y_n)\|^q)^{1/q},$$

et $\Sigma \|v(y_n)\|^q < +\infty$ puisque v est q-sommante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet : Deux journées p-radonifiantes, exposé n° 2, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-72.

[2] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Boletin da Soc. Math. de Sao Paulo 8 (1956) p. 1-79.

[3] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math 38 (1970) p. 193-201.

[4] S. Kwapien : Operators factorizing through L^p spaces (à paraître).

[5] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.

[6] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris (1972) t. 274, p.1825.

[7] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris (1972) t. 274, p.1939.

[8] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p (à paraître).

[9] Séminaire L. Schwartz, 1969-70.