Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C. Baiocchi
M. S. Baouendi

Équations d'évolution à coefficients singuliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 28, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A29_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

EQUATIONS D'EVOLUTION A COEFFICIENTS SINGULIERS

par C. BAIOCCHI et M. S. BAOUENDI

Exposé N°XXVIII **23 Mai 1973**

§ 0. INTRODUCTION

Nous exposons ici un travail sur une classe de problèmes d'évolution avec coefficients pouvant devenir singuliers à l'origine. L'exemple typique est l'opérateur de la chaleur perturbé de la manière suivante :

$$Qu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\lambda(t,x)}{t} u - \beta(t)\Delta_x u$$

où λ est une fonction bornée et β une fonction > 0 sur $]0,T[$, pouvant s'annuler ou devenir infinie quand t tend vers 0.

La théorie est développée dans le cadre hilbertien abstrait introduit dans [3]. En suivant une démarche introduite dans [2] pour l'étude de problèmes de Cauchy locaux, nous avons trouvé plus commode d'étudier au lieu de Q, l'opérateur $P = tQ$ qui est fuchsien dans la variable t.

Signalons aussi, que des problèmes singuliers analogues, mais relatifs à des opérateurs hyperboliques, viennent d'être traités indépendamment dans [1].

Nous exposons d'abord des résultats d'existence et d'unicité dans des espaces L^2 avec poids ; ensuite nous donnons des résultats de régularité en x et t ; des corollaires dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ précisent quand et où les données du type Cauchy sont permises pour $t = 0$, ainsi que les conditions de compatibilité nécessaires.

Les démonstrations détaillées des résultats ainsi que d'autres applications paraîtront prochainement. Nous renvoyons aussi à ce travail pour une bibliographie plus complète.

§ 1. NOTATIONS ET HYPOTHESES

Les hypothèses que nous allons introduire dans ce paragraphe seront supposées satisfaites dans toute la suite.

Nous considérons le célèbre triplet d'espaces de Hilbert.

$$V \subset H \subset V' ,$$

V étant dense dans H.

Nous désignons par $\| \ \|$, $| \ |$ respectivement les normes dans V et H. Le produit scalaire dans H ou la dualité entre V et V' est notée (,).

Soit $T \in \mathbb{R}_+$; pour $t \in \,]0,T[$, nous nous donnons $A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ vérifiant

(1) $t \mapsto (A(t)u,v)$ est mesurable pour tout $u, v \in V$.

Nous nous donnons aussi une fonction mesurable

(2) $$\begin{cases} \alpha : \,]0,T[\to \mathbb{R}_+ \\ \text{telle que } \alpha \text{ et } \alpha^{-1} \text{ soient bornées sur tout compact de }]0,T]. \end{cases}$$

Nous supposons : Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $u, v \in V$ et $t \in \,]0,T[$

(3) $$|A(t)u,v)| \leq M(\alpha(t))^2 \|u\| \ \|v\| .$$

(4) $$\mathcal{R}e(A(t)u,u) \geq (\alpha(t))^2 \ \|u\|^2 .$$

Enfin, pour tout $t \in \,]0,T[$, soit $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(H,H)$ vérifiant :

$$(5)\quad \begin{cases} t \mapsto (\Lambda(t)u,v) \text{ est mesurable pour tout } u,\ v \in H.\ \text{Il existe } N > 0 \text{ tel} \\ \text{que, pour tout } u,\ v \in H \text{ et } t \in]0,T[\ :\ |(\Lambda(t),u,v)| \leq N|u|\ |v|. \end{cases}$$

Nous allons étudier dans la suite l'opérateur différentiel :

$$(6)\qquad Pu = t\,u' + \Lambda(t)u + A(t)u \text{ sur }]0,T[\ .$$

Nous avons besoin d'introduire un nombre $\mu_o \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous posons pour $t \in]0,T[$,

$$(7)\quad \begin{cases} \mu_o(t) = \text{sup.ess.}\{\mu | \mu \in \mathbb{R}, \Re e\{(\Lambda(t)u,u) + (A(t)u,u)\} - (\mu+\frac{1}{2})|u|^2 \geq 0, \forall u \in V \\ \mu_o = \underset{t \to 0}{\text{lim. inf. ess.}}\ \mu_o(t) \quad . \end{cases}$$

Il résulte de (4) et (5) que $\mu_o \geq -N - \frac{1}{2}$. Notons aussi que $\mu_o = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(t) = +\infty$. D'autre part, si $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(t) = 0$, nous avons

$$\mu_o = \text{lim.inf.ess. } \nu_o(t), \text{ avec}$$

$$\nu_o(t) = \text{sup.ess.}\{\mu | \mu \in \mathbb{R}, \Re e(\Lambda(t)u,u) - (\mu + \frac{1}{2})|u|^2 \geq 0,\ \forall\ u \in H\ \}$$

Si X est un espace de Hilbert et $\mu \in \mathbb{R}$, nous notons

$$L^2_\mu(X) = \{u | t^\mu u \in L^2(]0,T[,X)\}$$

$$L^2_{\mu,\alpha}(X) = \{u | t^\mu \alpha(t) u \in L^2(]0,T[,X)\}$$

$$Z_\mu = L^2_\mu(H) + L^2_{\mu,\alpha^{-1}}(V')$$

$$\mathcal{W}_\mu = \{u | u \in L^2_\mu(H) \cap L^2_{\mu,\alpha}(V),\ t\,u' \in Z_\mu\}.$$

Notons que les espaces Z_μ et $\mathcal{W}_\mu$ peuvent s'écrire plus simplement si $\underset{t\to 0}{\text{lim.inf.ess.}}\alpha(t) > 0$.

§ 2. EXISTENCE ET UNICITE

Il résulte de (1), (3) et (5) que l'opérateur P défini par (6) est linéaire et continu de $\mathcal{W}_\mu$ dans Z_μ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Nous avons :

Théorème 1 : Pour tout $\mu \in]-\infty,\mu_o[$, l'opérateur P est un isomorphisme de $\mathcal{W}_\mu$ sur Z_μ.

En fait ce théorème résoud un problème de Cauchy puisque

(8) $$u \in \mathcal{W}_\mu \quad \text{implique} \quad t^{\mu+1/2}|u(t)| \to 0 \text{ quand } t \to 0.$$

Pour montrer ce résultat, on multiplie l'équation $Pu = f$ par $(1-\eta)t^{2\mu}e^{-2\gamma t}u(t)$, avec η et γ choisis convenablement en fonction de μ et μ_o ; on obtient l'inégalité à priori

(9) $$\|u\|_{\mathcal{W}_\mu} \leq C_\mu \|Pu\|_{Z_\mu} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{W}_\mu,$$

grâce à (4) et la définition de μ_o. Pour terminer la démonstration, on montre que $P(\mathcal{C}_o^\infty(]0,T],V)$ est dense dans Z_μ.

Notons J^2 l'opérateur de dualité entre V et V'. Pour $\delta \in \mathbb{R}_+$ on désigne par V_δ le domaine de J^δ dans H et $V_{-\delta} = (V_\delta)'$. Nous avons donc :

$$V_o = H \ , \quad V_1 = V \ , \quad V_{-1} = V'.$$

Nous notons $\| \ \|_\delta$ la norme dans V_δ et $V_\infty = \bigcap_{\delta\geq 0} V_\delta$.

Nous allons préciser le théorème 1, en donnant des résultats de régularité dans les espace du type V_δ. Pour cela, nous notons pour $\delta \in \mathbb{R}$:

$$Z_{\mu,\delta} = L^2_\mu(V_\delta) + L^2_{\mu,\alpha^{-1}}(V_{\delta-1})$$

$$\mathcal{W}_{\mu,\delta} = \{u | u \in L^2_{\mu,\alpha}(V_{\delta+1}) \cap L^2_\mu(V_\delta),\ tu' \in Z_{\mu,\delta}\}.$$

On va supposer les hypothèses suivantes remplies pour un $\delta \geq 0$ fixé :

$$(10)_\delta \begin{cases} \Lambda(t) \in \mathcal{L}(V_\delta, V_\delta) \text{ pour tout } t \in]0,T[\text{. Il existe } N_\delta > 0 \text{ tel que,} \\ \text{pour tout } u \in V_\delta \text{ et } t \in]0,T[\quad \|\Lambda(t)u\|_\delta \leq N_\delta \|u\|_\delta . \end{cases}$$

$$(11)_\delta \begin{cases} A(t) \in \mathcal{L}(V_{\delta+1}, V_{\delta-1}) \text{ pour tout } t \in]0,T[\text{. Il existe } M_\delta > 0 \text{ tel que} \\ \text{pour tout } u \in V_{\delta+1} \text{ et } t \in]0,T[\quad \|A(t)u\|_{\delta-1} \leq M_\delta(\alpha(t))^2 \|u\|_{\delta+1} . \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ tel que pour tout $t \in]0,T[$,

$$(12)_\delta \begin{cases} \|[\Lambda(t), J^\delta]u\|_0 \leq \varepsilon\|u\|_\delta + C(\varepsilon)\|u\|_{\delta-1} \text{ pour tout } u \in V_\delta . \\ \|[A(t), J^\delta]u\|_{-1} \leq (\alpha(t))^2(\varepsilon\|u\|_{\delta+1} + C(\varepsilon)\|u\|_\delta) \text{ pour tout } u \in V_{\delta+1} . \end{cases}$$

Avec ces hypothèse, nous obtenons :

<u>Théorème 2</u> : Pour tout $\mu \in]-\infty, \mu_0[$, l'opérateur P est un isomorphisme de $\mathcal{W}_{\mu,\delta}$ sur $Z_{\mu,\delta}$.

Pour $\delta = 0$, le théorème 2 coincide avec le théorème 1.

Il s'agit, dans la démonstration, d'obtenir une inégalité du type (9), qu'on obtiendra en multipliant $Pu = f$ par $(1-\eta)t^{2\mu}e^{-2\gamma t}J^{2\delta}u$, avec η et γ convenables. On termine encore par un argument de densité.

§ 3. <u>REGULARITE EN t</u>

Pour $\delta \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ fixés, nous supposons $(10)_\delta$, $(11)_\delta$, $(12)_\delta$ et l'hypothèse suivante :

$$(13)_{k,\delta}\begin{cases}(t \mapsto A(t)) \in C^k(]0,T], \mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1})) \\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^k(]0,T], \mathcal{L}(V_\delta,V_\delta)) \\ \text{Il existe } C_{k,\delta} > 0 \text{ tel que pour tout } 0 \leq j \leq k \text{ et tout } t \in]0,T[\ : \\ \|t^j A^{(j)}\|_{\mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1})} \leq C_{k,\delta}(\alpha(t))^2 \\ \|t^j \Lambda^{(j)}(t)\|_{\mathcal{L}(V_\delta,V_\delta)} \leq C_{k,\delta} \ .\end{cases}$$

Nous avons alors :

<u>Théorème 3</u> : Pour tout $\mu \in]-\infty,\mu_o[$ l'opérateur P est un isomorphisme de l'espace

$$\{u \in \mathcal{W}_{\mu,\delta},\ u^{(j)} \in \mathcal{W}_{\mu+j,\delta}\ ,\quad 0 \leq j \leq k\}$$

sur l'espace

$$\{f \in Z_{\mu,\delta},\ \ f^{(j)} \in Z_{\mu+j,\delta},\ \ 0 \leq j \leq k\}\ .$$

La démonstration se fait par récurrence sur k avec des techniques usuelles en remarquant en plus que l'on a

$$(Pu)' = (P+1)u' + \Lambda' u + A' u,$$

et que le nombre μ_o de l'opérateur $P+1$ est donc décalé de +1 par rapport à celui de P.

Nous allons donner maintenant un autre résultat de régularité en t dont les hypothèse minimales sur la régularité en V_δ sont liées à l'ordre de dérivabilité en t. Pour simplifier l'exposition, nous allons supposer, dans la suite de ce paragraphe, $(10)_\delta$, $(11)_\delta$ et $(12)_\delta$ pour tout $\delta \geq 0$, ainsi que l'hypothèse suivante :

$$(14)\qquad \begin{cases}\text{Pour tout } \delta \geq 0 \\ (t \mapsto A(t)) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1})), \\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(V_\delta,V_\delta)).\end{cases}$$

Théorème 4 : Pour tout $\mu \in]-\infty, \mu_o[$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\delta \geq 2k$, l'opérateur P est un isomorphisme de l'espace

$$\{u \in \mathcal{W}_{\mu,\delta},\ u^{(j)} \in \mathcal{W}_{\mu,\delta-2j}\ ,\quad 0 \leq j \leq k\}$$

sur l'espace

$$\{f \in Z_{\mu,\delta},\ f^{(j)} \in Z_{\mu,\delta-2j}\ ,\quad 0 \leq j \leq k\}\ .$$

La démonstration de ce théorème, qui se fait aussi par récurrence sur k, est basée sur le fait que (14) et (4) impliquent que $\alpha(t)$ est bornée sur $]0,T[$; on utilisera alors le fait suivant :

$$v \in Z_{\mu+1,\delta}\ ,\ tv' \in Z_{\mu+1,\delta-2} \Rightarrow v \in \mathcal{W}_{\mu+1,\delta-2}\ ,$$

ainsi que le théorème 2.

En remarquant que l'on a

$$C^\infty([0,T],V_\infty) = \bigcap_{\substack{k\geq 0\\ \delta\geq 0}} H^k(]0,T[,V_\delta)$$

(H^k étant l'espace de Sobolev usuel), nous obtenons à partir du théorème 4 le corollaire suivant :

Corollaire 1 : Si μ_o est strictement positif, l'opérateur P est un automorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0,T],V_\infty)$.

Toujours avec les hypothèse du théorème 4, nous avons :

Théorème 5 : Soit $k_o \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Lambda(0) + A(0) + k$ est un automorphisme de V_∞ pour tout entier $k \geq k_o$.

(ii) P est un automorphisme de l'espace :

$$\{u | u \in C^\infty([0,T],V_\infty),\ u^{(j)}(0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j < k_o\}$$

Plus généralement, à partir de l'étude des opérateurs $\Lambda(0) + A(0) + k$, $k \in \mathbb{N}$ (on peut évidemment se borner à $k < -\mu_o$) dans V_∞, on peut caractériser le noyau et l'image de P dans $C^\infty([0,T],V_\infty)$. La

...nstration du théorème 5, ainsi que celle de la généralisation ci-dessus, repose sur le corollaire 1 et un développement de Taylor au voisinage de $t = 0$, en remarquant que

$$P(t^k v) = t^k (P + k) v.$$

§ 4. REMARQUES ET EXEMPLES

Remarque 1 : Nous remarquons que la restriction $\mu < \mu_o$, en général, ne peut pas être améliorée dans le théorème 1 par exemple. On peut le voir dans le cas suivant :

$$V = H = V' = \mathbb{C}\ , \quad \Lambda u = -\frac{u}{2}\ , \ A(t)u = u \quad \text{donc}$$

$$\alpha(t) = 1, \quad Pu = tu' + \frac{u}{2}\ , \ \mu_o = 0.$$

Remarque 2 : Si l'on suppose $A(t)$ et $\Lambda(t)$ définis sur $[-T,T]$ et satisfaisant à :

$$(14)' \quad \begin{cases} \text{Pour tout } \delta \geq 0 \\ (t \mapsto A(t)) \in C^\infty([-T,T],\ \mathcal{L}(V_{\delta+1},\ V_{\delta-1})), \\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^\infty([-T,T],\ \mathcal{L}(V_\delta, V_\delta)) \end{cases}$$

(au lieu de (14)), les autres hypothèses des théorèmes 4 et 5 étant supposées valables sur les intervalles $]-T,0[$ et $]0,T[$, les conclusions des théorèmes 4 et 5 ont lieu sur $[-T,T]$, ce qui résoud un problème bilatéral en t.

Un exemple : Nous donnons ici une application concrète des résultats précédents, en nous limitant à un exemple choisi le plus simple possible.

Soit Ω une variété C^∞ compacte sans bord ; on notera x la variable dans Ω et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω. On prend :

$$H = L^2(\Omega), \ V = H^1(\Omega), \quad V' = H^{-1}(\Omega)$$

$$A(t) = t^{2\beta}(1 - \Delta) \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R},$$

$$\Lambda(t)u = \lambda(t,x)u \quad \text{avec } \lambda \in L^\infty(]0,T[\times\Omega).$$

Nous sommes donc, dans la situation du paragraphe 1, avec $\alpha(t) = t^{\beta}$ et

$$P = t \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(t,x) + t^{2\beta}(1-\Delta).$$

Nous avons :

$$\mu_0 = +\infty \qquad \text{si } \beta < 0$$

$$\mu_0 = \liminf_{t\to 0} \inf_{x\in\Omega} \Re\lambda(t,x) \qquad \text{si } \beta > 0$$

Pour $\beta = 0$, nous devons modifier la formule précédente en fonction de la plus petite valeur propre de $1-\Delta$.

Le théorème 1 s'applique sans autres hypothèses. Pour exploiter les résultats de régularité, nous nous bornons au cas

$$\lambda \in C^{\infty}([0,T]\times\Omega).$$

Les théorèmes 2 et 3 s'appliquent pour tout $\beta \in \mathbb{R}$; les théorèmes 4 et 5 exigent que 2β soit un entier ≥ 0.

En particulier, si 2β est un entier > 0, d'après le corollaire 1, nous obtenons :

<u>L'opérateur P est un automorphisme de $C^{\infty}([0,T]\times\Omega)$ si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, $\lambda(0,x)$ ne prend aucune valeur entière négative ou nulle.</u>

Dans le cas où β est un entier ≥ 0, on peut aussi appliquer la remarque 2 ci-dessus et obtenir des résultats sur $[-T,T]\times\Omega$.

Pour illustrer la généralisation du théorème 5 indiquée, bornons nous au cas $2\beta = 1$, $\Re\lambda(0,x) > -1$. Dans ce cas, la résolubilité dans $C^{\infty}([0,T]\times\Omega)$ de $Pu = f$ se ramène, par un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $t = 0$, à la résolubilité dans $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ de

$$\lambda(0,x)v = g ,$$

appliquée au cas $g(x) = f(0,x)$, $v(x) = u(0,x)$.

Le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\lambda(x,t)}{t}\, u + (1-\Delta)u = \frac{f}{t}$$

$$u(0,x) = v(x) \qquad\qquad (\Re e\,\lambda\,(0,x) > -1)$$

admet donc une solution unique dans $C^\infty([0,T]\times\Omega)$, avec f dans le même espace et $v \in C^\infty(\Omega)$, si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\lambda(0,x)\ v(x) = f(0,x).$$

Le cas $\lambda(0,x) \equiv 0$ redonne en particulier le cas classique de l'équation de la chaleur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac : Problèmes de Cauchy hyperboliques singuliers (à paraître).

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, à paraître C. P. A. M.

[3] J. L. Lions : Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer Verlag (1961).