

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. GOULAOUIC

Sur l'opérateur $\Delta r^2 + \mu \frac{\partial}{\partial r} r + \lambda$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 16,
p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A17_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR L'OPÉRATEUR $\Delta r^2 + \mu \frac{\partial}{\partial r} r + \lambda$

par C. GOULAOUIC

On présente quelques résultats d'un travail en collaboration avec M. S. Baouendi et L. Lipkin ; l'exemple étudié est très particulier mais peut éclairer des situations plus générales ; soit l'équation dans \mathbf{R}^n

$$(1) \quad Lu \equiv \Delta r^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial r} ru + \lambda u = f \quad .$$

On montre que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de (λ, μ) , l'opérateur L est surjectif dans les fonctions analytiques au voisinage de 0 et injectif dans les fonctions C^∞ ; pour les (λ, μ) exceptionnels, on peut décrire les conditions de compatibilité dans (1) et le noyau C^∞ de L (qui est toujours constitué de fonctions analytiques) ; il en résulte que si f est analytique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, toute solution de (1) C^∞ sur Ω est analytique sur Ω .

Les méthodes utilisées ici sont : développements sur les harmoniques sphériques, techniques d'équations de Fuchs, caractérisation en coordonnées sphériques des fonctions analytiques au voisinage de 0...

§ 1. DEVELOPPEMENT EN HARMONIQUES SPHERIQUES

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on note aussi $x = r\theta$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in S_{n-1}$ (la sphère unité dans \mathbf{R}^n).

Soit une base orthonormée dans $L^2(S_{n-1})$ d'harmoniques sphériques $(P_{1,\alpha})$ avec $1 \in \mathbf{N}$ et $1 \leq \alpha \leq \alpha(1)$; on a (cf. [2]) :

$$\alpha(1) = \frac{(21+n-2)(n+1-3)!}{(n-2)!1!} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

$r^1 P_{1,\alpha}$ est un polynôme harmonique homogène de degré 1. Le laplacien en coordonnées sphériques s'écrivant :

$$(2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta \quad ,$$

on a aussi

$$(3) \quad \Delta_\theta (P_{1,\alpha}) = -1(1+n-2)P_{1,\alpha}.$$

Soit f une fonction C^∞ pour $|x| < r_0$; on peut écrire

$$(4) \quad \begin{cases} f(x) = \sum_{1,\alpha} \tilde{f}_{1,\alpha}(r) P_{1,\alpha}(\theta) & \text{avec} \\ \tilde{f}_{1,\alpha}(r) = \int_{S_{n-1}} f(r\vartheta) \overline{P_{1,\alpha}}(\theta) d^n \theta \end{cases}$$

Les fonctions $\tilde{f}_{1,\alpha}$ sont C^∞ dans $[0, r_0[$; $f_{1,\alpha} = r^{-1} \tilde{f}_{1,\alpha}$ est borné au voisinage de 0. On a le résultat suivant :

Proposition 1 : Soit f une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n : on note, pour tout $(1,\alpha)$, $g_{1,\alpha}(r^2) = f_{1,\alpha}(r)$.

- 1) Pour tout $(1,\alpha)$, la fonction $g_{1,\alpha}$ est C^∞ au voisinage de 0.
- 2) La fonction f est analytique au voisinage de 0 si et seulement si il existe $M > 0$ et $t_0 > 0$ tels que l'on ait pour tout $(1,\alpha)$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, t_0]$,

$$(5) \quad |D^k g_{1,\alpha}(t)| \leq M^{k+1} k!$$

Démonstration : Pour prouver 1) il suffit de voir que les dérivées impaires de $f_{1,\alpha}$ à l'origine sont nulles. Si on suppose f analytique, on montre aisément (5). Inversement supposons (5) et montrons que f est analytique; on a

$$f(x) = \sum_{1,\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_{1,\alpha}^j r^{2j} \tilde{P}_{1,\alpha}(x)$$

avec $\tilde{P}_{1,\alpha} = r^1 P_{1,\alpha}$ harmonique et $|a_{1,\alpha}^j| \leq M^{1+j+1}$; on a

$$\Delta(r^{2j} \tilde{P}_{1,\alpha}) = 2j(2j+3n-2) \tilde{P}_{1,\alpha}$$

Notons $\| \cdot \|_\rho$ la norme dans $L^2(B(0,\rho))$ où $B(0,\rho)$ est la boule de rayon ρ centrée en 0; on montre que pour ρ assez petit ($\rho > 0$), il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\| \Delta^k f \|_\rho \leq C^{k+1} (k!)^2,$$

donc, en utilisant un résultat de [1], f est analytique au voisinage de 0.

§ 2. UNICITE DANS LES FONCTIONS C^∞

Soient u et f des fonctions C^∞ et vérifiant $Lu = f$ dans $B(0, r_0)$; on note

$$(6) \quad \begin{cases} u(x) = \sum_{l, \alpha} v_{l, \alpha}(r^2) r^l P_{l, \alpha}(\vartheta) \\ f(x) = \sum_{l, \alpha} g_{l, \alpha}(r^2) r^l P_{l, \alpha}(\vartheta), \quad \text{pour } r \in [0, r_0[. \end{cases}$$

On vérifie que l'équation (1) implique, pour tout (l, α) ,

$$(7) \quad \begin{cases} c_1(\Lambda) v_{l, \alpha} = g_{l, \alpha} & \text{avec } \Lambda = t \frac{d}{dt} \quad \text{et} \\ c_1(\Lambda) = 4\Lambda^2 + 2(n + \mu + 2l + 2)\Lambda + l(\mu + 4) + \lambda + 2n + \mu. \end{cases}$$

Les racines caractéristiques de l'équation de Fuchs (7) sont :

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{-(n + \mu + 2l + 2) + \sqrt{\delta}}{4} \\ \rho_2 = \frac{-(n + \mu + 2l + 2) - \sqrt{\delta}}{4} \quad , \text{ avec} \\ \delta = (n + \mu + 2l + 2)^2 - 4(l(\mu + 4) + \lambda + 2n + \mu).. \end{cases}$$

On note $\sigma(L) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 ; \text{il existe } l \in \mathbb{N} \text{ pour lequel } \rho_1 \text{ ou } \rho_2 \text{ est dans } \mathbb{N}\}$; on a le résultat :

Proposition 2 : 1) Pour $(\lambda, \mu) \notin \sigma(L)$, l'opérateur L est injectif dans l'espace des fonctions C^∞ au voisinage de l'origine.
2) Pour $(\lambda, \mu) \in \sigma(L)$, le noyau C^∞ de L est constitué de fonctions analytiques au voisinage de l'origine.

Démonstration : Le 1) est évident ; pour prouver le 2), on remarque d'abord que si $(\lambda, \mu) \in \sigma(L)$ correspond à un nombre fini de racines ρ_1 ou ρ_2 dans \mathbf{N} , le noyau correspondant est constitué de polynômes; le comportement de ρ_1 et ρ_2 quand $l \rightarrow +\infty$ est :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\rho_2(l)) &\rightarrow -\infty \quad \text{quand } l \rightarrow +\infty \\ \rho_1(l) &= -\frac{\mu+4}{4} + \frac{\mu^2 + 2n\mu - 4\lambda}{16l} + o\left(\frac{1}{l}\right) . \end{aligned}$$

On ne peut donc avoir une infinité de racines ρ_1 ou ρ_2 dans \mathbf{N} que pour :

$$\begin{cases} -\frac{\mu+4}{4} \in \mathbf{N} \\ \mu^2 + 2n\mu - 4\lambda = 0 \end{cases}$$

et alors, on trouve effectivement $\rho_1 = -\frac{\mu+4}{4}$ pour $l \in \mathbf{N}$. Le noyau C^∞ de L est constitué alors de fonctions de la forme

$$u(x) = r^{-\frac{\mu+4}{2}} \sum_{l, \alpha} c_{l, \alpha} r^l P_{l, \alpha}(\theta) ;$$

de telles fonctions C^∞ sont aussi analytiques et même vérifient $\Delta^k u = 0$ avec $k = -\frac{\mu}{4}$.

§ 3. EXISTENCE DANS LES FONCTIONS ANALYTIQUES

On démontre le résultat :

Proposition 3 : Soient $(\lambda, \mu) \notin \sigma(L)$ et f une fonction analytique au voisinage de 0. Il existe une unique fonction u analytique telle que

$$Lu = f \text{ au voisinage de } 0.$$

Démonstration : Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait pour tout $l \in \mathbf{N}$,

$$\operatorname{Re} \rho_1(l) < k$$

$$\operatorname{Re} \rho_2(l) < k.$$

Supposons d'abord que l'on a pu choisir $k = 0$; alors l'équation (7) avec $g_{1,\alpha}$ continue en 0 admet une unique solution continue $v_{1,\alpha}$ donnée par

$$v_{1,\alpha}(t) = \int_{[0,1]^2} \sigma_1^{-\rho_1-1} \sigma_2^{-\rho_2-1} g_{1,\alpha}(\sigma_1 \sigma_2 t) d\sigma_1 d\sigma_2 .$$

Si la famille $(g_{1,\alpha})$ vérifie (5), il en est de même de la famille $(v_{1,\alpha})$, ce qui, d'après la proposition 1, montre l'existence de u analytique telle que $Lu = f$.

Lorsque $(\lambda, \mu) \notin \sigma(L)$ mais que l'on ne peut choisir $k = 0$, on se ramène à la situation précédente en utilisant un développement de Taylor de $v_{1,\alpha}$ et $g_{1,\alpha}$ jusqu'à l'ordre $k-1$; on a pour tout $(1,\alpha)$,

$$g_{1,\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} g_{1,\alpha}^j t^j + t^k g_{1,\alpha}^k(t) ,$$

avec $g_{1,\alpha}^j \in \mathfrak{C}$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et $g_{1,\alpha}^k$ analytique au voisinage de 0 et $(g_{1,\alpha}^k)_{1,\alpha}$ vérifie (5) si f est analytique .

On cherche $v_{1,\alpha}$ solution de (7) sous la forme

$$v_{1,\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} v_{1,\alpha}^j t^j + t^k v_{1,\alpha}^k(t) ,$$

avec $v_{1,\alpha}^j \in \mathfrak{C}$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et $(v_{1,\alpha}^k)_{1,\alpha}$ vérifiant (5).

L'équation (7) équivaut au système :

$$(8) \quad \mathcal{C}_1(\Lambda) v_{1,\alpha}^j t^j = g_{1,\alpha}^j t^j \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k-1$$

$$(9) \quad \mathcal{C}_1(\Lambda) (t^k v_{1,\alpha}^k(t)) = t^k g_{1,\alpha}^k(t) ,$$

c'est-à-dire encore :

$$(10) \quad \mathcal{C}_1(j) v_{1,\alpha}^j = g_{1,\alpha}^j \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k-1$$

$$(11) \quad 4(\Lambda - (\rho_1 - k))(\Lambda - (\rho_2 - k)) v_{1,\alpha}^k(t) = g_{1,\alpha}^k(t) .$$

Le système (10) détermine $(v_{1,\alpha}^j)$ pour $0 \leq j \leq k-1$ puisque $c_1(j)$ n'est jamais nul. L'équation (11) est du type précédemment vu avec des racines caractéristiques à partie réelle négative. Les solutions $(v_{1,\alpha}^j)_{1,\alpha}$ ainsi déterminés vérifient (5) donc définissent une solution analytique de (7).

Remarquons que si $(\lambda, \mu) \notin \sigma(L)$, la résolubilité de (10) implique des conditions sur $(g_{1,\alpha}^j)$, donc L n'est alors pas surjectif dans les fonctions analytiques au voisinage de 0.

§ 4. REGULARITE ANALYTIQUE DE L

Des propositions 2 et 3 résulte immédiatement :

Proposition 4 : Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $Lu \in \mathcal{A}(\Omega)$ (espace des fonctions analytiques sur Ω); alors $u \in \mathcal{A}(\Omega)$.

En effet, le seul problème est au voisinage de 0 (lorsque $0 \in \Omega$) et lorsque $(\lambda, \mu) \in \sigma(L)$; mais alors nécessairement Lu vérifie les conditions de compatibilité imposées par (10), il existe donc une fonction analytique v telle que $Lv = Lu$ et comme le noyau de L est constitué de fonctions analytiques, u est aussi analytique.

Dans la proposition 4, on pourrait supposer sur u une régularité à priori plus faible, mais il ne suffit pas de supposer que u est une distribution sur Ω (lorsque $0 \in \Omega$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Aronszajn : C. R. Acad. Sc. Paris, 205 (1937) p. 16-18.
 - [2] N. J. Vilenkin : Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes ; Dunod (Paris).
-