SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. HORVATH

Transformations de Marcel Riesz

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 12, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1972-1973

TRANSFORMATIONS DE MARCEL RIESZ

par J. HORVATH

Exposé N° XII

20 Décembre 1972

INTRODUCTION : LA TRANSFORMATION DE HILBERT

Etant donnée une fonction f sur $\mathbb{R}$, soit u la solution du problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y); y > 0\}$ avec donnée-frontière f, c'est-à-dire $\Delta u = 0$ et $\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$. Si v est la fonction harmonique conjuguée, c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (avec une condition qui la détermine d'une façon unique, par exemple $v(\infty) = 0$), alors on pose $g(x) = (Hf)(x) = \lim_{y\to 0} v(x,y)$. On a $\Delta v = 0$, la fonction $F = u + iv$ est holomorphe. Puisque $-iF = v - iu$ est encore holomorphe, il est a priori évident que si Hf et H^2f existent, on aura $H^2 f = -f$.

Sous des conditions assez générales u est donné par l'intégrale de Poisson

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt = f * P_y(x),$$

où $P_y(x) = \mathcal{R}e\frac{-1}{\pi i z}$. Comme $\mathcal{I}m\frac{-1}{\pi i z} = Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$ on aura formellement

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

Or on démontre que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|\geq y}\frac{f(t)}{x-t}\,dt \to 0 \tag{1}$$

lorsque $y \to 0$. Ceci conduit à définir la transformée de Hilbert comme la valeur principale de Cauchy

$$Hf(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Plessner a demontré que Hf existe si $f \in L^2$. En effet un calcul montre que $(\mathfrak{F}P_y)(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$, $(\mathfrak{F}Q_y) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\,.\,e^{-2\pi y|\xi|} = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi.(\mathfrak{F}P_y)(\xi)$. Si l'on définit $\tilde{f}$ par $\mathfrak{F}(\tilde{f}) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi.\mathfrak{F}(f)$, alors $f * Q_y = \tilde{f} * P_y$, donc de

(1) on conclut que $Hf = \tilde{f}$ existe et l'on voit aussi que $H^2 f = -f$ et $\|Hf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Plus tard M. Riesz et Titchmarsh ont démontré que Hf existe aussi si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

Au lieu du demi-plan supérieur on peut aussi considérer le disque ou un domaine arbitraire du plan complexe, ce qui a été fait par Zarantonello dans un travail non publié.

§ 1. LE CAS ELLIPTIQUE

Désignons par $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y)$ un point du demi-espace supérieur $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Etant donnée une fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on considère la solution u du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ avec donnée-frontière f. La fonction conjuguée sera cette fois la fonction $v = (v_1,\dots,v_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes satisfont au système d'équations de M. Riesz

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}.$$

Les fonctions v_j sont harmoniques et $(u,v_1,\dots,v_n)$ est le gradient ∇h d'une fonction harmonique h. On pose $g = (g_1,\dots,g_n) = Hf$, où $g(x) = \lim_{y\to 0} v(x,y)$. Sous des conditions très générales $u(x,y) = f * P_y(x)$, où

$$P_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \; \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

La fonction conjuguée est

$$Q_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \; \frac{x}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

de façon à ce que v est donné par $f * Q_y$. Une relation analogue à (1) suggère de définir la transformation de Hilbert-Riesz par la valeur principale de Cauchy

(2) $$g(x) = Hf(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} f(t) \frac{x-t}{|x-t|^{n+1}} dt.$$

On voit de la même manière que dans le cas $n = 1$ que Hf existe si $f \in L^2$, $\|g\|_2^2 = \|g_1\|_{L^2}^2 + \ldots + \|g_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$ et $Hg = -f$ où

(3) $$Hg(t) = \text{v.p.} c_n \int \frac{g(x).(x-t)}{|x-t|^{n+1}} dt.$$

Calderón et Zygmund [4] ont démontré que g existe si $f \in L^p$ avec $1 < p < \infty$ et que $f \mapsto g$ est une application linéaire continue de L^p dans lui-même. On peut poser alors le problème pour d'autres domaines que le demi-espace : est-ce que si la composante normale u de ∇h a une limite f à la frontière, la composante tangentielle v de ∇h aura-t-elle une limite g, et a-t-on $\|g\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$? Pour la boule unité ce problème vient d'être résolu par Korányi et Vági [2, §9] qui se servent d'une théorie édifiée par eux d'intégrales singulières sur des espaces homogènes.

L'algèbre de Clifford sur $\mathbb{R}$ est engendrée par n éléments $e_1, \ldots, e_n$ qui vérifient $e_j^2 = 1$ et $e_i e_j + e_j e_i = 0$ pour $i \neq j$. Elle a dimension 2^n et a pour base les produits $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Alors $F = u + e_1 v_1 + \ldots + e_n v_n$ est une fonction holomorphe au sens de Fueter de la variable $y + e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n$ et la formule de reciprocité $H_g = -f$ vaut encore si dans (3) le produit sous le signe intégral est pris au sens de l'algèbre de Clifford.

La forme du noyau dans (2) nous conduit à étudier les distributions K_λ définies par

$$\langle K_\lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} k(x)|x|^\lambda \varphi(x) dx,$$

où k est une fonction localement intégrable, homogène de degré 0. La fonction $\lambda \mapsto K_\lambda \in \mathcal{S}'$ est holomorphe pour les valeurs pour lesquelles l'intégrale converge, c'est-à-dire $\Re e \, \lambda > -n$, et elle admet un prolongement analytique dans tout le plan complexe, sauf les points $\lambda = -n-j$ ($j \in \mathbb{N}$), où elle a des pôles simples. Si l'on pose $M_\alpha = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \sigma^\alpha k(\sigma) d\sigma$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, le résidu au point $\lambda = -n-j$ est

$$S_j = (-1)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} M_\alpha \partial^\alpha \delta .$$

On peut donner des formules explicites pour K_λ lorsque $\Re e\, \lambda \leq -n$ et pour les parties finies $\mathrm{Pf}\, K_{\lambda}{}_{\lambda=-n-j} = \lim_{\lambda \to -n-j} (K_\lambda - S_j (\lambda+n+j)^{-1})$ [1;(3.4) et (3.5)]; retenons seulement

$$\langle K_{-n}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \int_{|x| \geq \varepsilon} k(x)|x|^{-n} \varphi(x)dx + M_o \varphi(0) \log \varepsilon \}$$

Si $M_o = 0$, alors $K_{-n} * f$ est un opérateur intégral singulier [4].

Si $k \equiv 1$, alors K_λ devient la distribution qu'on dénote $|x|^\lambda$. Elle est fonction méromorphe de λ, ayant des pôles simples aux points $\lambda = -n-2k$ avec résidus

$$S_{2k} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k!\, \Gamma(\frac{n}{2}+k)} \Delta^k \delta .$$

La connaissance de S_o donne un moyen facile de calculer la solution élémentaire de Δ. En effet si $n \neq 2$, l'identité

$$\Delta |x|^{\lambda+2} = (\lambda + 2)(\lambda + n)|x|^\lambda \tag{4}$$

donne pour λ au voisinage de $-n$

$$\Delta |x|^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda + n) \{ \frac{S_o}{\lambda + n} + \ldots \} = (\lambda + 2) S_o + \ldots ,$$

d'où, en posant $\lambda = -n$,

$$\Delta |x|^{2-n} = (2-n) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \delta ,$$

c'est-à-dire la solution élémentaire cherchée est

$$E = - \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}} |x|^{2-n} .$$

Pour n = 2 on divise les deux membres de (4) par $\lambda + 2$ et l'on cherche le développement de Laurent de $|x|^{\lambda+2}/(\lambda + 2)$ au voisinage de $\lambda = -2$. On obtient

$$\Delta \frac{|x|^{\lambda+2}}{\lambda + 2} = \Delta\{\frac{1}{\lambda + 2} + \log|x| + \ldots\} = 2\pi\delta + \ldots,$$

d'où

$$E = \frac{1}{2\pi} \log|x| = \frac{1}{2\pi} \underset{\lambda=-2}{\mathrm{Pf}} \frac{|x|^{\lambda+2}}{\lambda + 2} .$$

Comme $\lambda \mapsto \Gamma(\frac{\lambda}{2})$ a des pôles simples aux points $\lambda = -2k (k \in \mathbb{N})$, la distribution $|x|^{\lambda-n}/\Gamma(\frac{\lambda}{2})$ est fonction entière de $\lambda \in \mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathcal{S}'$. Au point $\lambda = -2k$ sa valeur est

$$\frac{2^{-2k}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2k}{2})} (-\Delta)^k\delta,$$

ce qui a conduit Marcel Riesz à définir les distributions

(5) $$R_\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})}{2^\lambda \pi^{n/2}\Gamma(\frac{\lambda}{2})} |x|^{\lambda-n} .$$

Le facteur $\Gamma[(n-\lambda)/2]$ introduit des pôles au points $\lambda = n + 2k$, où l'on définit R_λ comme la partie finie du second membre de (5), qu'on peut déterminer explicitement [1;(4.2)]. On a $R_{-2k} = (-\Delta)^k\delta$, il suit de (4) que $\Delta R_{\lambda+2} = -R_\lambda$ et un calcul dû à Deny montre que $\mathfrak{F}R_\lambda(\xi) = \mathrm{Pf}(2\pi|\xi|)^{-\lambda}$.

Le gradient $N_\lambda = -\nabla R_{\lambda+1}$ est donné pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\lambda \neq n + 2k + 1$ par

$$N_\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n - \lambda + 1}{2})}{2^\lambda \pi^{n/2}\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \frac{x}{|x|} |x|^{\lambda-n}.$$

Ceci est vrai en particulier pour $\lambda = n-1$ bien que $\lambda + 1 = n$ est "critique" pour $R_{\lambda+1}$. Pour $\lambda = 0$ on obtient le noyau de (2).

Si $\Re e\, \alpha + \Re e\, \beta < -n$ et les fonctions k et ℓ, homogènes de degré 0, sont suffisamment bons, on peut convoler $K_\alpha = k(x)|x|^\alpha$ et $L_\beta = \ell(x)|x|^\beta$ et $K_\alpha * L_\beta$ est une distribution homogène de degré $\alpha + \beta + n$. En particulier $R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ si $\Re e\, \alpha + \Re e\, \beta < n$, et $N_\alpha * N_\beta = -R_{\alpha+\beta}$. Cette dernière relation (qu'on peut aussi interpréter au sens de l'algèbre de Clifford) contient les cas particuliers suivants :

a) $\alpha = \beta = 0$ donne la formule de réciprocité de la transformation de Hilbert-Riesz.

b) La masse ou charge (c'est-à-dire mesure) μ a le potentiel Newtonien $U^\mu = \mu * R_2$ et engendre le champ de force $F = -\nabla U^\mu = \mu * N_1$. On a $\nabla F = - N_{-1} * \mu * N_1 = \mu$ et le carré de l'énergie du champ est donné par les expressions $\int U^\mu d\mu$ et $\int |F|^2 dx$ qui sont égales puisque $\int U^\mu d\mu = \mathrm{Tr}(\mu * \check{\mu} * R_2) = \mathrm{Tr}(N_1 * \mu * \check{N}_1 * \check{\mu}) = \int |N_1 * \mu|^2 dx$.

Considérons maintenant la distribution $K_\lambda = k(x)|x|^\lambda$ et soit $\lambda \mapsto g(\lambda)$ une fonction méromorphe à valeurs scalaires, définie pour $\Re e\, \lambda < 0$, qui ne s'annule pas et qui a des pôles simples exactement aux points $\lambda = -n - j$ où K_λ en a (c'est-à-dire où les M_α avec $|\alpha| = j$ ne sont pas tous nuls). Alors $K_\lambda^g = \frac{1}{g(\lambda)} k(x)|x|^\lambda$ est holomorphe pour $\Re e\, \lambda < 0$. L'énoncé suivant contient plusieurs résultats connus comme cas particuliers (cf. [5]) :

Si $t \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $-n - t \leq \Re e\, \lambda < -t$, alors $f \to K_\lambda^g * f$ est une application linéaire linéaire continue de l'espace de Sobolev-Besov W_p^s dans W_q^{s-t}, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\Re e\, \lambda}{n} - \frac{t}{n} - 1$.

Il suffit de considérer le cas $s = t$. Pour $t = 0$ l'énoncé est bien connu [4; chapitre II, 4.2 et 6.12]. Par interpolation on se ramène au cas où t est entier. Si $t = 2k$ on a

$$\|K_\lambda^g * f\|_{L^q} = \|K_\lambda^g * R_t * R_{-t} * f\|_{L^q} \leq C\|(-\Delta)^k f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W_p^{2k}}$$

puisque $K_\lambda^g * R_t$ est homogène de degré $\lambda + t$. Similairement si $t = 2k + 1$ on a

$$\|K_\lambda^g * f\|_{L^q} = \|K_\lambda^g * N_t * N_{-t} * f\|_{L^q} \leq C\|\nabla(-\Delta)^k f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W_p^{2k+1}}.$$

On remarque que R_λ et N_o se comportent comme le module d'un nombre complexe et l'unité imaginaire i. Ceci conduit à définir

$$J_\lambda = R_\lambda * (\cos \frac{\lambda\pi}{2}\, \delta + \sin \frac{\lambda\pi}{2}\, N_o)$$

qui vérifie $J_\alpha * J_\beta = J_{\alpha+\beta}$, $\nabla J_{\lambda+1} = J_\lambda$ et $J_{2k} = (-1)^k R_{2k}$.

§ 2. LE CAS HYPERBOLIQUE

Soit $(x|y) = x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots x_ny_n$ la forme bilinéaire lorentzienne, posons $s(x)^2 = (x|x)$ et soit C^+ le cône futur défini par $s(x)^2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$. La distribution s_+^λ définie par

$$<s_+^\lambda, \varphi> = \int_{C^+} s(x)^\lambda \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

est fonction holomorphe de λ pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$. Elle possède un prolongement analytique dans tout $\mathbb{C}$, ayant des pôles au points $\lambda = -2j$ $(j \geq 1)$ et $\lambda = -n - 2k$ $(k \geq 0)$. Il faut alors distinguer deux cas :

a) n impair . Les pôles sont simples. Les résidus aux points $\lambda = -2j$ sont des distributions ayant pour support la nappe de C^+, décrites dans les travaux de Méthée et Guelfand-Chilov cités dans [1]. Le résidu au point $\lambda = -n$ est

$$S_0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, \delta.$$

Observons que la relation

$$\text{(6)} \qquad \Box s_+^{\lambda+2} = (\lambda + 2)(\lambda + n)\, s_+^\lambda$$

où

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est le d'Alembertien, donne alors la solution élémentaire de $\square$. En effet au voisinage de $\lambda = -n$ on a

$$\square s_+^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n)\{ \frac{S_o}{\lambda+n} + \ldots\} = (\lambda+2)S_o + \ldots,$$

d'où en posant $\lambda = -n$

$$\square s_+^{2-n} = (2-n)\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta.$$

La solution élémentaire cherchée est donc

$$E = \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}\pi^{n/2}} \operatorname{Pf} s_+^{-n+2} .$$

De (6) et de la valeur de S_o on déduit aussi que le résidu de s_+^{λ} au pôle $\lambda = -n-2k$ est

$$S_{2k} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\,\Gamma(\frac{n+2k}{2})}\square^k\delta.$$

b) n <u>pair</u>. Les points $\lambda = -2j$, $0 < 2j \leq n-2$ sont des pôles simples et les résidus sont des distributions T_j ayant comme support la nappe de C^+. Les points $\lambda = -n-2k$ $(k\in\mathbb{N})$ sont des pôles doubles. Si $S_{2k}^{(2)}$ dénote le coefficient de $(\lambda+n+2k)^{-2}$ dans le développement de Laurent de s_+^{λ} autour du point $\lambda = -n-2k$ alors

$$S_0^{(2)} = \frac{2(-1)^{\frac{n-2}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta.$$

D'ici il est encore facile de trouver la solution élémentaire de $\square$. En effet (6) donne

$$\square(\frac{T_{n-2}}{\lambda+n} + \ldots) = (\lambda+2)(\lambda+n)\{\frac{S_o^{(2)}}{(\lambda+n)^2} + \ldots\},$$

d'où, en multipliant par $(\lambda+n)$ est posant $\lambda = -n$, $\square T_{n-2} = (2-n)S_o^{(2)}$, c'est-à-dire la solution élémentaire cherchée est

$$E = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n-2}{2})}{4\pi^{n/2}} \operatorname*{Res}_{\lambda=-n+2} s_+^{\lambda}$$

On voit donc que "la partie finie au sens de Hadamard" est le résidu et non pas la partie finie de la distribution (contrairement à ce qui a été affirmé dans l'introduction de [1]),qui a pour support la nappe de C^+ (principe de Huygens).

De (6) on obtient de plus que

$$S_{2k}^{(2)} = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{n+2k}{2})} \square^k \delta.$$

Il résulte immédiatement de ces calculs que la distribution hyperbolique de Marcel Riesz

$$Z_\lambda = \frac{s_+^{\lambda-n}}{2^{\lambda-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\frac{\lambda}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+2-n}{2})}$$

est fonction entière de $\lambda \in \mathbb{C}$ et que $Z_{-2k} = \square^k \delta$.

Comme Supp $Z_\lambda \subset C^+$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $Z_\alpha * Z_\beta$ a un sens pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on trouve qu'elle est égale à $Z_{\alpha+\beta}$.

Si l'on pose par analogie avec le cas euclidien $N_\alpha = \nabla Z_{\alpha+1}$, on a $N_\alpha * N_\beta = Z_{\alpha+\beta}$, où $\nabla\delta * \nabla\delta = \square\delta$ est pris au sens de la forme bilinéaire lorentzienne. En particulier $N_0 * N_0 = \delta$, donc N_0 joue un rôle analogue au noyau de la transformation de Hilbert-Riesz. Pour n pair elle est donnée par

$$N_o = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\ \mathrm{Pfx}\ s_+^{-n-1}\ .$$

On peut aussi interpréter $N_\alpha * N_\beta = Z_{\alpha+\beta}$ au sens de l'algèbre de Clifford attachée à la forme bilinéaire lorentzienne, dont les générateurs $e_1,\dots,e_n$ satisfont à $e_1^2 = 1$, $e_2^2 = \dots = e_n^2 = -1$, $e_i e_j + e_j e_i = 0$ si $i \neq j$.

Signalons finalement la distribution

$$J_\lambda = e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}\, Z_\lambda * \left(\cos \frac{\pi\lambda}{2}\,\delta - i \sin \frac{\pi\lambda}{2}\, N_o\right)$$

qui vérifie $J_\alpha * J_\beta = J_{\alpha+\beta}$, $\nabla J_{\lambda+1} = J_\lambda$ et $J_{2k} = Z_{2k}$. En tant qu'opérateurs de convolution, les distributions N_o et J_λ figurent déjà dans la célèbre conférence de Marcel Riesz de 1937.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Horváth : Finite parts of distributions. Colloque "Linear Operators ans Approximation", Oberwolfach, août 1971, Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1973.

[2] A. Korányi et S. Vági : Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat., III, ser. 25 (1971), 575-648.

[3] A. Korányi et S. Vági : Cauchy-Szegö integrals for systems of harmonic functions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 26 (1972), 181-196.

[4] E. M. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series vol. 30, Princeton University Press, 1970.

[5] R. L. Wheeden : On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 421-435, 139 (1969), 37-53.
