G. Métivier

Théorie spectrale d'opérateurs elliptiques sur des ouverts irréguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 21, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A22_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEORIE SPECTRALE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES SUR DES OUVERTS IRREGULIERS

par G. METIVIER

Exposé N° XXI   14 Mars 1973

§ 1. INTRODUCTION

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, on note $H^k(\Omega)$, l'espace de Sobolev habituel d'ordre k sur Ω, et $H_o^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert borné "régulier" de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathcal{A}$, un opérateur différentiel d'ordre 2k, uniformément fortement elliptique sur Ω, de partie principale $A'(x,D)$. Si A est un opérateur non borné, de domaine D(A), dans $L^2(\Omega)$, associé à $\mathcal{A}$, positif autoadjoint, avec $H_o^{2k}(\Omega) \subset D(A) \subset H^{2k}(\Omega)$, alors ([2], [4]) le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$, nombre de valeurs propres de A inférieures à λ, est donné par :

(1) $$N(\lambda) \sim \mu(\Omega).\lambda^{m/2k} \qquad (\lambda \to +\infty).$$

où μ est la mesure de densité $\mu'(x) = (2\pi)^{-m}.\text{mes}\,\{\xi/0 < A'(x,\xi) < 1\}$.

On utilisera ce résultat, dans la cas où Ω est une variété à bord de classe C^∞, et où les coefficients de $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Le problème est d'étudier la fonction $N(\lambda)$, quand l'ouvert Ω est irrégulier ; on généralisera la formule (1) dans certains cas ; on donnera aussi des exemples d'ouverts de $\mathbb{R}^2$, tels que pour l'opérateur $-\Delta + 1$ avec des "conditions de Neumann" , $N(\lambda)$ se comporte comme λ^β avec $\beta > 1$.

Si l'ouvert Ω est irrégulier, la définiton des conditions aux limites pose des problèmes. On se placera donc dans une situation variationnelle, $(V, L^2(\Omega), a)$, V étant un espace de Hilbert inclus et dense dans $L^2(\Omega)$, et a une forme intégrodifférentielle, hermitienne continue et coercive sur V (en abrégé, h.c.c. sur V). D'autre part, si on a pu définir un opérateur A, de domaine D(A), positif autoadjoint, on se ramène à une situation variationnelle en considérant l'opérateur $A^2 + 1$ défini par $(D(A), L^2(\Omega), a)$ avec :

$$a(u,v) = (Au,Av)_{L^2(\Omega)} + (u,v)_{L^2(\Omega)} .$$

La méthode utilisée consiste à démontrer d'abord, sous des hypothèses assez générales, le théorème de décomposition suivant :

$$N(\lambda) \sim B(\lambda) + \mu(\Omega).\lambda^{m/2k}$$

en considérant $\mu(\Omega).\lambda^{m/2k}$ comme un terme du "à l'intérieur" et $B(\lambda)$ un terme du "au bord". On montre ensuite, que sous certaines conditions, $B(\lambda) = o(\lambda^{m/2k})$, d'où l'on déduit la formule (1). On étudie en fait $B(\lambda)$ en établissant des majorations de n-diamètres, sur des voisinages de $\partial\Omega$.

On établit par exemple le résultat suivant :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, de mesure finie [resp un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$, vérifiant une condition (C)], alors pour toute forme a, h.c.c. sur $H_o^k(\Omega)$ [resp $H^k(\Omega)$] :

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq k}} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, D^\beta \bar{v}.dx$$

telle que $\begin{cases} a_{\alpha\beta} \in C^o(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| = 2k \\ a_{\alpha\beta} \in L^\infty_{loc}(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| < 2k. \end{cases}$

on a :

$$N(\lambda) \sim \mu_a(\Omega).\lambda^{m/2k}$$

où

$$\mu_a(\Omega) = (2\pi)^{-m} \int_\Omega \text{mes } \{\xi / \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} < 1\}.dx.$$

Remarquons que les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas supposés bornés sur Ω. On conclut donc, pour des opérateurs du type $-\Delta + \frac{1}{d^2}$ avec une condition de Dirichlet, Ω étant un ouvert de mesure finie, et d la distance au bord.

La condition (C) est vérifiée si Ω possède la propriété du cône, et si Ω est une "pointe" de la forme :

$$\Omega = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} / x_1 \in]0,a[, |x'| < \varphi(x_1)\}$$

où φ est une fonction strictement positive, croissante, sci, quelconque, en particulier, aussi plate que l'on veut à l'origine.

On utilise la notion de n-ième diamètre ([5]).

<u>Définition</u> : Soit E un espace vectoriel, et soit p une semi-norme sur E. Si B est une partie de E, on appelle n-diamètre de B dans E pour la semi-norme p, le nombre :

$$d_n^E(B,p) = \operatorname*{Inf}_{E_n \in \mathcal{G}_n(E)} \ \operatorname*{Sup}_{x \in B} \ \operatorname*{Inf}_{y \in E_n} .p(x-y)$$

où $\mathcal{G}_n(E)$ désigne l'ensemble des sous espaces de dimension n de E.

Si E est un espace normé, on note : $d_n(B,E) = d_n^E(B, \| \ \|_E)$.

On utilisera cette notion, dans le cas où $E = L^2(\Omega)$ et où $p = p_\omega = (\int_\omega |.|^2 dx)^{1/2}$ si $\omega \subset \Omega$. On pose alors :

$$d_n^E(B, p_\omega) = d_n(B, L^2(\omega))$$

Considérons la situation variationnelle (V, H, a), l'injection de V dans H étant compact , et a une forme h.c.c. sur V. Notons A l'opérateur de domaine D(A) associé à cette situation. Le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j, réelles, positives, tendant vers $+\infty$. On répète ces valeurs propres conformément à leur multiplicité, et on ordonne la suite λ_j de manière qu'elle soit croissante. Il existe une base hilbertienne (φ_j) de H, constituée de vecteurs propres de A, formant un système orthogonal dans V, pour a, telle que :

$$V = \{u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j / \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |u_j|^2 = a(u,u) < +\infty\}.$$

Posant $K_a = \{u \in V / a(u,u) \leq 1\}$, on en déduit :

$$d_n(K_a, H) = (\lambda_{n+1})^{-1/2} \tag{2}$$

ce qui n'est autre que la formule de Courant-Fischer([1],[6]).

On introduit donc la notation suivante : si K est une partie bornée, d'un espace de Hilbert H on pose :

$$N(\lambda;K,H) = \sum_{\lambda d_n^2(K,H)\geq 1} 1$$

(On omettra parfois le H).

$N(\lambda,K,H)$ est fini pour tout réel λ, si et seulement si K est relativement compact dans H.

Revenant à la situation variationnelle on voit que $N(\lambda,K_a,H)$ est le nombre de valeurs propres de A, inférieures à λ.

§ 2. DECOMPOSITION DE $N(\lambda)$

Soit Ω, un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^m$. On suppose donné un espace de Hilbert V, inclus et dense dans $L^2(\Omega)$, tel que :

$$H^k_{comp}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^k_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

On note $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble des formes integrodifférentielles a, h.c.c. sur V

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\ |\beta|\leq k}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u D^\beta \bar{v}\ dx$$

avec $\begin{cases} a_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega) & \text{si } |\alpha| = |\beta| = k \\ a_{\alpha\beta} \in L^\infty_{loc}(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| < 2k \end{cases}$.

Si U est un ouvert inclus dans Ω, on définit :

$$V(U) = \{u\in V/u(x)=0 \quad \text{pp}x \in \Omega - U\}.$$

Il est clair que V(U) est un sous espace fermé de V, et que si U est régulier et relativement compact dans Ω, $V(U) = H^k_o(U)$.

Pour a dans $\mathcal{A}(V)$ on pose : $K_a(U) = \{u \in V(U)/a(u,u) \leq 1\}$

Pour s réel > 0, on définit :

$$N_s^+(U,a) = \limsup_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-s} N(\lambda, K_a(U), L^2(U)).$$

$$N_s^-(U,a) = \liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-s} N(\lambda, K_a(U), L^2(U)).$$

et enfin :

$$B_s^{\pm}(a) = \operatorname*{Inf}_{U \subset\subset \Omega} N_s^{\pm}(\Omega - \bar{U}, a).$$

On note μ_a la mesure de densité $\mu_a'(x)$:

$$\mu_a'(x) = (2\pi)^{-m} \operatorname{mes}\{\xi / \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} < 1\}.$$

Avec ces notations on peut énoncer :

<u>Théorème</u> : i) L'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte, si et seulement si, il existe $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, tel que l'injection de $V(\Omega - \bar{\Omega}_1)$ dans $L^2(\Omega)$ soit compacte.

ii) Si l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors :

$$N_s^{\pm}(\Omega, a) = +\infty \qquad \text{si } s < m/2k$$

$$N_s^{\pm}(\Omega, a) = B_s^{\pm}(a) + \mu_a(\Omega) \qquad s = m/2k$$

$$N_s^{\pm}(\Omega, a) = B_s^{\pm}(a) \qquad s > m/2k$$

<u>Remarque</u> : On peut remplacer les fonctions λ^s considérées par des fonctions "ne croissant pas trop vite", $\lambda^s(\operatorname{Log}\lambda)^{s'}$ par exemple.

Le point i) est facile. On suppose donc que l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Soit Ω_1 un ouvert régulier (variété à bord de classe C^∞) tel que $\Omega_1 \subset\subset \Omega$; soit $\Omega_2 = \Omega - \bar{\Omega}_1$. On déduit facilement ii) du fait que $N_s^{\pm}(U,a)$ est une fonction croissante de U, et des relations :

(3) $$N(\lambda, K_a(\Omega_1), L^2(\Omega_1)) \sim \lambda^{m/2k} \mu_a(\Omega_1)$$

(4) $$N_s^{\pm}(\Omega, a) = N_s^{\pm}(\Omega_1, a) + N_s^{\pm}(\Omega_2, a).$$

Soit Ω' tel que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. En approchant à ε-près la forme a par des formes a_ε de $\mathcal{A}(V)$, à coefficients C^∞ sur Ω', uniformément sur $K_a(\Omega)$, on se limite à prouver (3) et (4) dans le cas où les coefficients de a sont C^∞ sur Ω'. Dans ce cas (3) est connu, ainsi qu'on l'a signalé dans l'introduction. Pour démontrer (4) on pose :

$$V_o = V(\Omega_1) \oplus V(\Omega_2) ; \; K_o = \{u \in V_o / a(u,u) \leq 1\}.$$

V_1 sera l'orthogonal de V_o dans V, pour a et K_1 la boule unité de V_1 pour a.

Les espaces $V(\Omega_1)$ et $V(\Omega_2)$ étant orthogonaux pour a et pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$ on a :

$$N(\lambda, K_o) = N(\lambda, K_a(\Omega_1)) + N(\lambda, K_a(\Omega_2)).$$

Comme d'autre part $K_o \subset K_a(\Omega_1)$ on a, compte tenu de (3)

(5) $$\begin{cases} N_s^+(\Omega_1, a) + N_s^+(\Omega_2, a) = \lim\sup \lambda^{-s} N(\lambda, K_o) \leq N_s^+(\Omega, a) \\ N_s^-(\Omega_1, a) + N_s^-(\Omega_2, a) = \lim\inf \lambda^{-s} N(\lambda, K_o) \leq N_s^-(\Omega, a). \end{cases}$$

Les espaces V_o et V_1 étant orthogonaux pour a, on montre que :

$$d^2_{n_o + n_1}(K_a(\Omega), L^2(\Omega)) \leq d^2_{n_o}(K_o, L^2(\Omega)) + d^2_{n_1}(K_1, L^2(\Omega))$$

et par suite :

(6) $$N(\lambda, K_a(\Omega)) \leq N\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda, K_o\right) + N(\gamma\lambda . K_1) \; (\gamma > 1)$$

On achèvera donc la démonstration si l'on prouve que $N(\lambda, K_1) = o(\lambda^{m/2k})$. En effet on tire de (6) :

$$N_s^{\pm}(\lambda, K_a(\Omega)) \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^s \lim \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} N(\lambda, K_o) \cdot \lambda^{-s}$$

Et en faisant tendre γ vers $+\infty$, on obtient les inégalités inverses de (5).

On achève donc la démonstration en prouvant :

<u>Lemme 1</u> : Avec les notations précédentes on a : $N(\lambda,K_1) = O(\lambda^{\frac{m-1}{2k}})$.

Soit $\Gamma = \partial\Omega_1$. On définit les espaces X et Y :

$$X = \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(\Gamma)\,,\quad Y = \prod_{j=0}^{k-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)\,.$$

Soit γ l'opérateur de trace de $H^k(\Omega_1)$ sur $X, (\gamma = \gamma_o\ldots\gamma_{k-1})$. Soit γ' l'opérateur de trace de $H^k(\Omega_2 \cap \Omega')$ sur $X, (\gamma' = \gamma'_o\ldots\gamma'_{k-1})$. Pour u dans V on a : $\gamma_j u = (-1)^j\gamma'_j u$.

On démontre le lemme en construisant un opérateur de relèvement de trace R, de X sur V_1, et de Y dans $L^2(\Omega)$, et en utilisant les résultats d'El Kolli, qui montrent que :

$$d_n(X,Y) = O(n^{-\frac{\text{[illegible]}}{m-1}})\,. \qquad ([3])$$

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur différentiel, à coefficients C^∞ sur Ω : $\mathcal{A} = \sum_{\substack{|\alpha|\le k\\|\beta|\le k}} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta} D^\alpha$. On note encore :

$$a_1(u,v) = \int_{\Omega_1} \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, D^\beta \bar{v}.dx$$

$$a_2(u,v) = \int_{\Omega_2} \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, D^\beta \bar{v}.dx$$

On sait qu'il existe des opérateurs B_j, et B'_j, d'ordre inférieur à $2k - j - 1$ tels qu'on ait :

$$\forall\, u,\ v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \qquad a_1(u,v) - (\mathcal{A}u,v)_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_\Gamma B_j u.\gamma_j \bar{v} d\sigma$$

$$\forall\, u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ v \in \mathcal{D}(\Omega')\ \ a_2(u,v) - (\mathcal{A}u,v)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_1^{k-1} \int_\Gamma B'_j u\ \gamma'_j \bar{v} d\sigma$$

Soit $(A_o, D(A_o))$ l'opérateur associé à la situation varia - tionnelle $(V_o, L^2(\Omega), a)$. A_o est un isomorphisme de $D(A_o)$ sur $L^2(\Omega)$. On a de manière évidente : pour u dans $D(A_o) . A_o u = \mathcal{A} u$ sur $\Omega' - \Gamma$. Les théorèmes de régularité montrent que si u est dans $D(A_o)$, $u \in H^{2k} \cap H_o^k(\Omega_1)$, $u \in H^{2k}(\Omega'' \cap \Omega_2)$, si $\Omega_1 \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega'$. On note τ_j l'opérateur $\gamma_o . B_j$ et on remarque que τ_j est continu de $D(A_o)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$. De même $\tau'_j = \gamma_o . B'_j$ est continu de $D(A_o)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$.

On en déduit les formules de Green :

$$u \in D(A_o),\ v \in V :\quad a_1(u,v) - (A_o u, v)_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j u, \gamma_j v)_{L^2(P)}$$

$$u \in D(A_o)\ \ v \in H_o^k(\Omega'')\ \ a_2(u,v) - (A_o u, v)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_{1}^{k-1} (\tau'_j u, \gamma'_j v)_{L^2(\Gamma)}$$

Soit maintenant $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, une partition de l'unité telle que $\varphi_1 = 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}_1$

$\varphi_2 = 1$ sur $\Omega - \Omega''$.

Pour v dans V, on a $v = \varphi_1 v + \varphi_2 v$, avec $\varphi_1 v \in H_o^k(\Omega'')$, et $\varphi_2 v \in V(\Omega_2) \subset V_o$ + Pour u dans $D(A_o)$ on a donc :

$$a(u, \varphi_2 v) = (A_o u, \varphi_2 v)$$

Et par suite pour v dans V :

$$a_2(u,v) - (A_o u)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_{1}^{k-1} (\tau'_j u, \gamma'_j v)_{L^2(\Gamma)}$$

Posant $T_j = \tau_j + (-1)^j \tau'_j$, on établit donc, la formule de Gre

$$\forall\, u \in D(A_o),\ \forall\, v \in V :\ a(u,v) - (A_o u, v) = \sum_{1}^{k-1} (T_j u, \gamma_j v)_{L^2(\Gamma}$$

T_j étant continu de $D(A_o)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$.

Soit $g \in Y$, $g = (g_o,..,g_{k-1})$. On définit Rg par :

$$\forall\, u \in D(A_o) \qquad (A_o u, Rg\,)_{L^2(\Omega)} = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle T_j u, g_j \rangle_{H^{j+1/2}(\Gamma)\times H^{-j-1/2}(\Gamma)}$$

A_o étant un isomorphisme de $D(A_o)$ sur $L^2(\Omega)$, il est clair que Rg est bien défini, et que R est linéaire continu de Y dans $L^2(\Omega)$. On a : $Rg = {}^tA_o^{-1} Lg$ où Lg est l'élément du dual de $D(A_o)$ défini par $Lg(u) = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle T_j u, g_j \rangle$.

Soit d'autre part, un relèvement de trace S, quelconque de X dans $H_o^k(\Omega') \subset V$. Soit P la projection de V sur V_1, orthogonale pour a. Il est clair que $P \circ S$ est un isomorphisme de X sur V_1.

Si $g \in X$, soit $u_1 = P_o Sg$. On a donc $\gamma u_1 = g$. La formule de Green montre qu'alors :

$$(A_o u, R_g) = (A_o u, u_1) = - \sum_{1}^{k-1} (T_j u, g_j)_{L^2(\Gamma)}$$

puisque $a(u,u_1) = 0$ pour $u \in D(A_o) \subset V_o$ et $u_1 \in V_1$.

D'où $Rg = P_o S\, g$.

On a donc construit le relèvement de traces désiré. On a en fait transposé l'opérateur A_o, et résolu un problème du type :

$$\begin{cases} \mathcal{A} u = 0 \quad \text{sur } \Omega - \Gamma \\ \gamma u = g \in Y \\ \text{Conditions de trace sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad ([7]).$$

§ 3. <u>UN LEMME</u>

Il nous sera utile d'introduire la notation suivante : Si E est un espace normé, on note SE, sa boule unité.

On va maintenant chercher des conditions suffisantes pour que $B^+_{m/2k}(a) = 0$. On remarque d'abord que cette égalité est une propriété de l'espace V : pour que $B^+_{m/2k}(a)$ soit nul, pour toute forme a de $\mathcal{A}(V)$, il faut et il suffit qu'il le soit pour une forme a de $\mathcal{A}(V)$ et ceci est équivalent à la propriété suivante :

(7) $$\operatorname*{Inf}_{\Omega_1 \subset\subset \Omega} \left\{ \limsup_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-m/2k} N(\lambda, SV(\Omega - \overline{\Omega}_1)) \right\} = 0$$

Pour montrer (7), on va donner des majorations des n-diamètres de $SV(\Omega - K)$ dans $L^2(\Omega)$; et pour $V = H^k_o(\Omega)$ ou $H^k(\Omega)$ on se limitera à trouver ces majorations pour le cas $k = 1$ grâce à ce qui suit.

Soit X un espace de Hilbert, et soient $(A_j, D(A_j))$ $(j = 1,..m)$ des opérateurs non bornés, fermés dans X. Soit X^1 un sous-espace fermé de $\bigcap_{j=1}^m D(A_j)$, muni de la norme :

$$\|u\|^2_1 = \|u\|^2_X + \sum_{j=1}^m \|A_j u\|^2_X$$

On a défini par récurrence pour $k \geq 2$

$$X^k = \{u \in X^{k-1} / A_j u \in X^{k-1}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_k = \|u\|^2_{k-1} + \sum_{j=1}^m \|A_j u\|^2_{k-1}$$

On a :

<u>Proposition 1</u> : Avec ces notations si $\limsup_{n\to+\infty} n^\alpha d_n(S X^1, X) \leq C$, alors pour $k < 1$, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{\alpha(1-k)} d_n(SX^1, X^k) \leq C^{1-k}\gamma$$

où γ est une constante ne dépendant que de k, 1, m et α.

<u>Démonstration</u> : Soit T l'opérateur de X^1 dans $(X)^{m+1}$: $Tu = (u, A_1 u, .. A_m u)$ T est une isométrie de X^k sur TX^k, sous espace fermé de $(X^{k-1})^{m+1} = Y^k$. D'où : $d_n(SX^1, X^k) = d_n(STX^1, TX^k)$.

En considérant la projection orthogonale de Y^k sur TX^k, on voit que :

$$d_n(STX^l, TX^h) = d_n(STX^l, Y^k) \leq d_n(SY^l, Y^k)$$

Il est facile de voir, en approchant sur chaque composante par un espace de dimension n, que :

$$d_{n(m+1)}(SY^l, Y^k) \leq d_n(SX^{l-1}, X^{k-1}).$$

Utilisant le fait que, pour $h < k < l$, on a

$$d_{n_1+n_2}(SX^l, X^h) \leq d_{n_1}(SX^l, X^k) \times d_{n_2}(SX^k, X^h)$$

on montre par récurrence sur $(l-k)$, l'existence d'un entier $\nu_{k,l}$ tel que :

$$d_{n\cdot\nu_{k,l}}(SX^l, X^k) \leq [dn(SX^l, X)]^{l-k}$$

et on en déduit facilement la proposition.

§ 4. PROBLEMES UNIFORMEMENT ELLIPTIQUES

On garde les notations précédemment introduites. On énonce :

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, de mesure finie. On suppose que V est un espace de Hilbert vérifiant :

$$H^k_{comp}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^k_o(\Omega).$$

Alors pour toute forme a de $\mathcal{A}(V)$ on a :

$$N(\lambda, K_a(\Omega)) \sim \lambda^{m/2k}.\mu_a(\Omega).$$

Soit $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Avec les notations de la proposition 1 prenant $X = L^2(\Omega - \overline{\Omega}_1)$, $X^1 = H^1_o(\Omega - \overline{\Omega}_1)$, $H^k_o(\Omega - \overline{\Omega}_1)$ est un sous-espace fermé de X^k, et $V(\Omega - \overline{\Omega}_1) \hookrightarrow H^k_o(\Omega - \overline{\Omega}_1)$. Donc, compte tenu de la proposition 1 et de (7), le théorème résulte de :

<u>Proposition 2</u> : Il existe une constante $C(m)$, telle que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, de mesure finie on a :

$$\limsup n^{1/m} d_n(SH_o^1(\Omega), L^2(\Omega)) \leq C(m)(\text{mes}\,\Omega)^{1/m}$$

On obtient d'abord la majoration suivante :

<u>Lemme 2</u> : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^m$. Soient ω_1 et ω_2 deux ensembles mesurables inclus dans C. Notant $\delta(C)$ le diamètre de C, on a pour toute fonction f de $H^1(C)$:

$$\int_{\omega_1 \times \omega_2} |f(x)-f(y)|^2 dxdy \leq 2^{m-1}\{\delta(C)\}^2\{\text{mes}\,\omega_1 + \text{mes}\,\omega_2\}\int_C |Df(z)|^2$$

On démontre ce lemme, en écrivant que pour f dans $C^1(C)$ on a : $\quad f(x) - f(y) = \int_o^1 \langle Df(tx+(1-t)y), x-y\rangle_{\mathbb{R}^m} dt.$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère un pavage de $\mathbb{R}^m$ par des cubes $J_\alpha (\alpha \in \mathbb{Z}^m)$ de cote ε : $J_\alpha = \{x/|x_j - \varepsilon\alpha_j| < \varepsilon \quad j=1,\ldots m\}$.

Soit $A(\varepsilon)$ l'ensemble des α tels que $J_\alpha \cap \Omega \neq \emptyset$; soit $A'(\varepsilon)$ l'ensemble des α tels que : $\text{mes}(J_\alpha \cap \Omega) \geq \frac{1}{2}\,\text{mes}\,J_\alpha$.

On note $n(\varepsilon) = \text{card}\,A'(\varepsilon)$. On a donc :

(8) $$\varepsilon^m . n(\varepsilon) \leq 2\,\text{mes}\,\Omega.$$

Soit $E_{n(\varepsilon)}$ l'espace de dimension $n(\varepsilon)$ engendré par les fonctions caractéristiques 1_{J_α} $(\alpha \in A'(\varepsilon))$.

Pour f dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et α dans $A'(\varepsilon)$ on pose :

$$\bar{f}_\alpha = \frac{1}{\text{mes}\,J_\alpha}\int_{J_\alpha} f(y).dy.$$

On déduit du lemme 2 :

$$|f - \bar{f}_\alpha|^2_{L^2(J_\alpha)} \leq 2^m . \varepsilon^2 \|f\|^2_{H^1(J_\alpha)} \qquad \alpha \in A'(\varepsilon)$$

Si $\alpha \in A(\varepsilon) - A'(\varepsilon)$ en prenant dans le lemme 2, $\omega_1 = \Omega \quad J_\alpha$, $\omega_2 = \complement \Omega \cap J_\alpha$, compte tenu de la définition de $A'(\varepsilon)$, on a :

$$|f|^2_{L^2(J_\alpha)} \leq 2^m.\varepsilon^2 \, \|f\|^2_{H^1(J_\alpha)} .$$

D'où l'on déduit : $d_{n(\varepsilon)}(SH^1_0(\Omega), L^2(\Omega)) \leq 2^{m/2}.\varepsilon < 2^m\varepsilon$.
On a alors : $N(\lambda, SH^1_0(\Omega), L^2(\Omega)) \leq n(2^{-m}\lambda^{-1/2}) \leq 4 \text{ mes } \Omega.\lambda^{m/2}$ d'après (8)

On en déduit alors , la proposition.

<u>Exemple</u> : Soit Ω, un ouvert de mesure finie. Soit $d(x)$ la distance au bord. Soit a :

$$a(u,v) = \int_\Omega Du.Dv + \int_\Omega d(x)^{-\alpha} u\bar{v} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

Soit V l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour a. On a bien : $V \hookrightarrow H^1_0(\Omega)$. L'opérateur différentiel est ici : $-\Delta + d(x)^{-\alpha}$

Nous allons maintenant expliciter la condition (C) annoncée dans l'introduction.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$, possédant la propriété du segment suivante :

Il existe un recouvrement O_j $(j = 1, \ldots N)$ de $\partial\Omega$, des vecteurs h_j, tels que pour tout x de $O_j \cap \Omega$ et pour tout $t \in [0,1]$ on ait $x + t h_j \in \Omega$.

Pour $|x-y|$ assez petit, x et y dans $O_j \cap \Omega$, il existe un réel s tel que le segment $[x + sh_j, \, y + sh_j]$ soit inclus dans Ω. Soit $S_{x,y}$ l'ensemble des tels s. On pose :

$$\rho(x,y) = \operatorname*{Inf}_{s \in S_{xy}} (2s|h_h| + |x-y|).$$

$2s|h_j| + |x-y|$ étant la longueur du chemin joignant x à y dans Ω, union des segments $[x, x+sh_j], [x+sh_j, y+sh_j]$ et $[y+sh_j, y]$.

<u>Théorème 3</u> : On suppose qu'il existe une constante K telle que

$$\rho(x,y) \leq K|x-y| .$$

Alors si V est un espace de Hilbert tel que :

$$H^k_{comp}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^k(\Omega)$$

pour toute forme a de $\mathcal{A}(V)$, on a :

$$N(\lambda, K_a(\Omega)) \sim \lambda^{m/2k} . \mu_a(\Omega) .$$

Notons $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \;/\; d(x,\partial\Omega) < \delta\}$.

Comme pour le théorème 2, cela résultera de l'estimation : il existe une constante C telle que pour δ assez petit, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/m} d_n(SH^1(\Omega), L^2(\Omega_\delta)) \leq C(\text{mes } \Omega_\delta)^{1/m}$$

La démonstration est semblable à celle de la proposition 2. L'équivalent du lemme 2 est ici.

<u>Lemme 3</u> : Il existe des constantes ε_o, K' et C telles que si $\omega \subset O_j \;\; \Omega$, et $\delta(\omega) < \varepsilon_o$, on a pour toute fonction f de $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\omega\times\omega} |f(x) - f(y)|^2 dxdy \leq C. \text{ mes } \omega \; (\delta(\omega))^2 \; \|f\|^2_{H^1(\Gamma(\omega))} .$$

où $\Gamma(\omega)$ est l'ensemble des points z de Ω tels que $d(z,\omega) \leq K'.\delta(\omega)$.

On montre que pour f dans $C^1(\Omega)$, $f(x) - f(y)$ est l'intégrale de Df sur un chemin joignant x à y. En fait si $\delta(\omega)$ est assez petit, il existe s réel, tel que s soit dans $S_{x\,y}$ pour tous les (x,y) de $\omega\times\omega$. On prend le chemin associé. On remarque que de plus on peut prendre $s \leq K.\delta(\omega)$

On considère une partition de $\mathbb{R}^m$ par des cubes de côtés ε, (J_α). Le nombre des cubes coupant Ω_δ est $n(\varepsilon)$. Sur chacun on approche f par sa valeur moyenne, et grâce au lemme 3, si ε est assez petit, en remarquant qu'un point z ne peut appartenir qu'a un nombre borné de $\Gamma(\Omega_\delta \cap J_\alpha)$, on montre que :

$$d_{n(\varepsilon)}(SH^1(\Omega),\ L^2(\Omega\delta)) \leq C.\varepsilon$$

On remarque $\varepsilon^m n(\varepsilon) \sim \text{mes}\ \overline{\Omega_\delta}$ et puisque l'hypothèse implique que $\partial\Omega$ est de mesure nulle, on conclut comme pour la proposition 2.

Le théorème est encore vrai, si Ω est localement difféomorphe, à un ouvert satisfaisant les hypothèses du théorème.

§ 5. UN EXEMPLE DE COMPORTEMENT IRREGULIER

Si Ω est un ouvert, possédant une infinité de composantes connexes, l'injection de $H^1(\Omega)$ $(1 > k)$ n'est jamais compacte. On va étudier quelques ouverts pour lesquels (1) est fausse.

Soit I_o l'intervalle $]0,1[$. On considère une suite d'intervalles I_n $(n = 1,\dots)$, disjoints, de longueur ε_n, inclus dans I_o. Pour $\beta \geq 0$, on définit :

$$\Omega_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x \in I_o\ ,\ 0 < y < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}.1_{I_n}(x)$$

On note $f(\lambda) \approx g(\lambda)$, pour dire qu'il existe deux constantes $0 < c \leq C < +\infty$, telles que $cg(\lambda) \leq f(\lambda) \leq Cg(\lambda)$. On a :

__Théorème 4__ : Soit a le produit scalaire usuel de $H^1(\Omega_\beta)$. Alors :

i) $\beta = 0$ l'injection de $H^1(\Omega_\beta)$ dans $L^2(\Omega_\beta)$ n'est pas compacte .

ii) $0 < \beta < 1/2$ $\quad N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \approx \lambda^{1/2\beta}$.

iii) $\beta = 1/2$ $\quad N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \approx \lambda$ mais

$N_1^-(\Omega_\beta, a) > \mu_a(\Omega_\beta)$ et $B_1^-(a) > 0$

iv) $\beta > 1/2$ $\quad N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \sim \lambda\ \mu_a(\Omega_\beta)$.

Le point iv) se démontre par une adaptation de la démonstration du théorème 3.

On note $J_o = I_o \times I_o$; $J_n = I_n \times]1,1+n^{-\beta}[$.

Soit $V(J_n) = \{u \in H^1(J_n) / u(.,1) = 0 \text{ dans } H^{1/2}(I_n)\}$ pour $n = 0,1\ldots$ On identifie $V(J_n)$ à l'espace des u de $H^1(\Omega_\beta)$ nuls sur $\Omega_\beta - J_n$. Soit V l'ensemble des u de $H^1(\Omega_\beta)$ tels que $u(.,1) = 0$ dans $H^{1/2}(I_o)$. On a : $V = \overset{\infty}{\underset{o}{\oplus}} V(J_n)$, la somme étant orthogonale dans $H^1(\Omega_\beta)$ et dans $L^2(\Omega_\beta)$.

On en déduit :

$$N(\lambda, SV) = \sum_o^\infty N(\lambda, SV(J_n)).$$

D'autre part, il existe un opérateur de relèvement de trace R, de $H^{1/2}(I_o)$ dans $H^1(\Omega_\beta)$ et de $H^{-1/2}(I_o)$ dans $L^2(\Omega_\beta)$. Soit $W = R\,H^{1/2}(I_o)$. On a donc : $H^1(\Omega_\beta) = V \oplus W$.

Utilisant les résultats d'El Kolli ([3]) on montre que :

$$d_n(SW, L^2(\Omega_\beta)) \le C\, d_n\,(SH^{1/2}(I_o), H^{-1/2}(I_o)) \le C\, n^{-1}. \tag{9}$$

Connaissant les fonctions propres du problème aux limites défini par : $(V(J_p), L^2(J_p), (.,.)_{H^1(J_p)})$ on montre que pour $p \ge 1$.

$$\left\{\begin{array}{l} N(\lambda, SV(J_p)) \le \frac{\lambda}{4\pi}\, \varepsilon_p . P^{-\beta} + [\sqrt{\lambda}\, \frac{P^{-\beta}}{\pi} + 1/2] + \frac{\sqrt{\lambda}\, \varepsilon_p}{2\pi} \\ M(\lambda, SV(J_p)) \ge \frac{\lambda}{4\pi}\, \varepsilon_p .\ P^{\beta} - \frac{\sqrt{\lambda}\, \varepsilon_p}{2\pi} - 1/2 \\ N(\lambda, SV(J_p)) \ge [\ \sqrt{\lambda}\, \frac{P^{-\beta}}{\pi} + 1/2] \end{array}\right. \tag{10}$$

Posons $M_\nu(\mu) = \sum_{p=\nu+1}^{\infty} [\mu\, P^{-\beta} + 1/2]$. On montre que :

si $\beta < 1$, $\forall \nu$ $M_\nu(\mu) \sim \mu^{1/\beta} \int_o^{1/2} [t^{-\beta} + 1/2]dt$.

On en déduit, utilisant (10) et l'estimation