Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi

Approximation polynomiale sur un compact de $\mathbb{R}^N$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR UN COMPACT DE $\mathbb{R}^N$.

par M. S. BAOUENDI

Exposé N°II

4 Octobre 1972

Le contenu de cet exposé se trouve essentiellement dans deux articles écrits en collaboration avec C. Goulaouic, le premier est paru [1], le second est à paraître [2]. Nous renvoyons à ce travail pour les démonstrations et la bibliographie complètes. Nous nous limitons ici aux principaux résultats.

§ 1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Nous désignons par $\mathcal{C}^\infty(K)$ (resp. $\mathcal{A}(K)$) l'espace des fonctions continues sur K se prolongeant en fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytiques) au voisinage de K. Ces espaces sont munis de leurs topologies naturelles.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ désigne l'espace des polynômes de n variables à coefficients complexes et de degré $\leq n$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, et $f \in L^p(K)$, nous notons

$$d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n) = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{L^p(K)}$$

(Pour $p = \infty$, la norme est le vrai sup.).

Le théorème bien connu de Weierstrass affirme qu'une fonction définie sur K est continue si et seulement si

$$d_{\infty,K}(f,\mathcal{P}_n) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Nous nous intéressons ici au problème suivant : comment est liée la régularité de f à la rapidité de la convergence de la suite

$$n \longmapsto d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n) \ ?$$

Introduisons d'abord les espaces de suites suivants, munis de leur topologie habituelle.

$\mathcal{S}$ = espace des suites à décroissance rapide

$= \{(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ ; \ \forall \alpha > 0, \ \sup_n |n^\alpha c_n| < +\infty\}.$

Pour $r > 0$,

$\mathrm{Exp}_r = \{(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ ; \ \exists a \in]0,1[, \ \sup_n |c_n| a^{-n^r} < +\infty\}.$

Les premiers résultats sur la question posée plus haut ont été obtenus par l'école russe au début de ce siècle. Le résultat suivant est essentiellement dû à Bernstein (cf.[3],[4]) à une variable, sa généralisation à plusieurs variables est facile.

<u>Théorème 1</u> : Soient K un pavé compact de $\mathbb{R}^N$, d'intérieur non vide et $f \in L^p(K)$. On a :

1°) $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$ si et seulement si

$$(n \mapsto d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n)) \in \mathcal{S}.$$

2°) $f \in \mathcal{A}(K)$ si et seulement si

$$(n \mapsto d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathrm{Exp}_1.$$

§ 2. Le théorème précédent est en général faux pour un compact quelconque de $\mathbb{R}^N$, comme le montrent les exemples suivants dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Exemple 1</u> : $K = \{(x_1,x_2);\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le e^{-1/x_1}\}$

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_2}{x_1}$$

Nous avons bien :

$$d_{\infty,K}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathcal{S} \text{ (et même mieux!)}$$

et

$$f \notin \mathcal{C}^\infty(K).$$

Cet exemple est dû à Zerner [6].

<u>Exemple 2</u> : $K = \{(x_1,x_2);\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\} \cup \{1 \le x_1 \le 2,\ x_2 = 0\}$.

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_2}{x_1 - 2}$$

Nous avons :

$$d_{\infty,K}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathrm{Exp}_1 \quad \text{et} \quad f \notin \mathcal{A}(K).$$

Mais, pour un compact quelconque de $\mathbb{R}^N$ le résultat suivant est toujours vrai :

<u>Théorème 2</u> : Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$.

1°) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$ on a

$$d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathcal{S}.$$

2°) si $f \in \mathcal{a}(K)$ on a

$$d_{p,K}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathrm{Exp}_1.$$

Nous avons aussi le résultat positif suivant :

<u>Théorème 3</u> : Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord lipschitzien, et $f \in L^p(\Omega)$, on a :

1°) $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ si et seulement si

$$d_{p,\Omega}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathcal{S}$$

2°) $f \in \mathcal{a}(\bar{\Omega})$ si et seulement si

$$d_{p,\Omega}(f,\mathcal{P}_n) \in \mathrm{Exp}_1.$$

La partie 1°) de ce théorème est dans [6].

Ce théorème a été d'abord démontré par les auteurs du présent travail dans le cas de la boule unité de $\mathbb{R}^N$ $(p=2)$ en considérant les fonctions propres de l'opérateur différentiel

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(1 - \sum_{j=1}^{N} x_j^2\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2.$$

Considérons, en particulier, le cas $p = 2$ dans le théorème 3. Soient (P_j) une base orthonormale de pölynömes dans $L^2(\Omega)$ et Φ l'application de $L^2(\Omega)$ dans l^2 qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre ses coefficients de Fourier

$$f_j = (f,P_j)$$

Nous obtenons à partir du théorème 3 le corollaire suivant

Corollaire 1 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord lipschitzien. L'application Φ est un isomorphisme de

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \text{ sur } \mathcal{S}$$

et de

$$\mathcal{A}(\bar{\Omega}) \text{ sur } \mathrm{Exp}_{\frac{1}{N}}$$

Ceci implique en particulier le résultat suivant :

Soient Ω_i un ouvert borné à bord lipschitzien dans $\mathbb{R}^{N_i}$, $i = 1,2$. On a :

1°) $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_2)$

2°) $\mathcal{A}(\bar{\Omega}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\bar{\Omega}_2)$

si et seulement si $N_1 = N_2$.

Le point 2°) est à comparer à un théorème connu de Kolmogoroff (voir [4] par exemple); il résulte du :

Lemme : Exp_{r_1} et Exp_{r_2} sont isomorphes si et seulement si $r_1 = r_2$.

§ 3. Nous allons nous intéresser ici seulement au cas analytique dans l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur K ($p = \infty$).

Nous avons :

Théorème 4 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(A) Pour $f \in C(K)$, on a l'équivalence

$$f \in \mathcal{A}(K) \Leftrightarrow (d_K(f,\mathcal{P}_n) \in \mathrm{Exp}_1).$$

(B) Pour tout $b > 1$ il existe Ω, voisinage ouvert borné de K dans $\mathbb{C}^N$ tel que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ il existe Q analytique et bornée dans Ω, identiquement nulle sur K vérifiant

$$\sup_{x\in\Omega}|P(x) + Q(x)| \leq b^n \sup_{x\in K}|P(x)|.$$

Remarque : Si aucune composante connexe de K n'est contenue dans un ensemble analytique on peut prendre $Q \equiv 0$, on peut aussi supposer que Ω est un voisinage de K dans $\mathbb{R}^N$ (au lieu de $\mathbb{C}^N$).

La propriété (B) est une généralisation de la classique inégalité de Bernstein sur l'intervalle $[-1,+1]$ (cf.[3] et [5]).

Nous obtenons facilement, à partir du théorème 4

Corollaire 2 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ tel que aucune de ses composantes connexes ne soit contenue dans un ensemble analytique. Pour que K vérifie (A) il faut et il suffit que, pour tout $x \in K$, il existe un compact L_x de $\mathbb{R}^N$ vérifiant (B) et :

$$x \in L_x \ , \quad L_x \subset K$$

et aucune composante connexe de L_x n'est contenue dans un ensemble analytique.

Nous allons donner un critère suffisant pour qu'un compact K de $\mathbb{R}^N$ vérifie (A) ou (B).

Etant donné un segment I de $\mathbb{R}^N$, d'extrémités A et B, on désigne, pour tout $h > 1$, par $I(h)$ le segment homothétique de I de centre $\frac{A+B}{2}$ et de rapport h. On note

$$K(h) = \bigcup_{I \subset K} I(h)$$

Nous obtenons à partir de l'inégalité de Bernstein sur un intervalle :

$$\sup_{x \in K(h)} |P(x)| \leq (h + \sqrt{h^2-1})^n \sup_{x \in K} |P(x)|$$

pour tout $P \in \mathcal{P}_n$. Nous en déduisons :

Théorème 5 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$; si pour tout $h > 1$, $K(h)$ est un voisinage de K, il vérifie (A).

<u>Exemple 3</u> : Le compact de l'exemple 1 vérifie l'hypothèse du théorème 5. Il vérifie donc (A) et (B). Notons que la fonction e^{-1/x_1} pourrait être remplacée par une fonction strictement croissante et continue sur $[0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Approximation polynomiale, Ann. Inst. Fourier, t.21 (1971) p. 149-173.

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Bernstein inequality and approximation of analytic functions on compact sets. (à paraître).

[3] S. Bernstein : Oeuvres complètes

[4] G. G. Lorentz : Approximation of functions, Elsevier, 1965.

[5] W. L. Walsh : Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc. Coll. publications v.20 (1969).

[6] M. Zerner : Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969), 218-220.