Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Raïs

Solutions élémentaires invariantes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 14, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SOLUTIONS ELEMENTAIRES INVARIANTES

par M. RAÏS

Exposé N° XIV

17 Janvier 1973

§ 1. LA DIVISION PAR UNE FONCTION ANALYTIQUE

1.1 Il s'agit de donner des indications sur la méthode qu'utilise M. F. Atiyah ([1]) pour résoudre le problème de la division par une fonction analytique. Le résultat obtenu s'énonce ainsi :

Proposition 1 : Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique réelle (connexe et paracompacte). Soit u une fonction analytique (réelle) non nulle sur $\mathcal{V}$. Il existe une distribution T sur $\mathcal{V}$ telle que $uT = 1$.

1.2 Commentaires : a) Lorsque $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (dans ce qui suit, n sera toujours la dimension de la variété $\mathcal{V}$), c'est contenu dans un théorème de S. Lojasiewicz ([7]). Il existe aussi une démonstration, dûe à L. Hörmander ([6]), qui considère le cas où u est plus particulièrement une fonction polynôme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Si u n'est pas analytique, elle n'a pas forcément d'inverse distribution T : par exemple si $V = \mathbb{R}$, et $u : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x}2)$, u a un (et un seul) inverse dans $\mathbb{R} - \{0\}$, qui n'est pas à croissance lente quand x "tend" vers zéro. Bien entendu, si u et $\mathcal{V}$ sont comme dans la proposition 1, la fonction u^{-1} définie et analytique dans le complémentaire de l'ensemble $u^{-1}(0)$ des zéros de u dans $\mathcal{V}$ est localement à croissance lente au bord de $\mathcal{V} - u^{-1}(0)$ (Inégalité de Lojasiewicz).

c) Dans l'énoncé de la proposition 1, on parle de distribution sur $\mathcal{V}$; il faut donc rappeler ce qu'on entend par là : sur la variété $\mathcal{V}$ non orientée, on distingue l'espace $\mathcal{D}^n(\mathcal{V})$ des n-formes différentielles C^∞ à support compact (formes ordinaires ou paires) et l'espace $\underline{\mathcal{D}}^n(\mathcal{V})$ des n-formes ...impaires ou tordues, qu'on appelle aussi l'espace des densités C^∞ à support compact. On munit ces espaces des topologies correspondantes habituelles, et on définit l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{V}$ comme le dual fort de $\underline{\mathcal{D}}^n(\mathcal{V})$ et l'espace $\underline{\mathcal{D}}'(\mathcal{V})$ des distributions impaires ou tordues comme celui de $\mathcal{D}^n(\mathcal{V})$ (voir [11], chap. IX). Avec le vocabulaire des courants, $\mathcal{D}'(\mathcal{V})$ est l'espace des 0-courants pairs, tandis que $\underline{\mathcal{D}}'(\mathcal{V})$ est l'espace des 0-courants impairs ou tordus. Alors une fonction localement intégrable sur $\mathcal{V}$ (on entend par là une fonction localement intégrable par rapport à la mesure intrinsèque de $\mathcal{V}$), définit une distribution sur $\mathcal{V}$. De même une fonction localement intégrable sur $\mathcal{V}$, de type impair (i.e. une fonction localement intégrable sur le revêtement orienté canonique de $\mathcal{V}$, qui se transforme en son opposé par la symétrie de ce revêtement) définit une distribution tordue sur $\mathcal{V}$.

1.2 Soient $\mathcal{V}$ et u comme dans l'énoncé de la proposition 1; on suppose dorénavant que u est à valeurs non négatives. Pour donner un sens à u^{-1}, Atiyah se propose de définir des distributions u^{λ}, avec des exposants λ complexes. Pour avoir une situation plus générale, on se donne un nombre fini $v_1,..,v_r$ de fonctions analytiques réelles sur $\mathcal{V}$, et on appelle χ la fonction caractéristique de l'ensemble Γ des points de $\mathcal{V}$ où toutes les fonctions v_i sont simultanément positives. On remarque alors que si la partie réelle $\mathcal{R}e(\lambda)$ de λ est >0, la "fonction" $\chi.u^{\lambda}$: $x \mapsto \chi(x)(u(x))^{\lambda}$ est localement intégrable sur $\mathcal{V}$, et définit par conséquent dans chaque ouvert Ω de $\mathcal{V}$ une distribution $S_{\Omega}^{\chi u}(\lambda)$,(on conviendra d'écrire $S^{\chi u}(\lambda)$ au lieu de $S_{\mathcal{V}}^{\chi u}(\lambda)$) qui dépend holomorphiquement de λ variant dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$. On dispose donc d'une fonction:

$S_{\Omega}^{\chi u}$: $\lambda \mapsto S_{\Omega}^{\chi u}(\lambda)$, définie dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$, à valeurs distributions.

1.3 <u>Théorème</u> : La fonction $S^{\chi u}$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe. Soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathcal{V}$. Les pôles du prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction $S_{\Omega}^{\chi u}$ sont d'ordre au plus n, et se trouvent parmi les nombres rationnels $-1/N$, $-2/N$,... où N est un entier > 0 dépendant de Ω. $S^{\chi u}(0)$ est la distribution définie par la fonction constante égale à 1 .

1.4 <u>Démonstration de la proposition 1</u> : On suppose d'abord u à valeurs non négatives. Soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathcal{V}$ et soit $\sum_{p\geq -n} a_{p,\Omega}(\lambda+1)^p$ le développement en série de Laurent de S_{Ω}^{u} au voisinage de $\lambda_o = -1$ (chaque $a_{p,\Omega}$ est donc une distribution sur Ω). Comme u S_{Ω}^{u} est holomorphe au voisinage de λ_o $((u\, S_{\Omega}^{u})(-1) = S_{\Omega}^{u}(0))$, on doit avoir $u\, a_{p,\Omega} = 0$ si $p \leq -1$ et $u\, a_{0,\Omega} = 1$. Donc $a_{0,\Omega}$ est un inverse de u dans Ω. Mais si $\Omega \subset \Omega'$, la restriction de $a_{0,\Omega'}$ à Ω est nécessairement égale à $a_{0,\Omega}$. D'où l'existence par recollement d'une distribution T sur $\mathcal{V}$ telle que $u\,T = 1$. Si u prend des valeurs négatives et si T est un inverse de

$u\bar{u}$, alors $\bar{u}T$ est un inverse de u.

§ 2 LES DISTRIBUTIONS $S^{\chi u}(\lambda)$

2.1 Exemples : 1) $\mathcal{V} = \mathbb{R}$, $v_1(x) = 1$ et $u(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; alors si $\mathcal{R}e(\lambda)>0$, on a : $<S^u(\lambda), \varphi \underline{dx}> = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\lambda}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{2\lambda}\varphi(x)dx$, et S^u se prolonge en une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points : $-1/2, -3/2, \dots, -(2p+1)/2, \dots$ De la même façon, si m est un entier ≥ 1, S^{u^m} se prolonge en une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points $-1/2m, -3/2m, \dots, -(2p+1)/2m, \dots$. (Voir [4]).

2) $\mathcal{V} = \mathbb{R}$, $v_1(x) = x$, $u(x) = x^{2m}$ pour tout x, m étant un entier ≥ 1. Alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour chaque λ à partie réelle > 0, on a : $<S^{\chi u}(\lambda), \varphi \underline{dx}> = \int_0^{+\infty} x^{2m}\varphi(x)dx$, et $S^{\chi u}$ se prolonge en une fonction méromorphe dont les pôles (simples) sont les points $-1/2m$, $-2/2m, \dots, -p/2m, \dots$ ([4] chap. 1, § 3 (avec les notations utilisées dans cet ouvrage $S^{\chi u}(\lambda) = x_+^{2m\lambda}$)). Il en est de même si on remplace ci-dessus v par -v (distributions $x_-^{2m\lambda}$).

3) Il existe un grand nombre d'exemples, qui contrairement aux exemples 1 et 2 ci-dessus, n'interviennent pas directement dans la démonstration du théorème :

a) $V = \mathbb{R}^n$, et u est subordonnée à la donnée d'une forme quadratique non dégénérée : voir [10] et [4].

b) $\mathcal{V} = M_p(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices $p \times p$ à coefficients réels, $u(x) = \det(x))^2$ pour tout x ([8]).

2.2 Remarques préliminaires à la démonstration du théorème : 1) si le théorème est démontré lorsque $\mathcal{V}$ est un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^n$, il est démontré en toute généralité grâce aux partitions de l'unité, et au principe d'unicité du prolongement analytique.

2) Pour simplifier le langage, on dira dans ce qui suit que la donnée $(\mathcal{V}, u, (v_1, \dots, v_r))$ d'une variété $\mathcal{V}$, d'une fonction analytique u non nulle à valeurs ≥ 0 sur $\mathcal{V}$ et d'un nombre fini $v_1, \dots, v_r$ de fonctions analytiques réelles sur $\mathcal{V}$, vérifie la propriété du théorème si la fonction $S^{\chi u}$ définie dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$ admet un prolongement méromorphe dans le plan complexe ayant les propriétés décrites dans le théorème 1.3. Compte-tenu de ceci, il est facile de constater que si $(V, u, (v_1, \dots, v_r))$

et $(V',u',(v'_1,\dots,v'_{r'}))$ vérifient toutes deux la propriété du théorème; alors il en est de même de $(V\times V', u\otimes u', v_1\otimes 1,\dots,v_r\otimes 1, 1\otimes v'_1 \dots 1\otimes v_r)$. En particulier, soient $V = \mathbb{R}^n$, $u(x) = x_1^{2m_1} x_2^{2m_2}\dots x_n^{2m_n}$ (où les m_i sont des entiers ≥ 0), E une partie de $\{1,2,\dots,n\}$, et $v_i(x) = \pm x_i$ si $i\in E$, $v_i = 1$ sinon; cette donnée $(\mathcal{V},u,(v_1,\dots,v_n))$ vérifie la propriété du théorème (l'entier N associé à un ouvert relativement compact est un p.p.m.c.) et l'ensemble des x où les v_i sont simultanément positives est une <u>intersection de demi-espaces</u>).

3) Si $(\mathcal{V},u,(v_1,\dots,v_r))$ vérifie la propriété du théorème, et si u' est une fonction analytique à valeurs > 0, $(\mathcal{V},uu',(v_1,\dots,v_r))$ vérifie la propriété du théorème. En particulier, le théorème est vrai lorsque $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $u(x) = u'(x)x_1^{2m_1}\dots x_n^{2m_1}$ (où $u' > 0$, les m_i sont des entiers ≥ 0), et Γ est une intersection de demi-espaces.

2.3 <u>Démonstration du théorème</u> : on utilise le théorème de résolution des singularités.([5]).

2.3.1 <u>Théorème de résolution des singularités</u> : Soit F une fonction analytique réelle non nulle, définie dans un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, contenant 0, une variété analytique réelle $\tilde{\Omega}$ et une application analytique $\theta : \tilde{\Omega}\to\Omega$ de sorte que :

(i) θ est propre

(ii) θ est un isomorphisme de $\tilde{\Omega} - (F\circ\theta)^{-1}(0)$ sur $\Omega - F^{-1}(0)$.

(iii) Soit $x\in\tilde{\Omega}$; il existe une carte locale $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ de $\tilde{\Omega}$, centrée au point x, telle que dans cette carte $F\circ\theta(\xi) = f'(\xi)\ \pi_i\ \xi_i^{k_i}$, où f' est une fonction analytique ne s'annulant jamais, et k_i est pour chaque i un entier ≥ 0.

Atiyah donne des indications ([4], remarque 7) sur la manière de lire un tel énoncé dans les théorèmes démontrés par Hironaka [5].

2.3.2 On suppose que $\mathcal{V}$ est un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^n$; on applique le théorème de résolution des singularités au produit $F = u v_1 v_2\dots v_r$; il en sort donc un voisinage ouvert Ω de 0, une variété $\tilde{\Omega}$ et une application analytique $\theta : \tilde{\Omega}\to\Omega$, tout ceci ayant les propriétés indiquées ci-dessus; on pose $\tilde{F} = F\circ\theta$, $\tilde{u} = u\circ\theta$, $\tilde{v}_i = v_i\circ\theta$ $(1\leq i\leq r)$ et $\tilde{\chi} = \chi\circ\theta$. Soit $x_o\in\tilde{\Omega}$, et soit $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ une carte locale de $\tilde{\Omega}$ centrée en x_o de domaine U_{x_o} telle que $\tilde{F}$ se décompose dans cette carte en un produit

$\tilde{F} = \tilde{u}\ \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_r = f' . \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n}$ comme indiqué ci-dessus. Comme l'anneau des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point de $\mathbb{R}^n$ est factoriel, il en résulte que $\tilde{u}$, $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$ ont dans la carte $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ une décomposition en produit de même type.

Conséquences : a) il existe une fonction analytique u' inversible dans U_{x_0} et des entiers $m_1, \dots, m_n \geq 0$ tels que $\tilde{u} = u'\ \xi_1^{2m_1} \dots \xi_n^{2m_n}$.

b) chaque fonction $\tilde{v}_i$ se décompose sous la forme $v'\ \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}$, où v'est analytique inversible et les p_i sont des entiers ≥ 0; il est important ici de faire la remarque suivante : l'ensemble des ξ (i.e. des points dans le domaine de la carte $(\xi_1, \dots, \xi_n)$) où une telle fonction $\tilde{v}$ est > 0, est une réunion d'intersections de demi-espaces.

2.3.3 Sur $\tilde{\Omega}$ se trouve définie la fonction $\tilde{\chi}\tilde{u}^{\lambda}$. On va associer à cette fonction une forme impaire dedegré 0 sur $\tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(0)$ de la manière suivante : soit $\phi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ une carte locale sur $\tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(0)$. Soit α_ϕ la fonction définie sur le domaine de ϕ de la manière suivante : $\alpha_\phi(\xi) = 1$ si $\theta^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ et $d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$ définissent la même orientation au point ξ et $\alpha_\phi(\xi) = -1$ sinon. Il est clair que $\alpha_{\phi_1}(\xi) = \alpha_{\phi_2}(\xi)$ si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux cartes locales au voisinage de ξ qui donnent la même orientation à l'espace tangent en ξ à $\tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(0)$, et $\alpha_{\phi_1}(\xi) = -\alpha_{\phi_2}(\xi)$ dans le cas contraire. Soit maintenant λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ et ω_ϕ la fonction définie sur le domaine de ϕ par la formule : $\omega_\phi(\xi) = \tilde{\chi}(x)\ (\tilde{u}(\xi))^{\lambda}\ \alpha_\phi(\xi)$; la donnée des diverses fonctions ω_ϕ obtenues en faisant varier ϕ dans l'ensemble des cartes d'un atlas de $\tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(0)$ définit une forme impaire de degré 0, qu'on va désigner par $\underline{\omega}(\lambda)$. Remarquons maintenant que $\underline{\omega}(\lambda)$ se prolonge dans $\tilde{\Omega}$ en une forme impaire de dégré 0 localement intégrable ; elle définit donc dans $\tilde{\Omega}$ un courant impair de degré 0, autrement dit une distribution tordue sur $\tilde{\Omega}$, qu'on désignera par $\tilde{S}(\lambda)$.

2.3.4 Les résultats à démontrer : 1) $\tilde{S} : \lambda \mapsto \tilde{S}(\lambda)$ a un prolongement méromorphe à valeurs dans l'espace des distributions tordues sur $\tilde{\Omega}$, avec pôles, ordres des pôles, etc... comme décrit dans le théorème 1.3 (à une modification évidente près concernant $\tilde{S}(0)$).

2) Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, l'image directe $\theta(\tilde{S}(\lambda))$ du 0-courant impair $\tilde{S}(\lambda)$ coïncide avec $S^{\chi u}(\lambda)$ à travers l'isomor-

phisme canonique entre l'espace des 0-courants impairs sur Ω et l'espace des distributions sur Ω.

2.3.5 Soit $x_o \in \tilde{\Omega}$ et soit $\phi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une carte locale de $\tilde{\Omega}$ au voisinage de x_o ayant les propriétés indiquées dans 2.3.2, c'est-à-dire telle qu'on y ait une factorisation convenable de $\tilde{u}$, $\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_r$. La fonction α_ϕ est localement constante dans le complémentaire (relativement au domaine U_{x_o} de ϕ) de $\tilde{F}^{-1}(0) \cap U_{x_o}$; autrement dit, α_ϕ est constante (et vaut +1 ou -1 selon le cas) dans chacun des n-angles Γ_p définis par les hyperplans-coordonnées. Il en résulte que si $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$ et si $\varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(U_x)$, on a :

$$<\tilde{S}(\lambda),\ \varphi\, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n> = \sum_p \pm \int_{\Gamma_p} (\tilde{u}(\xi)^\lambda \varphi(\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

où chaque $\int_{\Gamma_p}$ est une intégrable ordinaire ; en tenant compte de 2.3.2, on voit que chacune de ces intégrales est de la forme

$$\int_\Gamma |\xi_1|^{2m_1\lambda} \ldots |\xi_n|^{2m_x\lambda} (u'(\xi))^\lambda\ \varphi(\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_n\ ,$$

et se prolonge donc comme fonction de λ en une fonction méromorphe etc... (revoir 2.2). Par recollement, $\tilde{S}$ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe à valeurs distributions tordues.

2.3.6 Soit maintenant λ tel que $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$ et soit $\phi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une carte locale de $\tilde{\Omega} - \tilde{F}^{-1}(0)$, de domaine U. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(\theta(U))$. Par définition de l'image des courants impairs ([11], chap. IX), $\theta(\tilde{S}(\lambda))$ est un 0-courant impair tel que :

$$<\theta(\tilde{S}(\lambda)),\ \varphi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n> = <\tilde{S}(\lambda),\quad \theta^*(\varphi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)>.$$

Par ailleurs : $\theta^*(\varphi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\varphi \circ \theta) J\ d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$, où J est le Jacobien. Mais remarquons maintenant que $\alpha_\phi(\xi)$ n'est autre que le signe de $J(\xi)$. Par conséquent :

$$<\theta(\tilde{S}(\lambda)),\ \varphi\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n> = \int (\tilde{u}(\xi))^\lambda \tilde{\chi}(\xi)\ \varphi \circ \theta(\xi) |J(\xi)| d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

ce qui démontre que $\theta(\tilde{S}(\lambda))$ s'identifie à $S^{\chi u}(\lambda)$ dans $\Omega - F^{-1}(0)$, donc dans Ω (dans une variété analytique, tout sous-ensemble analytique strict est de mesure nulle).

§ 3. SOLUTIONS ELEMENTAIRES INVARIANTES

3.1 Soit u une fonction polynôme non nulle, à valeurs positives sur $\mathbb{R}^n$. D'après ce qu'on vient de voir, il est possible de définir une fonction méromorphe $S^u : \mathbb{C} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que si $\mathcal{Re}(\lambda) > 0$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on ait : $\langle S^u, \varphi\rangle = \int (u(x))^\lambda \varphi(x)dx$ (il n'y a plus de distinction à faire entre distributions et distributions tordues). Voici une première précision dans ce cas : les distributions $S^u(\lambda)$ obtenues aux points λ où S^u est holomorphe, et les coefficients du développement en série de Laurent de la fonction S^u au voisinage de tout pôle de cette fonction sont des distributions tempérées ; de plus, il existe un entier N (qui dépend de u) tel que tout pôle de S^u soit de la forme $-p/N$ (p entier > 0). Pour voir cela, on introduit comme dans [1] la fonction $\bar{u} : x \mapsto u(x)/(1+|x|^2)^m$, où m est le degré de u, on la considère comme une fonction analytique sur la sphère $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, on lui applique le théorème 1.3, puis on restreint le tout à $\mathbb{R}^n$ pour obtenir une fonction méromorphe $\bar{S}^u$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dont les pôles sont de la forme $-p/N$, (N étant un entier convenable); on remarque ensuite que pour tout nombre complexe λ, la fonction $\phi_\lambda : x \mapsto (1+|x|^2)^{m\lambda}$ est C^∞ à croissante lente de même que toutes ses dérivées, de sorte que le produit de ϕ_λ par $\bar{S}^u(\lambda)$ est une distribution tempérée, qui n'est autre que $S^u(\lambda)$.

3.2 La deuxième précision valable dans ce cas est la suivante : soit $g \in GL(n,\mathbb{R})$ tel que $u(gx) = u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; alors si $\mathcal{Re}(\lambda) > 0$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\int (u(x))^\lambda \; (\varphi(g^{-1}.x)|\det g|)\; dx = \int (u(x))^\lambda \varphi(x)dx,$$

de sorte qu'on a la même propriété pour les distributions $S^u(\lambda)$, aux points λ où S^u est holomorphe. De même les formules donnant les coefficients du développement en série de Laurent au voisinage d'un pôle montrent que chaque coefficient d'un tel développement se comporte de la même manière relativement à l'action de g.

3.3 Soient maintenant $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in GL(n,\mathbb{R})$; si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on désignera par $\varphi \circ g^{-1}$ la fonction $x \mapsto \varphi(g^{-1}x)$; on dira que T est invariante par g si $< T, \varphi \circ g^{-1} > = < T, \varphi >$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; on pourra donc parler du sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ qui laisse T invariante; si D est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, on dira que D est invariant par g si la distribution $D\delta$ (où δ est la mesure de Dirac à l'origine) est invariante par g.

3.4 <u>Proposition</u> : Soit D un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une solution élémentaire de D qui est tempérée et invariante par le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ qui laisse D invariant.

Ceci n'est autre que le corollaire 3 dans [1], avec la précision supplémentaire de l'invariance de la solution élémentaire, qui résulte de 3.2. Des exemples explicites de solutions élémentaires pour les opérateurs Laplacien Δ et D'Alembertien $\Box$ peuvent se lire dans [4], et pour l'opérateur de Cayley sur $M_p(\mathbb{R})$ dans [8].

3.5 En particulier, si G est un groupe de Lie (réel) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, tout opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{g}$, invariant par la représentation adjointe de G, admet une solution élémentaire centrale tempérée (on entend par distribution centrale sur $\mathfrak{g}$ une distribution invariante par la représentation adjointe de G). Comme il existe une relation étroite (en fait un isomorphisme d'algèbres, comme l'a démontré récemment M. Duflo) entre l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{g}$, invariants par la représentation adjointe de G, et l'espace des opérateurs différentiels bi-invariants sur G, il est raisonnable de conjecturer (L. Schwartz) que tout opérateur différentiel bi-invariant sur G admet une solution élémentaire (qu'on peut même espérer centrale, c'est-à-dire invariante par le groupe des automorphismes intérieurs de G). J'ai démontré qu'un tel énoncé est vrai pour les groupes de Lie nilpotents simplement connexes ([9]). Pour d'autres types de groupes, en particulier, pour les groupes de Lie semi-simples, le lecteur peut consulter [2].

3.6 Signalons enfin qu'étant donné un sous-groupe G de $GL(n,\mathbb{R})$, un opérateur différentiel D à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ qui est G-invariant, et une distribution G-invariante S, il n'est pas vrai en général qu'il existe une distribution T elle-même G-invariante telle que $DT = S$.

Par exemple l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_1}$ sur $\mathbb{R}^2$ est invariant par le groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui sont de la forme : $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + ax_2, x_2)$, (a décrivant $\mathbb{R}$) et l'équation $\frac{\partial}{\partial x_1}$ T = 1 n'admet aucune solution invariante T (une distribution G-invariante T est telle que $x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} T = 0$). Ceci dit le résultat énoncé au début de ce paragraphe est vrai pour certains types de sous-groupes G de $GL(n, \mathbb{R})$, à savoir les compacts (trivialement), et les groupes orthogonaux des formes quadratiques non dégénérées (non définies) (voir [3] pour le cas de la signature Lorentzienne, et [12] pour les autres cas). Je pense que ce sont les méthodes de ces deux dernières références qui doivent pouvoir donner un résultat assez général et assez intéressant dans ce domaine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah : Résolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure and AppL. Math., 23, 1970, (145-150).

[2] A. Cérézo et F. Rouvière : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73 Exposé N° X.

[3] L. Gårding et J. L. Lions : Functional Analysis, Nuovo Cimento, Suppl. vol. 14, Série 10, 1959 (9-66).

[4] I. M. Gelfand et G. E. Shilov : Les distributions, tome I, Dunod (1962).

[5] H. Hironaka : Résolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero , Ann. of Math., Vol. 79, 1964, (109-326).

[6] L. Hörmander : On the division of distributions by polynomials, Ark. Mat., 3, 1958, (555-568).

[7] S. Lojasiewicz : Sur le problème de division, Studia Math., 18, 1959, (87-136).

[8] M. Raïs : Distributions homogènes des espaces de matrices, Mémoire de la Soc. Math. de France N° 30, 1972 (Gauthiers-Villars).

[9] M. Raïs : Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent, C. R. Acad. Sc., Paris, t.273, 1971, (495-498).

[10] M. Riesz : L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy Acta Math. 81, 1949, (1.223).

[11] L. Schwartz : Théorie des distributions, Herman, 1966.

[12] A. Tengstrand : Distributions invariant under an orthogonal group, Math. Scand., 8, 1960, (201-218).
