Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Grubb

Systèmes elliptiques ayant un spectre essentiel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 27, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A28_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SYSTEMES ELLIPTIQUES AYANT UN SPECTRE ESSENTIEL

par G. GRUBB

Exposé N° XXVII

16 Mai 1973

§ 1. INTRODUCTION

Soit T un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert H, fermé et de domaine dense. Le domaine, l'image et le noyau sont notés D(T), R(T) resp. Z(T). Comme définition du spectre essentiel nous prenons celle de Wolf [9], qui donne un exposé détaillé : T est appelé Fredholm quand R(T) est fermé, et Z(T) et $R(T)^{\perp}$ sont de dimension finie. L'ensemble de Fredholm est

(1) $$\Phi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ est Fredholm}\} ,$$

et le spectre essentiel est

(2) $$sp_{ess}\, T = \mathbb{C} \setminus \Phi(T) \ (= sp\ A \setminus \Phi(T)) .$$

$sp_{ess} T$ peut être caractérisé par les suites singulières :

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une suite singulière pour T, si $Tu_n \to 0$, $\|u_n\| = 1$ pour tout n, et u_n n'a pas de soussuites convergentes.

On a que $\lambda \in sp_{ess} T$ si et seulement s'il existe une suite singulière , ou bien pour $T - \lambda$, ou bien pour $T^* - \bar{\lambda}$.

Le $sp_{ess} T$ est fermé, et est invariant par toute perturbation compacte.

Il est bien connu que les problèmes aux limites elliptiques réguliers n'ont pas de spectre essentiel. Soit $\bar{\Omega}$ une variété C^∞ de dimension n, de frontière Γ et intérieur $\Omega = \bar{\Omega}\setminus\Gamma$ (Γ éventuellement vide). Soit A un opérateur différentiel (scalaire ou matriciel) proprement elliptique sur Ω d'ordre $r > 0$, et soit B un opérateur différentiel (en général matriciel) défini près de Γ. Soit A_B la réalisation dans $L^2(\Omega)$ de domaine

(3) $$D(A_B) = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega), Bu|_\Gamma = 0\} .$$

Alors $A_B - \lambda$ est Fredholm pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si

(i) Ω est borné,

(ii) A est uniformément elliptique sur Ω,

(iii) B recouvre A,

(iv) Ω, Γ et les coefficients de A et B sont "smooth".

Quand $\Gamma = \emptyset$, (i), (ii) et (iv) entraînent que la réalisation maximale (que nous appelons encore A) de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega)\}, \tag{4}$$

n'a pas de spectre essentiel.

L'absence d'une des propriétés (i) à (iv) peut donner un spectre essentiel. Quant à (i), il y a les études de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + q(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, où typiquement $sp_{ess} = [0,\infty[$ (voir Schechter [7] et ses références). Quand (ii) n'a pas lieu, l'ellipticité de A peut dégénérer à la frontière. Avec une dégénérescence légère, A_B peut encore être à invers compact (comme dans les travaux de Baouendi et Goulaouic) ; la dégénérescence plus forte qui crée un spectre essentiel a été étudiée par Wolf [9] et Poulsen [6]. Si (iii) n'est pas vérifié (mais (i), (ii) et (iv) le sont) on réduit le problème à l'étude d'un opérateur pseudo-différentiel non-elliptique sur Γ, en général non-Fredholm (travaux de Hörmander, Vishik et Eskin, Sjöstrand, et al...). Nous ne nous occuperons pas de (iv).

Nous allons étudier un cinquième aspect des réalisations elliptiques, qui fait intervenir aussi un spectre essentiel, d'une manière peut-être inattendue.

Le travail a été fait en collaboration avec G. Geymonat, Torino ; nous sommes encore en train de développer certains points.

§ 2. SYSTEMES D'ORDRE MIXTES

Soit A un système elliptique au sens de Douglis-Nirenberg. Si (i) à (iv) sont satisfaits (ce que nous supposerons toujours), A_B est Fredholm, voir Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Mais il peut arriver que $sp_{ess} A_B \neq \emptyset$. Rappelons que ces systèmes A sont des matrices où les éléments peuvent avoir des ordres différents. Nous considérons un cas symétrique :

$$\{m_1, \ldots, m_q\} \text{ est un ensemble d'entiers } \geq 0, \text{ et}$$

$A = (A_{st})_{s,t=1,\ldots,q}$, où A_{st} est d'ordre $m_s + m_t$; donc A est continu de $\prod_{s=1}^{q} H^{m_s+\alpha}(\Omega)$ dans $\prod_{s=1}^{q} H^{-m_s+\alpha}(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut supposer que la suite $m_1, \ldots, m_q$ est décroissante, et nous supposerons en plus

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r > m_{r+1} = \ldots = m_q = 0 , \tag{5}$$

où $1 \leq r < q$. Alors nous écrivons

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & M \end{pmatrix} , \tag{6}$$

où $P = (A_{st})_{st \leq r}$, $Q = (A_{st})_{s \leq r,\, t > r}$, $R = (A_{st})_{s>r,t\leq r}$ et $M = (A_{st})_{s,t>r}$ (c'est la multiplication par une matrice M(x)). Le symbole principal de A est $\sigma^0(A) = (\sigma^0(A_{st}))_{s,t=1,\ldots,q} = (\sigma_{m_s+m_t}(A_{st}))_{s,t=1,\ldots,q}$. Rappelons que A est appelé elliptique sur $\bar{\Omega}$ si la déterminante satisfait à

$$\det \sigma^0(A)(x,\xi) \neq 0, \quad \forall (x,\xi) \in T^*(\bar{\Omega})\setminus 0 , \tag{7}$$

et fortement elliptique sur $\bar{\Omega}$ si

$$\sigma^0(A)(x,\xi) + \sigma^0(A)^*(x,\xi) \text{ est défini positif,} \tag{8}$$
$$\forall (x,\xi) \in T^*(\bar{\Omega})\setminus 0 .$$

<u>Exemple 1</u> : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\{m_1, m_2, m_3\} = \{1, 1, 0\}$. L'opérateur Navier-Stokes linéarise :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & \partial_x \\ 0 & -\Delta & \partial_y \\ -\partial_x & -\partial_y & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^o(A^{(1)}) = \begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 & i\xi \\ 0 & \xi^2+\eta^2 & i\eta \\ -i\xi & -i\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, $\det \sigma^o(A^{(1)}) = -(\xi^2+\eta^2)^2 \neq 0$, $\forall (\xi,\eta) \neq (0,0)$. $A^{(1)}$ n'est pas fortement elliptique, mais $A^{(1)} + c$ l'est, pour $c > 2$.

<u>Exemple 2</u> : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\{m_1, m_2\} = \{1, 0\}$, a et $b \in \mathbb{R}$.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -\Delta & a \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \sigma^o(A^{(2)}) = \begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$A^{(2)}$ est elliptique pour $b \neq 0$ et fortement elliptique pour $b > 0$.

D'autres exemples viennent de la théorie des réacteurs.

Quand $\Gamma \neq \emptyset$, la réalisation de la condition de Dirichlet pour un tel opérateur est défini par

$$\text{(9)} \qquad D(A_\gamma) = \{u \in \prod_{s=1}^{q} H_o^{m_s}(\Omega) \,|\, Au \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^q)\}.$$

Dans l'exemple 2, un calcul très facile montre que le spect de $A_\gamma^{(2)}$ consiste en deux suites de valeurs propres, λ_n^+ convergeant vers $+\infty$ et λ_n^- convergeant vers b ($\lambda_n^- = b$ pour tout n, si $a = 0$). Donc $b \in sp_{ess} A_\gamma^{(2)}$! Pour l'exemple 1 le calcul à la main est déjà plus diffici le. Remarquons cependant que

$$\sigma^o(A^{(1)}-\lambda) = \begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 & i\xi \\ 0 & \xi^2+\eta^2 & i\eta \\ -i\xi & -i\eta & -\lambda \end{pmatrix},$$

tel que $\det \sigma^o(A^{(1)} - \lambda) = (-\lambda - 1)(\xi^2+\eta^2)^2$; donc $A^{(1)}$ est elliptique si et seulement si $\lambda \neq -1$. On peut montrer que γ recouvre A pour tout $\lambda \neq -1$ donc $sp_{ess} A_\gamma^{(1)} \subset \{-1\}$. Nous verrons plus loin que $-1 \in sp_{ess} A_\gamma^{(1)}$.

Une indication plus générale que le $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}} A_B$ doit être non vide est que l'injection $D(A_B) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ n'est pas compacte sous nos hypothèses. Les exemples nous amènent à poser les problèmes :

Problème 1 : Touver le $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}$ (de A si $\Gamma = \emptyset$, de A_γ et des A_B si $\Gamma \neq \emptyset$).

Problème 2 : Trouver le spectre discret (les valeurs propres) ; son comportement asymptotique a) à l'infini, b) près du $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}$.

§ 3. CAS D'UNE VARIETE SANS BORD

Soit $\overline{\Omega}$ compacte et sans bord. Supposons que A est fortement elliptique et que $A+A^*$ est défini positif sur $C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{C}^q)$. (Il suffit de supposer que P (voir (6)) est fortement elliptique, et ajouter une suffisamment grande constante à A.) Alors A et P sont inversibles. Le domaine de la réalisation maximale dans L^2 (cf.(4)) est explicité par le lemme suivant :

Lemme 1 : Ecrivons $\{m_1,\dots,m_q\}$ comme

$$(10) \qquad \{m_1,\dots,m_q\} = \{\underbrace{l_1,\dots,l_1}_{r_1 \text{ fois}};\ \underbrace{l_2,\dots,l_2}_{r_2 \text{ fois}};\dots;\underbrace{l_{q'},\dots,l_{q'}}_{r_{q'} \text{ fois}}\},$$

où $l_1 > l_2 > \dots > l_{q'}$. (Alors $\sum_{j=1}^{q'} l_j r_j = q$, $l_{q'-1} = m_r$, $l_{q'} = 0$, et $r_{q'} = q-r$). En regroupant les rangs et colonnes de A de cette manière, on obtient par une construction explicite

$$(11) \qquad A = \Psi_1 \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & T_2 & \\ 0 & & \ddots\ T_{q'} \end{pmatrix} \Psi_2 \ ,$$

où chaque T_j est un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique $r_j \times r_j$ - matriciel d'ordre $2l_j$, et Ψ_1 et Ψ_2 sont triangulaires avec des 1 dans la diagonale, des o.ps.d. d'ordre négatif en dessous de, resp. en dessus de la diagonale, et des zéros ailleurs.

Puisque Ψ_2 est un isomorphisme dans $L^2(\Omega,\mathbb{C}^q)$, il résulte que

(12) $$D(A) = \Psi_2^{-1} \prod_{j=1}^{q'} H^{l_j}(\overline{\Omega},\mathbb{C}^{r_j}) = \Psi_2^{-1} \prod_{s=1}^{q} H^{m_s}(\overline{\Omega}),$$

et donc que $C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{C}^q)$ est dense dans $D(A)$ (donc la réalisation maximale = la réalisation minimale = l'extension de Friedrichs de la réalisation minimale).

Le lemme 1 est essentiellement une généralisation du lemme suivant, où on étudie la décomposition (6).

<u>Lemme 2</u> : Soit $S = M - RP^{-1}Q$, c'est un o.ps.d. d'ordre zéro. Notons $\sigma^0(S)(x,\xi) = s_0(x,\xi)$. Alors

(13) $$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad ;$$

et on a pour les symboles principaux, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

(14) $$\sigma^0(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} \sigma^0(P) & \sigma^0(Q) \\ \sigma^0(R) & M-\lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0(P) & 0 \\ \sigma^0(Q) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \sigma^0(P^{-1}Q) \\ 0 & s_0-\lambda I \end{pmatrix}$$

et par conséquent

(15) $$\text{dét}\ \sigma^0(A-\lambda I) = \text{dét}\ \sigma^0(P)\ \text{dét}(s_0 - \lambda I)$$

en chaque point de $T^*(\overline{\Omega})\setminus 0$. (Les I et 0 désignent des opérateurs et matrices "identité" ou "zéro" convenables).

La vérification est facile. Remarquons que $S = T_{q'}$ de (11).

Introduisons

(16) $$\omega = \bigcup_{(x,\xi)\in T^*(\overline{\Omega})\setminus 0} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ est valeur propre de } s_0(x,\xi)\}.$$

Nous allons montrer :

Théorème 1 :

(17) $$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}A = \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}S = \omega.$$

Démonstration : Il résulte de (13) que S est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -P^{-1}QS^{-1} \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -RP^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} ,$$

où les C_{ij} sont des o.p.d. d'ordre (mixte) négatif, donc des opérateurs compacts . Cela entraîne que $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}A = \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}S$. Montrons alors la deuxième identité dans (17) .

Quand $\lambda \notin \omega$, $\|s_o(x,\xi) - \lambda I\| \geq c > 0$ pour tout $(x,\xi) \in T^*(\bar{\Omega})\setminus 0$ (car $\bar{\Omega}$ est compacte et s_o est homogène de degré 0), donc $S - \lambda$ est elliptique et $\lambda \in \Phi(S)$. Inversement, supposons que λ est une valeur propre de $s_o(x_o,\xi_o)$ et que $\theta \in \mathbb{C}^q$ est un vecteur propre associé à λ. Alors une certaine suite, utilisée souvent dans la littérature des o.ps.d. va nous servir comme suite singulière : Considérons une carte locale où $x_o = 0$; soit $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|v\|_o = 1$, et posons

(19) $$u_k(x) = k^{n/2}\, v(kx)\, e^{i\langle x,k^2\xi_o\rangle}\,\theta$$

(voir p.ex. [4] p.158-159, ou [5] p.129); alors on trouve que cette suite a les propriétés exigées dans la définition 1, pour $T = S - \lambda$. Remarquons en plus que $\mathrm{supp}\, u_k \to \{0\}$, et que $u_k \to 0$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ ([5]) .

Notons la conséquence de (15) et du fait que $s_o(x,\xi)$ est borné :

Corollaire 1 : $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}A = \{\lambda \mid A - \lambda$ n'est pas elliptique$\}$, et $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}A$ est borné.

<u>Remarque 1</u> : La suite singulière (19) pour $S - \lambda$ sert à construire une suite singulière pour $A - \lambda$: Soit E un parametrix de P, dont le noyau a son support près de la diagonale, alors $(\|E\,Qu_k\|_o^2 + \|u_k\|_o^2)^{-1/2}\{-E\,Qu_k, u_k\}$ est une suite singulière pour $A - \lambda$ (utilisant que $u_k \to 0$ dans H^{-1} et que supp $E\,Q\,u_k$ est près de supp u_k).

Le problème 1 étant résolu, regardons le problème 2. Pour cela nous supposerons en plus que A est (formellement) auto-adjoint. Vue du corollaire 1 et le fait que A n'est pas borné, il y a sûrement une suit de valeurs propres $\lambda_j^+(A)$ tendant vers $+\infty$. Pour le trouver, on est amené à considérer le problème de valeur propre <u>non-linéaire</u>:

(20) $$(P - \lambda - Q^*(M - \lambda)^{-1}Q)u = 0.$$

Cependant, pour λ grand, l'effet du terme $Q^*(M - \lambda)^{-1}Q$ doit être relativement petit. P, étant d'ordre positif, est à invers compacte, et on peut montrer que

(21) $$\lambda_j(P) - C(P)\, j^{2m_r/n} = \mathcal{O}(j^{2m_r/n})$$

pour $j \to \infty$, où $C(P)$ est dérivée de $\sigma^o(P)$; en effet le comportement asymptotique est précisément celui de l'o.ps.d $T_{q'-1}$ (voir (11)) ; la cons tante est déterminée dans Seeley [8]. Par une méthode un peu étrange(utili sant la théorie des perturbations) nous avons montré :

<u>Théorème 2</u> : $\lambda_j^+(A) - C(P) j^{2m_r/n} = \mathcal{O}(j^{2m_r/n})$ pour $j \to +\infty$.

Finalement, quelques mots sur le spectre discret près du spectre essentiel. Quelques études de cette question ont été faites pour $-\Delta + q$ sur $\mathbb{R}^n$, voir [7]. Pour notre problème nous nous bornons aux indications suivantes : si S a des suites hors du $sp_{ess}S$ convergeant vers $sp_{ess}S$ (qui consiste en un nombre fini d'intervalles dans $\mathbb{R}$), alors A en aura aussi ; c'est le cas pour l'exemple 2 où $S = b + a^2\Delta^{-1}$ (si $a \neq 0$). Mais même si S n'a pas de suites, A peut en avoir ; on trouve cela pour l'exemple 1 (en prenant $\bar{\Omega} = S^1 \times S^1$, le tore), où $S = -1$. Du point de vue systématique, nous avons comme condition suffisante pour l'existence d'une suite décroissante vers max ω(par ex.), que le symbole entier $s(x,\xi)$ soit assez "plate" dans un point (x_o,ξ_o) où le maximum s'atteint (i.e. qu'un nombre de dérivées de chaque terme de $s(x,\xi)$ s'annulent dans

$(x_o,\xi_o))$, et où $\sigma(Q)(x_o,\xi_o) \neq 0$.

§ 4. LE CAS D'UNE VARIETE A BORD

Le problème est compliqué ici par la présence des conditions au bord. Considérons d'abord la réalisation de Dirichlet, A_γ (9). Nous supposons que A est fortement elliptique sur $\bar{\Omega}$, alors A_γ est bien l'extension de Friedrichs de l'opérateur minimal. En ajoutant une suffisamment grande constante nous avons que P_γ et A_γ sont inversibles (positifs).

Quand on essaie d'imiter le lemme 1, on trouve qu'une certaine version est vraie, dans laquelle il entre des opérateurs beaucoup plus compliqués que les pseudo-différentiels ; ils contiennent des opérateurs de trace, des noyaux de Poisson compliqués et d'autres choses (ils appartiennent à l'algèbre d'opérateurs introduit par Boutet de Monvel [2]). Aussi le lemme 2 aura un analogue plus compliqué, où S est remplacé par $S_\gamma = M - RP_\gamma^{-1}Q$. Le $sp_{ess}A_\gamma$ sera égal à $sp_{ess}S_\gamma$, mais celui-là semble difficile à déterminer. Nous avons cependant

<u>Théorème 3</u> : Posons $s_o(x,\xi) = M(x) - [\sigma^o(R)\sigma^o(P)^{-1}\sigma^o(Q)](x,\xi)$ pour tout $(x,\xi) \in T^*(\bar{\Omega})\backslash 0$, et définissons ω par (16). Alors

(22) $$\omega \subseteq sp_{ess}A_B$$

pour toute réalisation A_B de A.

Dans la démonstration, on utilise pour les $x \in \Omega$ la suite singulière du théorème 1 et remarque 1 ; grâce à la remarque on peut la prendre à support dans Ω. Les $x \in \Gamma$ sont inclus par le fait que sp_{ess} est fermé.

(14) et (15) restent valables ; donc ω est toujours l'ensemble des λ où $A-\lambda$ n'est pas elliptique dans $\bar{\Omega}$. Pour améliorer (22), on aura donc à décider s'il peut arriver que $A-\lambda$ est elliptique et B recouvre A mais B ne recouvre pas $A - \lambda$! (Rappelons que la vérification directe de la condition de recouvrement pour les systèmes est un problème algébrique assez formidable).

Pour la condition de Dirichlet, nous savons, grâce à l'ellipticité forte, que γ recouvre $A-\lambda$ pour $|\lambda|$ grand. Donc

<u>Proposition 1</u> : $sp_{ess}\, A_\gamma$ est borné.

Dans les exemples 1 et 2 on peut en effet vérifier que $sp_{ess} A_\gamma = \omega$. Une étude plus proche des méthodes de [1] paraît montrer que ceci est vrai en général.

Pour les autres réalisations A_B, il manque encore une théorie de "réduction d'un problème aux limites à un problème pseudo-différentiel sur le bord " (un début a été fait par l'auteur dans [3]). On espère trouver, au moins pour les réalisations variationnelles, qu'on a l'identité dans (22).

Quant au spectre discret , nous avons trouvé, pour la réalisation de Dirichlet A_γ d'un opérateur formellement auto-adjoint, une généralisation du théorème 2 correspondant à la version généralisée du lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg : Comm. Pure Appl. Math. <u>17</u> (1964), 35-92.

[2] L. Boutet de Monvel : Acta Math. <u>126</u> (1971), 11-51.

[3] G. Grubb : Weakly semibounded boundary problems and sesquilinear forms, Preprint n°14 (1972) Copenhague, à paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[4] L. Hörmander : Proc. Symp. Pure Math. <u>10</u> (1968) 138-183.

[5] A. Melin : Ark. f. Mat . <u>9</u> (1971) 117-140.

[6] E. T. Poulsen : J. Math. Mech. <u>11</u> (1962) 725-748.

[7] M. Schechter : Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland Ed. 1971.

[8] R. Seeley : Proc. Symp. Pure Math. <u>10</u> (1968), 288-307.

[9] F. Wolf : Comm. Pure Appl. Math. <u>12</u> (1959) 211-288.

ERRATA

Pages	Au lieu de :	Lire :
XXVII.1 Ligne 10	$\operatorname{sp} A \setminus \Phi(T)$	$\operatorname{sp} T \setminus \Phi(T)$
XXVII.4 Ligne 20	$\lambda \neq -1$	$\lambda \neq -1, -\frac{1}{2}$,
XXVII.4 Ligne 21	$\{-1\}$.	$\{-1, -\frac{1}{2}\}$.
XXVII.6 Ligne 3	l_j	$2l_j$
XXVII.6 Ligne 3	m_s	$2m_s$
XXVII.8 Ligne 11	$Q^*(M-\lambda)^{-1}Q$	$Q(M-\lambda)^{-1}Q^*$
XXVII.8 Ligne 12	$Q^*(M-\lambda)^{-1}Q$	$Q(M-\lambda)^{-1}Q^*$
XXVII.10 Ligne 11	L'identité dans (22).	$\operatorname{sp}_{ess} A_B = \operatorname{sp}_{ess} A_\gamma$

Remplacer les lignes 4-6, page XXVII.10 ("Dans les exemples 1 et 2 ...") par :

"Dans l'exemple 2 on trouve que $\operatorname{sp}_{ess} A_\gamma = \omega$, ce qui reste vrai pour une grande classe d'opérateurs où P est scalaire. Cependant, pour l'exemple 1 on trouve que $\omega = \{-1\} \neq \{-1, -\frac{1}{2}\} = \operatorname{sp}_{ess} A_\gamma$.