

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. HORVATH

## **Transformations de Marcel Riesz**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 12,  
p. 1-10

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A13_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V .

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

TRANSFORMATIONS DE MARCEL RIESZ

par J. HORVATH

Exposé N° XII

20 Décembre 1972



INTRODUCTION : LA TRANSFORMATION DE HILBERT

Etant donnée une fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ , soit  $u$  la solution du problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur  $\mathbf{R}_+^2 = \{(x,y); y > 0\}$  avec donnée-frontière  $f$ , c'est-à-dire  $\Delta u = 0$  et  $\lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) = f(x)$ . Si  $v$  est la fonction harmonique conjuguée, c'est-à-dire  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  (avec une condition qui la détermine d'une façon unique, par exemple  $v(\infty) = 0$ ), alors on pose  $g(x) = (Hf)(x) = \lim_{y \rightarrow 0} v(x,y)$ . On a  $\Delta v = 0$ , la fonction  $F = u + iv$  est holomorphe. Puisque  $-iF = v - iu$  est encore holomorphe, il est a priori évident que si  $Hf$  et  $H^2 f$  existent, on aura  $H^2 f = -f$ .

Sous des conditions assez générales  $u$  est donné par l'intégrale de Poisson

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = f * P_y(x),$$

où  $P_y(x) = \Re e \frac{-1}{\pi i z}$ . Comme  $\int_m \frac{-1}{\pi i z} = Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$  on aura formellement

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Or on démontre que

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq y} \frac{f(t)}{x-t} dt \rightarrow 0$$

lorsque  $y \rightarrow 0$ . Ceci conduit à définir la transformée de Hilbert comme la valeur principale de Cauchy

$$Hf(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Plessner a démontré que  $Hf$  existe si  $f \in L^2$ . En effet un calcul montre que  $(\mathfrak{F} P_y)(\xi) = e^{-2\pi y |\xi|}$ ,  $(\mathfrak{F} Q_y) = -i \operatorname{sgn} \xi \cdot e^{-2\pi y |\xi|} = -i \operatorname{sgn} \xi \cdot (\mathfrak{F} P_y)(\xi)$ . Si l'on définit  $\tilde{f}$  par  $\mathfrak{F}(\tilde{f}) = -i \operatorname{sgn} \xi \cdot \mathfrak{F}(f)$ , alors  $f * Q_y = \tilde{f} * P_y$ , donc de

(1) on conclut que  $Hf = \tilde{f}$  existe et l'on voit aussi que  $H^2f = -f$  et  $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$ . Plus tard M. Riesz et Titchmarsh ont démontré que  $Hf$  existe aussi si  $f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .

Au lieu du demi-plan supérieur on peut aussi considérer le disque ou un domaine arbitraire du plan complexe, ce qui a été fait par Zarantonello dans un travail non publié.

### § 1. LE CAS ELLIPTIQUE

Désignons par  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$  un point du demi-espace supérieur  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ . Etant donnée une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on considère la solution  $u$  du problème de Dirichlet dans  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  avec donnée-frontière  $f$ . La fonction conjuguée sera cette fois la fonction  $v = (v_1, \dots, v_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes satisfont au système d'équations de M. Riesz

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}.$$

Les fonctions  $v_j$  sont harmoniques et  $(u, v_1, \dots, v_n)$  est le gradient  $\nabla h$  d'une fonction harmonique  $h$ . On pose  $g = (g_1, \dots, g_n) = Hf$ , où  $g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y)$ . Sous des conditions très générales  $u(x, y) = f * P_y(x)$ , où

$$P_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi \frac{n+1}{2}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

La fonction conjuguée est

$$Q_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi \frac{n+1}{2}} \frac{x}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

de façon à ce que  $v$  est donné par  $f * Q_y$ . Une relation analogue à (1) suggère de définir la transformation de Hilbert-Riesz par la valeur principale de Cauchy

$$(2) \quad g(x) = Hf(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} f(t) \frac{x-t}{|x-t|^{n+1}} dt.$$

On voit de la même manière que dans le cas  $n = 1$  que  $Hf$  existe si  $f \in L^2$ ,  $\|g\|_2^2 = \|g_1\|_{L^2}^2 + \dots + \|g_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$  et  $Hg = -f$  où

$$(3) \quad Hg(t) = v.p.c_n \int \frac{g(x) \cdot (x-t)}{|x-t|^{n+1}} dt.$$

Calderón et Zygmund [4] ont démontré que  $g$  existe si  $f \in L^p$  avec  $1 < p < \infty$  et que  $f \mapsto g$  est une application linéaire continue de  $L^p$  dans lui-même.

On peut poser alors le problème pour d'autres domaines que le demi-espace : est-ce que si la composante normale  $u$  de  $\nabla h$  a une limite  $f$  à la frontière, la composante tangentielle  $v$  de  $\nabla h$  aura-t-elle une limite  $g$ , et a-t-on  $\|g\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$  ? Pour la boule unité ce problème vient d'être résolu par Korányi et Vági [2, §9] qui se servent d'une théorie édiflée par eux d'intégrales singulières sur des espaces homogènes.

L'algèbre de Clifford sur  $\mathbb{R}$  est engendrée par  $n$  éléments  $e_1, \dots, e_n$  qui vérifient  $e_j^2 = 1$  et  $e_i e_j + e_j e_i = 0$  pour  $i \neq j$ . Elle a dimension  $2^n$  et a pour base les produits  $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$  avec  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Alors  $F = u + e_1 v_1 + \dots + e_n v_n$  est une fonction holomorphe au sens de Fueter de la variable  $y + e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$  et la formule de reciprocité  $H_g = -f$  vaut encore si dans (3) le produit sous le signe intégral est pris au sens de l'algèbre de Clifford.

La forme du noyau dans (2) nous conduit à étudier les distributions  $K_\lambda$  définies par

$$\langle K_\lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} k(x) |x|^\lambda \varphi(x) dx,$$

où  $k$  est une fonction localement intégrable, homogène de degré 0. La fonction  $\lambda \mapsto K_\lambda \in \mathcal{S}'$  est holomorphe pour les valeurs pour lesquelles l'intégrale converge, c'est-à-dire  $\Re \lambda > -n$ , et elle admet un prolongement analytique dans tout le plan complexe, sauf les points  $\lambda = -n-j (j \in \mathbb{N})$ , où elle a des pôles simples. Si l'on pose  $M_\alpha = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \sigma^\alpha k(\sigma) d\sigma$ , pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , le résidu au point  $\lambda = -n-j$  est

$$S_j = (-1)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} M_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

On peut donner des formules explicites pour  $K_\lambda$  lorsque  $\Re \lambda \leq -n$  et pour les parties finies  $\text{Pf } K_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow -n-j} (K_\lambda - S_j(\lambda+n+j)^{-1})$  [1; (3.4) et (3.5)]; retenons seulement

$$\langle K_{-n}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{|x| \geq \varepsilon} k(x) |x|^{-n} \varphi(x) dx + M_0 \varphi(0) \log \varepsilon \right\}$$

Si  $M_0 = 0$ , alors  $K_{-n} * f$  est un opérateur intégral singulier [4].

Si  $k \equiv 1$ , alors  $K_\lambda$  devient la distribution qu'on dénote  $|x|^\lambda$ . Elle est fonction méromorphe de  $\lambda$ , ayant des pôles simples aux points  $\lambda = -n-2k$  avec résidus

$$S_{2k} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2} + k)} \Delta^k \delta.$$

La connaissance de  $S_0$  donne un moyen facile de calculer la solution élémentaire de  $\Delta$ . En effet si  $n \neq 2$ , l'identité

$$(4) \quad \Delta |x|^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n) |x|^\lambda$$

donne pour  $\lambda$  au voisinage de  $-n$

$$\Delta |x|^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n) \left\{ \frac{S_0}{\lambda+n} + \dots \right\} = (\lambda+2) S_0 + \dots,$$

d'où, en posant  $\lambda = -n$ ,

$$\Delta |x|^{2-n} = (2-n) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \delta,$$

c'est-à-dire la solution élémentaire cherchée est

$$E = - \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}} |x|^{2-n}.$$

Pour  $n = 2$  on divise les deux membres de (4) par  $\lambda + 2$  et l'on cherche le développement de Laurent de  $|x|^{\lambda+2}/(\lambda + 2)$  au voisinage de  $\lambda = -2$ . On obtient

$$\Delta \frac{|x|^{\lambda+2}}{\lambda + 2} = \Delta \left\{ \frac{1}{\lambda + 2} + \log|x| + \dots \right\} = 2\pi\delta + \dots,$$

d'où

$$E = \frac{1}{2\pi} \log|x| = \frac{1}{2\pi} \text{Pf}_{\lambda=-2} \frac{|x|^{\lambda+2}}{\lambda + 2}.$$

Comme  $\lambda \mapsto \Gamma(\frac{\lambda}{2})$  a des pôles simples aux points  $\lambda = -2k (k \in \mathbb{N})$ , la distribution  $|x|^{\lambda-n}/\Gamma(\frac{\lambda}{2})$  est fonction entière de  $\lambda \in \mathbb{C}$ , à valeurs dans  $\mathcal{D}'$ . Au point  $\lambda = -2k$  sa valeur est

$$\frac{2^{-2k} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2k}{2})} (-\Delta)^k \delta,$$

ce qui a conduit Marcel Riesz à définir les distributions

$$(5) \quad R_\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})}{2^{\lambda} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\lambda}{2})} |x|^{\lambda-n}.$$

Le facteur  $\Gamma[(n-\lambda)/2]$  introduit des pôles au points  $\lambda = n + 2k$ , où l'on définit  $R_\lambda$  comme la partie finie du second membre de (5), qu'on peut déterminer explicitement [1;(4.2)]. On a  $R_{-2k} = (-\Delta)^k \delta$ , il suit de (4) que  $\Delta R_{\lambda+2} = -R_\lambda$  et un calcul dû à Deny montre que  $\mathfrak{F}R_\lambda(\xi) = \text{Pf}(2\pi|\xi|)^{-\lambda}$ .

Le gradient  $N_\lambda = -\nabla R_{\lambda+1}$  est donné pour  $\Re \lambda > 0$ ,  $\lambda \neq n + 2k + 1$  par

$$N_\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda+1}{2})}{2^{\lambda} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \frac{x}{|x|} |x|^{\lambda-n}.$$

Ceci est vrai en particulier pour  $\lambda = n-1$  bien que  $\lambda + 1 = n$  est "critique" pour  $R_{\lambda+1}$ . Pour  $\lambda = 0$  on obtient le noyau de (2).

Si  $\Re \alpha + \Re \beta < -n$  et les fonctions  $k$  et  $\ell$ , homogènes de degré 0, sont suffisamment bons, on peut convoler  $K_\alpha = k(x) |x|^\alpha$  et  $L_\beta = \ell(x) |x|^\beta$  et  $K_\alpha * L_\beta$  est une distribution homogène de degré  $\alpha + \beta + n$ . En particulier  $R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}$  si  $\Re \alpha + \Re \beta < n$ , et  $N_\alpha * N_\beta = -R_{\alpha+\beta}$ . Cette dernière relation (qu'on peut aussi interpréter au sens de l'algèbre de Clifford) contient les cas particuliers suivants :

a)  $\alpha = \beta = 0$  donne la formule de réciprocité de la transformation de Hilbert-Riesz.

b) La masse ou charge (c'est-à-dire mesure)  $\mu$  a le potentiel Newtonien  $U^\mu = \mu * R_2$  et engendre le champ de force  $F = -\nabla U^\mu = \mu * N_1$ . On a  $\nabla F = -N_{-1} * \mu * N_1 = \mu$  et le carré de l'énergie du champ est donné par les expressions  $\int U^\mu d\mu$  et  $\int |F|^2 dx$  qui sont égales puisque  $\int U^\mu d\mu = \text{Tr}(\mu * \check{\mu} * R_2) = \text{Tr}(N_1 * \mu * \check{N}_1 * \check{\mu}) = \int |N_1 * \mu|^2 dx$ .

Considérons maintenant la distribution  $K_\lambda = k(x) |x|^\lambda$  et soit  $\lambda \mapsto g(\lambda)$  une fonction méromorphe à valeurs scalaires, définie pour  $\Re \lambda < 0$ , qui ne s'annule pas et qui a des pôles simples exactement aux points  $\lambda = -n - j$  où  $K_\lambda$  en a (c'est-à-dire où les  $M_\alpha$  avec  $|\alpha|=j$  ne sont pas tous nuls). Alors  $K_\lambda^g = \frac{1}{g(\lambda)} k(x) |x|^\lambda$  est holomorphe pour  $\Re \lambda < 0$ . L'énoncé suivant contient plusieurs résultats connus comme cas particuliers (cf. [5]) :

Si  $t \geq 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $-n - t \leq \Re \lambda < -t$ , alors  $f \mapsto K_\lambda^g * f$  est une application linéaire continue de l'espace de Sobolev-Besov  $W_p^s$  dans  $W_q^{s-t}$ , où  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\Re \lambda}{n} - \frac{t}{n} - 1$ .

Il suffit de considérer le cas  $s = t$ . Pour  $t = 0$  l'énoncé est bien connu [4; chapitre II, 4.2 et 6.12]. Par interpolation on se ramène au cas où  $t$  est entier. Si  $t = 2k$  on a

$$\|K_\lambda^g * f\|_{L^q} = \|K_\lambda^g * R_t * R_{-t} * f\|_{L^q} \leq C \|(-\Delta)^k f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{W_p^{2k}}$$

puisque  $K_\lambda^g * R_t$  est homogène de degré  $\lambda + t$ . Similairement si  $t = 2k + 1$  on a

$$\|K_\lambda^g * f\|_{L^q} = \|K_\lambda^g * N_t * N_{-t} * f\|_{L^q} \leq C \|\nabla (-\Delta)^k f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{W_p^{2k+1}}$$

On remarque que  $R_\lambda$  et  $N_0$  se comportent comme le module d'un nombre complexe et l'unité imaginaire  $i$ . Ceci conduit à définir

$$J_\lambda = R_\lambda * \left( \cos \frac{\lambda\pi}{2} \delta + \sin \frac{\lambda\pi}{2} N_0 \right)$$

qui vérifie  $J_\alpha * J_\beta = J_{\alpha+\beta}$ ,  $\nabla J_{\lambda+1} = J_\lambda$  et  $J_{2k} = (-1)^k R_{2k}$ .

§ 2. LE CAS HYPERBOLIQUE

Soit  $(x|y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 - \dots - x_n y_n$  la forme bilinéaire lorentzienne, posons  $s(x)^2 = (x|x)$  et soit  $C^+$  le cône futur défini par  $s(x)^2 \geq 0$ ,  $x_1 \geq 0$ . La distribution  $s_+^\lambda$  définie par

$$\langle s_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{C^+} s(x)^\lambda \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

est fonction holomorphe de  $\lambda$  pour  $\Re \lambda > -2$ . Elle possède un prolongement analytique dans tout  $\mathbb{C}$ , ayant des pôles au points  $\lambda = -2j$  ( $j \geq 1$ ) et  $\lambda = -n - 2k$  ( $k \geq 0$ ). Il faut alors distinguer deux cas :

a) n impair . Les pôles sont simples. Les résidus aux points  $\lambda = -2j$  sont des distributions ayant pour support la nappe de  $C^+$ , décrites dans les travaux de Méthée et Guelfand-Chilov cités dans [1]. Le résidu au point  $\lambda = -n$  est

$$S_0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta.$$

Observons que la relation

$$(6) \quad \square s_+^{\lambda+2} = (\lambda + 2)(\lambda + n) s_+^\lambda$$

où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est le d'Alembertien, donne alors la solution élémentaire de  $\square$ . En effet au voisinage de  $\lambda = -n$  on a

$$\square s_+^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n) \left\{ \frac{S_0}{\lambda+n} + \dots \right\} = (\lambda+2)S_0 + \dots,$$

d'où en posant  $\lambda = -n$

$$\square s_+^{2-n} = (2-n) \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \delta.$$

La solution élémentaire cherchée est donc

$$E = \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2(-1)^{\frac{n+1}{2}} \pi^{n/2}} \text{Pfs}_+^{-n+2}.$$

De (6) et de la valeur de  $S_0$  on déduit aussi que le résidu de  $s_+^\lambda$  au pôle  $\lambda = -n-2k$  est

$$S_{2k} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n+2k}{2})} \square^k \delta.$$

b) n pair. Les points  $\lambda = -2j$ ,  $0 < 2j \leq n-2$  sont des pôles simples et les résidus sont des distributions  $T_j$  ayant comme support la nappe de  $C^+$ . Les points  $\lambda = -n-2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont des pôles doubles. Si  $S_{2k}^{(2)}$  dénote le coefficient de  $(\lambda+n+2k)^{-2}$  dans le développement de Laurent de  $s_+^\lambda$  autour du point  $\lambda = -n-2k$  alors

$$S_0^{(2)} = \frac{2(-1)^{\frac{n-2}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \delta.$$

D'ici il est encore facile de trouver la solution élémentaire de  $\square$ . En effet (6) donne

$$\square \left( \frac{T_{n-2}}{\lambda+n} + \dots \right) = (\lambda+2)(\lambda+n) \left\{ \frac{S_0^{(2)}}{(\lambda+n)^2} + \dots \right\},$$

d'où, en multipliant par  $(\lambda+n)$  et posant  $\lambda = -n$ ,  $\square T_{n-2} = (2-n)S_0^{(2)}$ ,

c'est-à-dire la solution élémentaire cherchée est

$$E = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n-2}{2})}{4\pi^{n/2}} \operatorname{Res}_{\lambda=-n+2} s^{\lambda+}$$

On voit donc que "la partie finie au sens de Hadamard" est le résidu et non pas la partie finie de la distribution (contrairement à ce qui a été affirmé dans l'introduction de [1]), qui a pour support la nappe de  $C^+$  (principe de Huygens).

De (6) on obtient de plus que

$$S_{2k}^{(2)} = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{n+2k}{2})} \square^k \delta.$$

Il résulte immédiatement de ces calculs que la distribution hyperbolique de Marcel Riesz

$$Z_{\lambda} = \frac{s^{\lambda-n}}{2^{\lambda-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\frac{\lambda}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+2-n}{2})}$$

est fonction entière de  $\lambda \in \mathbb{C}$  et que  $Z_{-2k} = \square^k \delta$ .

Comme  $\operatorname{Supp} Z_{\lambda} \subset C^+$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $Z_{\alpha} * Z_{\beta}$  a un sens pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et on trouve qu'elle est égale à  $Z_{\alpha+\beta}$ .

Si l'on pose par analogie avec le cas euclidien  $N_{\alpha} = \nabla Z_{\alpha+1}$ , on a  $N_{\alpha} * N_{\beta} = Z_{\alpha+\beta}$ , où  $\nabla \delta * \nabla \delta = \square \delta$  est pris au sens de la forme bilinéaire lorentzienne. En particulier  $N_0 * N_0 = \delta$ , donc  $N_0$  joue un rôle analogue au noyau de la transformation de Hilbert-Riesz. Pour  $n$  pair elle est donnée par

$$N_0 = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \text{Pfx } s_+^{-n-1} .$$

On peut aussi interpréter  $N_\alpha * N_\beta = Z_{\alpha+\beta}$  au sens de l'algèbre de Clifford attachée à la forme bilinéaire lorentzienne, dont les générateurs  $e_1, \dots, e_n$  satisfont à  $e_1^2 = 1, e_2^2 = \dots = e_n^2 = -1, e_i e_j + e_j e_i = 0$  si  $i \neq j$ .

Signalons finalement la distribution

$$J_\lambda = e^{\frac{i\pi\lambda}{2}} Z_\lambda * (\cos \frac{\pi\lambda}{2} \delta - i \sin \frac{\pi\lambda}{2} N_0)$$

qui vérifie  $J_\alpha * J_\beta = J_{\alpha+\beta}, \nabla J_{\lambda+1} = J_\lambda$  et  $J_{2k} = Z_{2k}$ . En tant qu'opérateurs de convolution, les distributions  $N_0$  et  $J_\lambda$  figurent déjà dans la célèbre conférence de Marcel Riesz de 1937.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Horváth : Finite parts of distributions. Colloque "Linear Operators and Approximation", Oberwolfach, août 1971, Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1973.
- [2] A. Korányi et S. Vági : Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat., III, ser. 25 (1971), 575-648.
- [3] A. Korányi et S. Vági : Cauchy-Szegő integrals for systems of harmonic functions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 26 (1972), 181-196.
- [4] E. M. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series vol. 30, Princeton University Press, 1970.
- [5] R. L. Wheeden : On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 421-435, 139 (1969), 37-53.