Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Mokobodzki

Noyaux absolument mesurables ou basiques et opérateurs nucléaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 6, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A6_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

NOYAUX ABSOLUMENT MESURABLES OU BASIQUES

ET OPERATEURS NUCLEAIRES

par G. MOKOBODZKI

Exposé N° VI

17 Novembre 1971

On étudie ici une classe de noyaux sur des espaces mesurables dont les propriétés s'apparentent à celles des opérateurs linéaires faiblement compacts sur des espaces de type $\mathcal{C}(K)$.

On établira des théorèmes de compacité qui sont à la base de la méthode de représentation intégrale des fonctions excessives relatives à une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ de noyaux positifs, satisfaisant à la condition (L) de Meyer.

<u>Notations, définitions</u> : Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable. On désignera par

- $B(X)$ l'espace des fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables bornées sur X.
- $B^+(X)$ le sous-ensemble de $B(X)$ formé des fonctions positives.
- $\mathfrak{M}(X)$ l'ensemble des mesures σ-additives bornées sur X.
- $\mathfrak{M}^+(X)$ la partie positive de $\mathfrak{M}$.

On supposera toujours que $B(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme.
Soient $(X_1,\mathfrak{B}_1)$, $(X_2,\mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables.
Dans ce travail, on appellera noyau de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ un opérateur linéaire borné V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ tel que pour tout $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X_2)$, αV soit une mesure sur $(X_1,\mathfrak{B}_1)$. Il suffit pour cela que, pour tout $y\in X_2$, l'application $\varepsilon_y V : f\to Vf(y)$ définisse une mesure sur $(X_1,\mathfrak{B}_1)$.

On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>compact</u> si c'est un opérateur linéaire compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On prendra garde qu'un opérateur compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ n'est pas nécessairement un noyau.

Soit $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X_2)$ et soient U et V deux noyaux de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On dira qu'ils sont <u>α-équivalents</u> si pour tout $f\in B(X_1)$, $Vf = Uf$ α-presque partout.

Enfin, pour $\alpha\in\mathfrak{M}^+(X)$, on désignera par ρ_α et τ_α les injections canonique de $B(X)$ dans $L^\infty(X,\alpha)$ et $L^1(X,\alpha)$.

Soient $(X_i, \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables.

<u>Définition 1</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>absolument mesurable</u> ou <u>basique</u> s'il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ tel que pour tout $x \in X_2$, $\varepsilon_x V$ soit absolument continue par rapport à μ. On dit alors que le noyau V est de base μ.
On retrouve là une formulation de la condition (L) de Meyer.

<u>Exemples</u> :

a) $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ et V est le noyau identité de $B(\mathbb{N})$.

b) X_1, X_2 sont des espaces compacts et V est un opérateur linéaire faiblement compact de $\mathcal{C}(X_1)$ dans $\mathcal{C}(X_2)$.

<u>Définition 2</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est <u>complètement mesurable</u> s'il est absolument mesurable et s'il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que, pour toute $f \in B(X_1)$, il existe une fonction f' bornée sur X_1, $\mathfrak{B}_1'$-mesurable telle que $Vf = Vf'$.

<u>Définition 3</u> : On dira qu'un noyau V de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ est σ-compact s'il existe une suite (U_n) de noyaux compacts de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et une constante $M > 0$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$ on ait

$$\sum_n |U_n f| \leq M \|f\| \quad \text{et} \quad Vf = \sum_n U_n f \quad .$$

§ 1.

Nous établirons les résultats suivants dans cette 1ère partie:

- Tout noyau σ-compact est complètement mesurable
- Le composé de deux noyaux absolument mesurables est un noyau σ-compact.
- Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ et tout noyau V absolument mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, $\tau_\alpha \circ V$ est un opérateur nucléaire de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2, \alpha)$.

Ces résultats sont des conséquences de lemmes intemédiaires et de propositions qui ont leur intérêt propre.

<u>Proposition 4</u> : Soit V un noyau complètement mesurable de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$ $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$ où E_μ désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle relatif à μ et $\mathfrak{B}_1'$.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, il existe une sous-tribu $\mathfrak{B}_1'' \subset \mathfrak{B}_1$ telle qu'en posant $U(.) = V(E_\mu(.|\mathfrak{B}_1''))$ on ait $U(B(X_1)) = V(B(X_1))$ et U est un noyau de base μ. Désignons par K la boule unité de $B(X_1)$. L'ensemble $U(K)$ est alors compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X_2. En effet U, étant de base μ, peut être considéré comme défini sur $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu)$ et $U(K)$ est aussi l'image continue de la boule unité de $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu)$, ensemble qui est métrisable pour la topologie $\sigma(L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1'', \mu), \quad L^1(X_1, \mu))$. On en déduit l'existence d'une suite $(x_n) \subset X_2$ qui sépare $U(K)$, en particulier pour $f \in U(K)$ les relations $(f \equiv 0)$ et $(f(x_n) = 0 \quad \forall\, n)$ sont équivalentes. Si l'on identifie les mesures de la forme αV, où $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, à des éléments de $L^1(X_1, \mu)$, on en conclut que pour tout $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ αV appartient à l'espace vectoriel fermé E engendré par la suite $(\varepsilon_{x_n} V)$ dans $L^1(X_1, \mu)$. Ceci implique que E est à base dénombrable et qu'il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que tout élément de E puisse se représenter par une fonction $\mathfrak{B}_1'$-mesurable. Cette sous-tribu vérifie bien

$$V(f) = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1')) \qquad \text{pour tout} \quad f \in B(X_1).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition :

<u>Proposition 5</u> : Soit V un noyau absolument mesurable, de base μ, de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) V est complètement mesurable

b) il existe une fonction numérique G sur $X_1 \times X_2$, $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable et telle que

i) pour tout $y \in X_2$, $G(.,y) \in \mathcal{L}^1(X_1,\mu)$

ii) pour tout $f \in B(X_1)$, tout $y \in X_2$, $Vf(y) = \int G(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)$.

Démonstration :

1) $a \Rightarrow b$. D'après la proposition précédente, il existe une sous-tribu séparable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$, et l'on est ramené à supposer que $\mathfrak{B}_1$ est à base dénombrable, un résultat classique dont on peut trouver une démonstration dans Meyer [3] , permet de conclure.

2) $b \Rightarrow a$. Si G est $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable, il existe deux sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2' \subset \mathfrak{B}_2$ telles que G soit aussi $(\mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{B}_2')$-mesurable ; pour tout $f \in B(X_1)$ on aura alors

$$Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1')) .$$

Corollaire 6 : Soit V un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. L'opérateur V^+ défini pour $f \in B(X_1)$, $x \in X_2$ par $V^+f(x) = \langle(\varepsilon_x V)^+, f\rangle$ est un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, V^+ et $V^- = V^+ - V$ sont positifs.

Corollaire 7 : Soit V un noyau complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, l'opérateur $\tau_\alpha \circ V$ de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ est nucléaire.

Démonstration : On peut écrire $Vf(.) = \int G(.,y)\, f(y)\, d\mu(y)$ où la fonction G appartient à $L^1(\mu \otimes \alpha)$.

Proposition 8 : Tout noyau σ-compact est complètement mesurable.

Démonstration : On s'appuie sur un lemme dont la démonstration est immédiate.

<u>Lemme</u> :

a) tout noyau compact est complètement mesurable

b) un noyau V, qui est limite simple d'une suite V_n de noyaux complètement mesurables, est aussi complètement mesurable.

<u>Démonstration</u> :

a) Soit U un noyau compact de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$, la famille $(\varepsilon_x U)_{x\in X_2}$ est fortement relativement compacte dans $\mathfrak{M}^+(X_1)$, par conséquent il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ telle que $\varepsilon_x U$ soit de base μ pour tout $x \in X_2$. Selon un argument déjà utilisé, l'espace vectoriel E engendré par la famille $(\varepsilon_x U)_{x\in X_2}$ est à base dénombrable dans $L^1(X_1,\mu)$ et il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1' \subset \mathfrak{B}_1$ telle que

$$u\, f = U(E_\mu(f\,|\,\mathfrak{B}_1')) \quad \forall\, f \in B(X_1).$$

b) Supposons que V_n soit de base $\mu_n \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ et que $V_n(f) = V_n(E_\mu(f\,|\,\mathfrak{B}^n))$ où $\mathfrak{B}^n$ est une sous-tribu à base dénombrable.
Par hypothèse $Vf = \lim$ simple $V_n\, f$ pour toute $f \in B(X_1)$, le noyau V est donc de base $\mu = \Sigma \frac{1}{2^n} \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$ et la tribu $\mathfrak{B}_1'$ engendrée par la réunion $(\bigcup_n \mathfrak{B}^n)$ satisfait aux conditions requises.

La proposition suivante et son corollaire montrent en quel sens on peut se ramener à considérer des noyaux complètement mesurables.

<u>Proposition 9</u> : Soit V un noyau absolument de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, il existe une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1^\alpha \subset \mathfrak{B}_1$ telle que $Vf = V(E_\mu(f\,|\,\mathfrak{B}_1^\alpha))$, α-presque partout $\forall\, f \in B(X_1)$.

<u>Démonstration</u> : Montrons que l'opérateur $T : g \to (g\,.\,\alpha)V$ définit un opérateur compact de $B(X_2)$ dans $L^1(X_1,\mu)$. Il revient au même de vérifier que $\tau_\alpha \circ V$ est un opérateur compact de $B(X_1)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$, autrement dit que de toute suite (Vf_n), $\|f_n\| \le 1$, on peut extraire une suite

convergente dans $L^1(X_1,\alpha)$. Le noyau V étant de base μ, on peut extraire une suite (Vf'_n) qui converge simplement partout sur X_2, donc converge dans $L^1(X_2,\alpha)$ fort. On en déduit l'existence d'une sous-tribu à base dénombrable $\mathfrak{B}_1^\alpha \subset \mathfrak{B}_1$ telle que pour toute $g \in B(X_2)$, $(g \cdot \alpha)V$ possède un représentant $\mathfrak{B}_1^\alpha$-mesurable dans $\mathcal{L}^1(X_1,\mu)$. On aura alors $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1^\alpha))$ α-presque partout $\forall\, f \in B(X_1)$.

<u>Corollaire 10</u> : Le composé de deux noyaux absolument mesurables peut être représenté comme le composé de deux noyaux complètement mesurables.

Dans ce qui suit on ne considèrera, pour simplifier, que des espaces mesurables $(X,\mathfrak{B})$ dont les tribus sont à base dénombrable et tous les noyaux considérés seront positifs.

Bien que nous disposions des théorèmes de Grothendieck sur les opérateurs nucléaires à valeurs dans les espaces de type L^1, il nous sera utile de refaire une étude élémentaire.

<u>Définition 11</u> (Grothendieck [2]) : Soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X)$ et soit H un ensemble de fonctions numériques $\mathfrak{B}$-mesurables sur X.
On dira que H est <u>α-équimesurable</u> s'il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que

a) $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$;

b) pour tout n et tout $f \in H$, $1_{A_n} f$ est α-essentiellement bornée et $\rho_\alpha(1_{A_n} . H)$ est relativement compact dans $L^\infty(X_o,\alpha)$ muni de la norme usuelle.

Cette définition s'étend naturellement à un ensemble de classes de fonctions α-mesurables, donc en particulier à tous les espaces $L^p(X,\alpha)$.

<u>Lemme 12</u> : Soit H un ensemble α-équimesurable de fonctions numériques sur X. S'il existe $f \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$ telle que $|h| \leq f$ $\forall\, h \in H$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$, $g \geq f$, telle que $\rho_\alpha(\frac{1}{g} . H)$ soit relativement compact dans $L^\infty(X,\alpha)$ muni de la norme usuelle.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que la suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ de la définition précédente est formée d'ensembles deux à deux disjoints. Posons alors $B_n = \complement(\bigcup_{m \leq n} A_m)$. On doit avoir $\inf_n \int f \cdot 1_{B_n} \, d\alpha = 0$, il existe donc une suite (n_p) telle que $\int f \cdot 1_{B_{n_p}} \, d\alpha \leq \frac{1}{2^p}$. Posons alors $g = f + f \cdot \sum_p 1_{B_{n_p}}$, on a $g \in \mathcal{L}^1_+(X,\alpha)$, et si $x \in B_{n_p}$, $f(x) \leq \frac{1}{p} g(x)$, par suite $\rho_\alpha(\frac{1}{g} \cdot H)$ est relativement compact dans $L^\infty(X,\alpha)$.

La proposition qui suit peut être considérée comme une généralisation du théorème d'Egoroff.

<u>Proposition 13</u> : Soit H un ensemble de fonctions numériques finies $\mathfrak{B}$-mesurables sur X. Si H est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X. alors H est α-équimesurable pour toute $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_o)$. Plus précisément, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$, dépendant de α, telle que

a) $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$;

b) $1_{A_n} \cdot H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X.

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_n) \subset X_o$ une suite de points séparant H et soit H_1 H un sous-ensemble dénombrable dense dans H pour la topologie de la convergence simple.

Posons $h_n = \sup\{(f-g) ; f,g \in H \text{ et } |f(x_k)-g(x_k)| < \frac{1}{2^n} \ \forall k \leq n\}$. L'ensemble H_1 étant dense dans H, l'enveloppe supérieure peut être prise avec f, g parcourant H_1 de sorte que h_n est $\mathfrak{B}$-mesurable puisque H_1 est dénombrable.

Chacune des fonctions h_n est partout finie, on a $h_{n+1} \leq h_n$ et $\inf_n h_n = 0$. Enfin pour toute suite $(g_p) \subset H$ convergeant simplement vers $g \in H$, on a la propriété suivante : $\forall n, \exists p_o$ tel que $(p \geq p_o) \Rightarrow |g - g_p| \leq h_n$. On en déduit que pour tout ensemble $A \in \mathfrak{B}_o$ tel que la suite $(1_A \cdot h_n)$ converge uniformément vers 0, l'ensemble $1_A \cdot H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X_o. D'après le théorème d'Egoroff, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X)$ et telle que

$\lim_p \|1_{A_n} \cdot h_p\| = 0$. Une telle suite (A_n) répond aux conditions cherchées.

<u>Lemme 14</u> : Soient $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable, H un ensemble borné de $B(X)$ compact métrisable pour la topologie de la convergence simple. Il existe un sous-ensemble $H' \subset B(X)$, $H \subset H'$, tel que H' soit convexe, stable par enveloppes supérieure et inférieure de sous-familles quelconques, compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X.

<u>Démonstration</u> : Soit H_1 un sous-ensemble dénombrable dense de H et soit $(x_n) \subset X$ une suite séparant H. On peut aussi supposer que H sépare X et que $\mathfrak{B}$ est la tribu la moins fine rendant mesurables les éléments de H_1.
Posons comme précédemment $h_n = \sup\{(f-g); f,g \in H \text{ et } |f(x_k)-g(x_k)| < 2^{-n} \ \forall k \leq n\}$ et considérons le compactifié (métrisable) $\tilde{X}$ de X pour la topologie la mons fine rendant continus les éléments de H_1 et toutes les fonctions h_n. L'ensemble X se plonge canoniquement dans $\tilde{X}$ et toute fonction $f \in H$ se prolongent en une fonction continue sur $\tilde{X}$ que nous désignerons par $\tilde{f}$, de même h_n se prolonge (c'est là une définition) en $\tilde{h}_n$ sur $\tilde{X}$. Posons alors $Y = \{\inf \tilde{h}_n = 0\}$. L'ensemble Y est un G_δ de $\tilde{X}$ et l'ensemble $\tilde{H}$ est équicontinu en chaque point de Y.

Considérons la distance d sur Y, compatible avec la topologie de Y, $d(x,y) = \sup_{f \in H} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$. Considérons maintenant, pour $x_0 \in X$, l'ensemble $F = \{g \in \mathcal{C}(Y); |g(x) - g(y)| < d(x,y) \ \forall x,y \in Y \text{ et } |g(x_0)| \leq \sup_{f \in H} |f(x_0)|\}$.
Pour tout $g \in F$, la trace de g sur X est $\mathfrak{B}$-mesurable, et F est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur Y, donc aussi pour la topologie de la convergence simple sur X. Enfin F est convexe, stable par enveloppes supérieure et inférieure de sous-familles quelconques.

L'ensemble H' des restrictions à X des éléments de F répond donc à la question.

La proposition précédente doit être rapprochée du théorème de Phillips sur les mesures définies sur un compact faible d'un espace de Fréchet, théorème qu'on peut formuler de la façon suivante, cf. [2].

<u>Théorème</u> : Soit X un espace compact, et soit H un ensemble faiblement compact de $\mathcal{C}(X)$. Pour toute mesure de Radon $\alpha \geq 0$ sur X, il existe une suite (K_n) de compacts de X telle que

a) $\alpha(\bigcup_n K_n) = \alpha(X)$;

b) $1_{K_n} . H$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

<u>Lemme 15</u> : Soit V un noyau complètement mesurable de base μ de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et soit K_1 la boule unité de $B(X_1)$. L'ensemble $V(K_1)$ est compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur X_2.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{B}_1'$ une sous-tribu à base dénombrable telle que $Vf = V(E_\mu(f|\mathfrak{B}_1'))$ pour tout $f \in B(X_1)$. La boule unité K de $L^\infty(X_1, \mathfrak{B}_1', \mu)$ est alors compacte métrisable pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, le noyau V peut être défini sur K et l'on a $V(K_1) = V(K)$ de sorte que $V(K)$ est l'image d'un compact métrisable par une application continue de K dans $B(X)$ muni de la topologie de la convergence simple.

<u>Proposition 16</u> : Le composé de deux noyaux absolument mesurables est un noyau σ-compact.

<u>Démonstration</u> : Soient $(X_i, \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables pour $i = 1,2,3$, $V : B(X_1) \to B(X_2)$ et $W : B(X_2) \to B(X_3)$ deux noyaux absolument mesurables de bases μ et α respectivement. On a vu qu'on pouvait supposer toutes les tribus séparables et tous les noyaux positifs.

D'après la proposition 13 et le lemme 15, il existe une suite $(A_n) \subset \mathfrak{B}_2$, telle que

a) $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$, $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X_2)$

b) pour tout n le noyau $1_{A_n} . V$ est compact. Posons alors $T_n = W \circ (1_{A_n} . V)$, les noyaux T_n sont compacts, pour tout $f \in B(X_1)$, on a

$\sum_n T_n(|f|) \leq \|W\| . \|V\| . \|f\|$ et $W \circ V = \sum_n T_n$.

§ 2. PROPRIETES DES OPERATEURS A NOYAU

Dans ce qui suit nous supposerons que tous les espaces mesurables considérés sont munis de tribus à base dénombrable. Soient $(X_1, \mathfrak{B}_1)$, $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables.

Proposition 17 : Soit V un noyau ≥ 0 complètement mesurable de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$. On suppose que V est de base μ. Pour toute mesure $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$, il existe $h \geq 1$, $h \in \mathcal{L}^1_+ (X_1,\mu)$ vérifiant les conditions suivantes:

a) pour tout $u \in \mathcal{L}^1_+ (X_1,\mu)$, $V(\frac{u}{h}) \in \mathcal{L}^1_+ (X_2,\alpha)$

b) l'opérateur U défini sur $L^1(X_1,\mu)$ par $U(u) = \tau_\alpha(V(\frac{u}{h}))$ est un opérateur linéaire compact de $L^1(X_1\ \mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$.

Démonstration : D'après la proposition n°5 , il existe une fonction numérique G sur $X_1 \times X_2$, qui est $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$-mesurable et telle que pour tout $f \in B(X_1)$ et $x \in X_2$ on ait

$$Vf(x) = \int G(x,y)\ f(y)\ d\mu(y)$$

Le noyau V étant borné, on a: $\int G(x,y)\ d\mu\ (y)\ d\alpha(x) < +\infty$.
Posons $h_o(y) = \int G(x,y)\ d\alpha(x)$. La fonction h_o appartient à $\mathcal{L}^1(X_1,\mu)$ de sorte qu'en posant $D = \{h_o = +\infty\}$ on peut définir un noyau borné T de base α, défini sur $B(X_2)$ par $Tg(y) = 1._D.h_o(y)^{-1}\int G(x,y)g(x)d\alpha(x)$.
Le noyau T est complètement mesurable, l'ensemble

$$H = \{h_o.Tg;\ g \in B_+(X_2),\ \|g\| \leq 1\}$$

est μ-équimesurable. D'après le lemme n°12, il existe donc $h \in \mathcal{L}^1_+(X_1,\mu)$ tel que l'ensemble $\frac{1}{h}.H$ soit borné et relativement compact dans $B(X_1)$.
Par dualité, on en déduit que le noyau $U: u \mapsto \tau_\alpha[V(\frac{u}{h})]$ est un opérateur compact de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$.

<u>Corollaire 18</u> : Si l'on a $\alpha V \leq \mu$, l'opérateur V peut se prolonger en un opérateur linéaire continu de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ qui transforme toute partie faiblement compacte en partie fortement compacte. Ce corollaire peut se démontrer directement à l'aide de la proposition précédente et nous en laisserons le soin au lecteur. Nous démontrerons des résultats plus fins dont l'utilité est plus grande en théorie du potentiel.

<u>Proposition 19</u> : Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable et soit $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$. Pour un filtre de Cauchy faible $\mathfrak{J}$ sur $L^1_+(X,\mu)$ les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $\mathfrak{J}$ est faiblement convergent sur $L^1_+(X\ \mu)$ (pour $\sigma(L^1(\mu),\ L^\infty(\mu))$ vers $f \in L^1_+(X,\mu)$.

b) pour toute suite décroissante $(A_n) \subset \mathfrak{B}$, le filtre $\mathfrak{J}$ converge uniformément vers f sur l'ensemble $(\mu_{|A_n})$, identifié à un sous-ensemble de $L^\infty(\mu)$.

c) Si X est un espace compact, et $\mathfrak{B}$ sa tribu borelienne, on peut dans la condition b) précédente ne considérer que des suites décroissantes de compacts.

<u>Démonstration</u> : L'espace $L^\infty(X,\mu)$ est isomorphe pour sa structure d'espace vectoriel ordonné à un espace $\mathcal{C}(\tilde{X})$ où $\tilde{X}$ est un espace compact stonien, et en supposant $L^\infty(X,\mu)$ plongé dans $L^1(X,\mu)$, la mesure μ se transporte en une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{X}$ et les espaces $L^1(X,\mu)$ et $L^1(\tilde{X},\tilde{\mu})$ sont isomorphes. Pour faciliter la démonstration, nous nous placerons sur $\tilde{X}$. Pour tout $f \in L^1(\tilde{X},\tilde{\mu})$, $f.\tilde{\mu}$ est une mesure ν_f sur $\tilde{X}$. Dire que $\mathfrak{J}$ est un filtre de Cauchy faible sur $L^1(\tilde{X},\mu)$ équivaut à dire que $\lim\limits_{\mathfrak{J}} \nu_f = \nu$ existe pour la topologie vague sur $\mathfrak{M}^+(\tilde{X})$ et la condition b) implique que ν ne charge pas les compacts $K \subset \tilde{X}$ qui sont $\tilde{\mu}$-négligeables, par suite ν est de base $\tilde{\mu}$ et il existe $f_o \in L^1_+(X,\mu)$ telle que:

$$\lim_{\mathfrak{J}} \int hfd\mu = \int f_o . d\mu \qquad \forall\ h \in L^\infty(X,\mu).$$

Montrons maintenant que non b $\Rightarrow$ non a.
On remarque immédiatement qu'on peut énoncer la condition b) avec des suites décroissantes $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ telles que $\inf \mu\ (A_n) = 0$.
Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite décroissante $(A_n) \subset \mathfrak{B}$ vérifiant les conditions suivantes: $\inf \mu(A_n) = 0$ et $\forall M \in \mathfrak{J}$, il existe $f_{n,M} \in M$ satisfaisant à

$$\int f_{n,M} \cdot 1_{A_n}\, d\mu \geq \varepsilon.$$

On aura donc aussi $\int f_{n,M} \cdot 1_{A_m}\, d\mu \geq \varepsilon$ pour $m \leq n$. Si le filtre $\mathfrak{J}$ convergeait vers $f_o \in L^1_+\ (X,\mu)$, on aurait, pour tout n, $\int f_o . 1_{A_n}\, d\mu = \lim_{\mathfrak{J}} \int f.1_{A_n}\, d\mu \geq \varepsilon$, ce qui vient en contradiction avec $\inf_n \int f.1_{A_n}\, d\mu = 0$.

<u>Corollaire 20</u> : Soit H une partie nucléaire de $L^1(\mu)$, contenue dans $L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$, bornée dans $L^\infty(\mu)$.
Tout filitre $\mathfrak{J}$ sur $L^1_+(\mu)$ faiblement convergent vers $f_o \in L^1_+(\mu)$, converge uniformément sur H vers f_o.

<u>Démonstration</u> : On sait qu'il existe une sente décroissante $(B_n) \subset \mathfrak{B}$ telle que

a) $\inf \mu\ (B_n) = 0$;

b) $1_{\complement B_n} . H$ est relativement compact dans $L^\infty(X,\mu)$ avec sa norme usuelle.

Supposons pour simplifier que $\int f_o d\mu \leq 1$.
D'après le théorème précédent, pour $0 < \varepsilon < 1$, il existe $M \in \mathfrak{J}$ tel que :

$$\int f.1_{B_n}\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } f \in M.$$

D'autre part, il existe une famille finie $(g_i)_{i \leq k}$ d'éléments de $L^\infty(\mu)$ telle que pour tout $g \in H$, il existe g_i vérifiant

$$\| 1_{\complement B_n} (g - g_i) \| < \frac{\varepsilon}{8}$$

L'ensemble

$$N = \{f \in L^1_+ (\mu) \mid |\int (f-f_o) \cdot g_i \cdot 1_{\complement B_n} d\mu| < \frac{\varepsilon}{8} \ \forall i < k \text{ et } |\int (f-f_o) d\mu| < \varepsilon\}$$

appartient au filtre $\mathfrak{J}$ et pour tout $f \in M \cap N$ et tout $g \in H$ on a :

$$|\int \complement B_n (f - f_o) g d\mu| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}(2\int f_o \, d\mu + \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin pour tout $f \in M$, on a par hypothèse :

$$\int f . 1_{B_n} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{d'où finalement}$$

$$|\int (f - f_o) g d\mu| < \varepsilon \text{ pour tout } f \in M \cap N.$$

Soit V un noyau complètement mesurable positif, de base μ, appliquant $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ telle que $\alpha V \leq \underset{\sim}{\mu}$.
L'opérateur V se prolonge en un opérateur linéaire $\tilde{V}$ continu de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ en posant pour $f \in L^1_+(X_1,\mu)$, $Vf = \sup_{p>0} V(\inf(p,f))$

puis en posant $\tilde{V}f$ = classe de Vf dans $L^1(X_2,\alpha)$.
Le théorème qui suit s'énonce sous les conditions ci-dessus.

<u>Théorème 21</u> : 1) $\tilde{V}$ transforme toute partie bornée pour l'ordre dans $L^1(X_1,\mu)$ en partie nucléaire de $L^1(X_2,\alpha)$

2) pour toute partie $M \subset L^1_+(X_1,\mu)$, faiblement relativement compacte, la fonction numérique

$$g_M = \inf \{Vf;\ f \in M\} \text{ est } \mathfrak{B}_2\text{-mesurable.}$$

3) pour tout filtre $\mathfrak{J}$ à base dénombrable sur $L^1_+(X_1,\mu)$ faiblement convergent, on a

$$\liminf_{\mathfrak{J}} Vf \geq V(\lim_{\mathfrak{J}}) \text{ et}$$

$$\inf_{M \in \mathfrak{J}} \int^* (V(\lim_{\mathfrak{J}}) - g_M)^+ \, d\alpha = 0 \qquad \text{où } g_M = \inf_{f \in M} Vf.$$

4) $\tilde{V}$ transforme tout filtre faiblement convergent $\mathfrak{J}$ sur $L^1_+(X_1,\mu)$ en filtre fortement convergent dans $L^1_+(X_2,\alpha)$

5) $\tilde{V}$ transforme toute suite de Cauchy faible dans $L^1(X_1,\mu)$ en suite fortement convergente, et toute partie faiblement compacte en partie fortement compacte.

6) $\tilde{V}$ transforme toute suite de Cauchy faible de $L^1(X_1,\mu)$, bornée pour l'ordre, en suite convergeant simplement α-presque partout.

<u>Démonstration</u> : 1) Soient $f_o \in L^1_+(X_1,\mu)$, $h_o = Vf_o$ et $D = \{h_o = +\infty\}$. Considérons le noyau V' défini sur $B(X_1)$ par $V'f = 1_D \cdot \frac{1}{h_o} \cdot V(f.f_o)$.

Le noyau V' est borné, de base μ, l'ensemble $H = \{V'f;\ \|f\| \leq 1\}$ est α-équimesurable et borné pour l'ordre dans $L^1(X_2,\alpha)$, et il en est de même pour l'ensemble $h_o.H$.

2) pour toute mesure $\beta \in \mathfrak{M}^+(X_1)$, β de base μ, l'application $f \mapsto \int f d\beta$ est semi-continue inférieurement sur $L^1_+(X_1,\mu)$, muni de la topologie faible.
Une adaptation du théorème du minimax donne le résultat suivant :
Si (β_n) est une suite croissante de mesures ≥ 0 et si $\beta = \sup \beta_n$ alors pour toute partie faiblement compacte $M \subset L^1_+(X_1,\mu)$, on a

$$\sup_n \left(\inf_{f\in M} \int f d\beta_n\right) = \inf_{f\in M} \int f d\beta$$

On a vu précédemment qu'il existe une fonction numérique $G \geq 0$, $(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$-mesurable sur $X_1 \quad X_2$ telle que pour tout $f \in B(X_1)$, tout $y \in X_2$,

$$Vf(y) = \int G(x,y)\ f(x)\ d\mu(x)$$

Définissons alors un noyau V_p de B_1 dans B_2 par la formule

$$V_p f(y) = \int \inf\ (p, G(x,y))\ f(x)\ d\mu(x)$$

et posons $g_M^p = \inf\ \{V_p f;\ f\in M\}$. Si M est faiblement compacte dans $L_+^1\ (X_1,\mu)$, on aura alors $g_M = \sup_p g_M^p$. Montrons que g_M^p est $\mathfrak{B}_2$-mesurable. L espace $L^1(X_1,\mu)$ est à base dénombrable, il existe donc une suite $(f_n) \subset M$, fortement dense dans M et pour toute $\mu' \in \mathfrak{M}^+(X_1)$, $0\leq\mu'\leq\mu$, on aura

$$\inf\ \{<\mu',f>;\ f \in M\} = \inf <\mu',\ f_n>.$$

Pour tout p et tout $y \in X_2$ $\varepsilon_y V_p \leq p.\mu$, par suite $g_M^p = \inf_n V_p f_n$ est $\mathfrak{B}_2$-mesurable.

3) pour tout $y \in X_2$, l'appication $f \to Vf(y) = <\varepsilon_y V, f>$ est s.c.i sur $\underset{\sim}{L}_+^1(X_1\ \mu)$ faible, par suite $\liminf_{\mathfrak{F}} Vf \geq V(\lim_{\mathfrak{F}})$. D'autre part, V étant continu de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ le filtre $\mathfrak{A} = V(\mathfrak{F})$ est faiblement convergent vers $V(\lim_{\mathfrak{F}})$. Pour toute partie $M \in \mathfrak{F}$, il existe alors une suite $(h_n) \subset V(M)$ telle que $\inf h_n \leq V(\lim_{\mathfrak{F}})$ α-presque partout et par conséquent $g_M \leq V(\lim_{\mathfrak{F}})$ α-presque partout. Reprenons les noyaux V_p introduits dans la démonstration de la partie 2) de ce théorème.

Soit (M_n) une base du filtre $\mathfrak{F}$ et posons, pour $y \in X_2$,

$$g_n^p(y) = \inf\ \{V_p f(y);\ f \in M_n\}$$

$$g_n(y) = \inf\ \{Vf(y);\ f \in M_n\}$$

Les fonctions g_n^p sont $\mathfrak{B}_2$-mesurables, car si M_n^o est un ensemble dénombrable fortement dense dans M_n, on a $g_n^p = \inf \{V_p f;\ f \in M_n^o\}$.
On a les inégalités:

$$g_n^p \leq g_n \leq V\ (\lim_{\mathfrak{J}}) \quad \alpha\text{-presque partout}$$

et

$$\sup_n g_n^p = V_p(\lim_{\mathfrak{J}}),\ \sup_p V_p(\lim_{\mathfrak{J}}) = V(\lim_{\mathfrak{J}}).$$

On en conclut que $\inf_n \int [\ V(\lim_{\mathfrak{J}}) - g_n]\ d\alpha = 0$

4) Reprenons la fonction G sur $X_1 \times X_2$ associée à V dans la question 2) ci-dessus et posons

$$h_o(x) = \int G(x,y)\ d\alpha(y).$$

En raison de la relation $\alpha V \leq \mu$, on a $h_o \leq 1$ μ-presque partout et l'ensemble $H = \{(g.\alpha)V,\ \|g\| \leq 1\}$ est μ-équimesurable, d'après la proposition n°19, le filtre $\mathfrak{J}$ faiblement convergent sur $L_+^1(X_1,\mu)$, vers $f \in L_+^1(X_1,\mu)$, converge uniformément vers f sur H, ou ce qui revient au même, $V(\mathfrak{J})$ converge fortement dans $L^1(X_2,\alpha)$.

5) Soit (f_n) une suite de Cauchy faible dans $L^1(X_1,\mu)$; cette suite converge simplement et on peut trouver une sous-suite $(f'_n) \subset (f_n)$ telle que les suites (f'^+_n) et (f'^-_n) convergent faiblement; on termine alors en utilisant les propriétés 3) ou 4) vérifiées par $\tilde{V}$, puis un résultat classique de Grothendieck. [2].

6) il suffit d'utiliser la propriété 1) de l'énoncé du théorème.
Le théorème qui suit est une légère amélioration du précédent.
Soient $(X_i,\ \mathfrak{B}_i)$ des espaces mesurables $i = 1,2,3$.

<u>Théorème 22</u> : Soient V, U des noyaux positifs complètement

mesurables de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ et de $B(X_2)$ dans $B(X_3)$ respectivement. On suppose V de base μ et soit $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$ tel que $\alpha W \leq \mu$, avec $W = U_o V$.

Alors la propriété 3 du théorème 21 est satisfaite par le noyau W pour tout filtre $\mathfrak{J}$ faiblement convergent dans $L^1_+(X_o,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On sait qu'il existe une suite croissante de noyaux (V_p) de $B(X_1)$ dans $B(X_2)$ telle que $V = \sup_p V_p$ et telle que pour tout $f \in B(X_1)$, $|V_p f| \leq p \int |f| d\mu$.

Le noyau U étant complètement mesurable, il existe une suite $(A_n) \in \mathfrak{B}_2$ telle que:

1°) $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $m \neq n$ et $\alpha(\bigcup_n A_n) = \alpha(X_2)$

2°) L'ensemble $1_{A_n} . U(K_2)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur X_3, K_2 étant la boule unité de $B(X_2)$.

On en déduit que pour tout p et tout n, le noyau $W_{n,p} = 1_{A_n} . U_o V_p$ est un opérateur positif compact de $L^1(X_o,\mu)$ dans $B(X_3)$, muni de la norme uniforme.

Soit alors $\mathfrak{J}$ un filtre faiblement convergent sur $L^1_+(X_o,\mu)$. Pour tout $M \in \mathfrak{J}$ posons $g^{n,p}_M = \inf \{W_{n,p} f;\ f \in M\}$ et $g_M = \inf \{U_o V f;\ f \in M\}$.

Les fonctions $g^{n,p}_M$ sont $\mathfrak{B}_3$-mesurables et $\inf_{M \in \mathfrak{J}} \|W_{n,p}(\lim_{\mathfrak{J}}) - g^{n,p}_M\| = 0$ ou $\| \ \|$ désigne la norme uniforme de $B(X_3)$. On a encore les inégalités $g^{n,p}_M \leq g_M \leq (U_o V)(\lim_{\mathfrak{J}})$ α-presque partout et $(U_o V)(\lim_{\mathfrak{J}}) = \sup_{n,p} W_{n\ p}(\lim_{\mathfrak{J}})$

On conclut alors comme précédemment que :

$$\inf \int^* [(U_o V)(\lim_{\mathfrak{J}}) - g_M]\, d\alpha = 0.$$

<u>Remarque</u> : Le théorème précédent est encore vrai pour des noyaux de la forme $W = \sum_n U_n \circ V_n$ où (U_n) et (V_n) sont des suites de noyaux absolument mesurables positifs.

Caractérisation des opérateurs à noyau.

Soient $(X_1, \mathfrak{B}_1)$, $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ des espaces mesurables, $\mu \in \mathfrak{M}^+(X_1)$ $\alpha \in \mathfrak{M}^+(X_2)$

Proposition 24 : Pour un opérateur linéaire continu T de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) il existe $G \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mu \otimes \alpha)$ telle que pour $f \in L^1(X_1,\mu)$, $y \mapsto \int G(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)$ soit un élément de $\mathcal{L}^1(X_2,\alpha)$ dont la classe dans $L^1(X_2,\alpha)$ est égale à Tf, autrement dit T est un opérateur à noyau.

b) T transforme toute suite $(f_n) \subset L^1(X_1,\mu) \cap L^\infty(X_1,\mu)$ bornée en norme L^∞, faiblement convergente pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, en une suite vérifiant:

$$\liminf T f_n = \limsup T f_n = T(\lim f_n).$$

Démonstration : 1) l'implication a ⇒ b a été démontrée dans le cadre du théorème 21.

2) Montrons que b ⇒ a. Soit K la boule unité de $L^\infty(X_1,\mu)$; pour tout voisinage faible ω de 0 dans K, on définit :

$$\varphi_n(\omega) = \sup \{ \int \sup (Tf_1,\dots,Tf_n)\, d\alpha \mid , f_1, f_2, \dots, f_n \in \omega\}$$

puis $\varphi(\omega) = \sup_n \varphi_n(\omega)$.

On commencera par remarquer que T est différence de deux opérateurs linéaires positifs continus de $L^1(X_1,\mu)$ dans $L^1(X_2,\alpha)$ ceci de façon très générale dès que T est continu. Puis on remarquera que T(K) est compact fort dans $L^1(X_2,\alpha)$ de sorte qu'on peut supposer les tribus $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ à base dénombrable.

Soit alors (ω_p) une suite fondamentale décroissante de voisinages faibles de 0 dans K.

Montrons que l'on a $\inf_p \varphi(\omega_p) = 0$.

Si ce n'était pas le cas, il existerait $\varepsilon > 0$, et pour tout p un ensemble fini A_p tel que

$$\int \sup \{Tf;\ f \in A_p\}\, d\alpha > \varepsilon.$$

Soit alors $(f_n) = \bigcup_p A_p$ une énumération de $A = \bigcup_p A_p$. Par construction la suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans K, et par conséquent on devrait avoir $\limsup T f_n = \liminf T f_n = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la suite (f_n).

Posons alors, $g_p = \sup \{Tf,\ f \in \omega_p\}$, l'enveloppe supérieure étant prise dans l espace complètement réticulé $L^1(X_2,\alpha)$.

On a vu que $\inf_p \int g_p\, d\alpha = 0$ et $g_{p+1} \leq g_p$.

Pour une sous-suite convenable g_{p_n}, on a :

$$\sum_n \int g_{p_n}\, d\alpha < +\infty \text{ et } g = \sum_n g_{p_n} \in L^1(X_2,\alpha).$$

Comme cela a été déjà fait pour la proposition 13, on remarque que l'ensemble $H = \{\frac{Tf}{g} \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ est essentiellement borné et compact dans $L^\infty(X_2,\alpha)$ avec sa norme usuelle et par suite l'ensemble $g.H$ est nucléaire dans $L^1(X_2,\alpha)$.

Considérons l'opérateur T' de $L^\infty(X_1,\mu)$ dans $L^\infty(X_2,\alpha)$ défini par $T'f = \frac{1}{g} \cdot Tf$.

L opérateur T' est compact et pour toute suite décroissante $(f_n) \subset L^\infty_+(X_1,\mu)$ telle que $\inf f_n = 0$, on a $\inf \|T'f_n\|_\infty = 0$.

Soit alors ρ un relèvement de $L^\infty(X_2,\alpha)$ (cf. Meyer [3]). L'opérateur $V = \rho \circ T'$ est un vrai noyau complètement mesurable, de base μ, il existe alors $G' \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \alpha)$ permettant de représenter T', puis l'on passe aisément à l'opérateur T lui-même.

<u>Applications à la théorie du potentiel</u>.

Soit $(X, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, (V_λ) $\lambda \geq 0$, une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur B telle que

$V = V_0$ soit un noyau borné. (cf. Meyer [3]).
On suppose de plus que V est un noyau absolument mesurable de base μ.

<u>Proposition</u> : Le noyau V est σ-compact.

<u>Démonstration</u> : L'équation résolvante $V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V$ montre que chacun des noyaux V_λ est absolument mesurable de base μ. Par conséquent le noyau $U_\lambda = \lambda V_\lambda V$ est σ-compact et $\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$.
On peut alors écrire :

$$V = V_1 V + \sum_n \left(2^n V_{2^n} V - 2^{n+1} V_{2^{n+1}} V\right)$$

et
$$\|2^n V_{2^n} V - 2^{n+1} V_{2^{n+1}} V\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

ce qui montre que V est σ-compact car $V_\lambda V = \sum_n U_n$ où les U_n sont des noyaux compacts et ≥ 0.

<u>Corollaire</u> : Pour tout $\alpha > 0$ le noyau V_λ est σ-compact.

<u>Démonstration</u> : Considérer la famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ où $U_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck : Espaces vectoriels topologiques; cours de Saô-Paulo.

[2] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires; Memoirs of the American Math. Society.

[3] P. A. Meyer : Probabilités et potentiels; Hermann, Paris.

[4] G. Mokobodzki : Noyaux absolument mesurables et opérateurs nucléaires; Note aux C. R. Acad. Sc. Paris Tome 270, Série A, n°25 (22 Juin 1970) .