

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. ZUILY

**Sur l'existence de solutions analytiques globales des équations
aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants en deux
variables indépendantes, d'après E. de Giorgi**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 5,
p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A5_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES GLOBALES DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS EN
DEUX VARIABLES INDEPENDANTES D'APRES E. DE GIORGI

par C. ZUILY

Exposé N° V

10 Novembre 1971

§ 1. INTRODUCTION

Le problème de la surjectivité des opérateurs linéaires à coefficients constants dans des espaces de distributions $E(\Omega)$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$) a fait l'objet de nombreux travaux consacrés aux cas $E(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, $E(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$ (distributions d'ordre fini), $E(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$, $E(\Omega) =$ classes de Beurling etc... (Malgrange, Ehrenpreis, Hörmander, etc..., (cf. [1] chap. 3 et [3] chap. 7).

L'auteur s'intéresse ici au cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, $E(\Omega) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}^2$, et démontre le résultat suivant :

Théorème 1.1 : Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{R}^2$ et soit A un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants (réels ou complexes). Il existe alors au moins une fonction $u(x,y)$ analytique dans $\mathbb{R}^2$ qui satisfait à l'équation

$$(1.1) \quad Au(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Signalons que T. Kawai [2] a récemment considéré le cas $E(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$ espace des fonctions analytiques sur Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du théorème 1.1 est basée sur deux résultats fondamentaux, les propositions 3.1 et 3.2 (paragraphe 3). Le paragraphe 2 contient des lemmes préliminaires.

§ 2. LEMMES PRELIMINAIRES

Lemme 2.1 : Soient λ , a , γ_h , $h = 0, 1, \dots, n-1$ des nombres complexes tels que

$$(2.1) \quad \lambda^m + \sum_{h=0}^{n-1} \gamma_h a^{n-h} \lambda^h = 0.$$

V.2

Alors

$$(2.2) \quad |\lambda| \leq |a| \left\{ 1 + \sum_{h=0}^{n-1} |\gamma_h| \right\} .$$

Lemme 2.2 : Soient $P(z) = (z - \mu_1) \dots (z - \mu_n)$ et $Q(z)$ deux polynômes d'ordre n en la variable complexe z . Soit λ une racine de l'équation $Q(z) = 0$ et supposons que a, ε sont deux nombres positifs tels que

$$|\mu_k| \leq a \quad h = 1, \dots, n ; \quad \varepsilon \leq 2^{-n}$$

$$|Q(z) - P(z)| \leq \{a |z|^{n-1} + a^n\} \varepsilon \quad \forall z .$$

Alors
$$\min_h |\lambda - \mu_k| \leq 2 a \varepsilon^{1/n} .$$

Démonstration : Posons $\eta = \min_h |\lambda - \mu_k|$. On a

$$(2.3) \quad \eta^n \leq |P(\lambda)| = |P(\lambda) - Q(\lambda)| \leq \{a(a + \eta)^{n-1} + a^n\} \varepsilon .$$

Si $\eta > a$, d'après (2.3) on a

$$\eta^n \leq a \eta^{n-1} 2^n \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad \eta \leq a .$$

On doit donc avoir $\eta \leq a$ ce qui, en utilisant (2.3), donne le résultat cherché.

Lemme 2.3 : Soit l'équation différentielle à coefficients constants complexes

$$(2.4) \quad \frac{d^n w}{dy^n} + \sum_{h=0}^{n-1} b_h \frac{d^h w}{dy^h} = q(y) .$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de son équation caractéristique

$$\lambda^n + \sum_{h=0}^{n-1} b_h \lambda^h = 0 .$$

Supposons que r, η sont des nombres réels et s, α des

nombres positifs tels que

$$|\lambda_j| \leq \alpha ; \quad |\operatorname{Re} \lambda_j - r| \leq s + 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$|q(t)| \leq e^{rt} e^{-s|t-\eta|} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Il existe alors une solution unique w de l'équation (2.4) telle que

$$(2.5) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{-ry} w(y) = \lim_{r \rightarrow -\infty} e^{-ry} w(y) = 0 .$$

De plus cette solution vérifie

$$(2.6) \quad \left| \frac{d^h w}{dy^h} \right| \leq e^{ry - s|y-\eta|} (\alpha + 1)^h \quad h = 0, 1, \dots, n .$$

Démonstration : On considère d'abord le cas $n=1$. La solution de (2.4) s'écrit

$$w(y) = e^{-b_0 y} \left\{ \int_0^y e^{b_0 t} q(t) dt + \text{Cte} \right\} .$$

Il suffit alors de prendre

$$c = - \int_0^{\infty} e^{b_0 t} q(t) dt \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} b_0 + r \leq 0$$

$$c = \int_{-\infty}^0 e^{b_0 t} q(t) dt \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} b_0 + r \geq 0 .$$

Pour $n > 1$ on considère le système

$$\begin{cases} \frac{dw_h}{dy} = \lambda_h w_h + w_{h-1} & h = 2, \dots, n \\ \frac{dw_1}{dy} = \lambda_1 w_1 + q(y) . \end{cases}$$

Si $(w_1, \dots, w_n)$ est solution de ce système, w_n est solution de (2.4).

Supposons que s, γ sont deux nombres positifs tels que

$$s \geq |\lambda_h| + 1 \quad h = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad |q(y)| \leq e^{s|y|} \quad |y| \leq \gamma .$$

Alors la solution de (2.4) qui satisfait aux conditions initiales

$$\frac{d^h w}{dy^h}(0) = 0 \quad h = 0, 1, \dots, n$$

satisfait les estimations

$$(2.7) \quad \left| \frac{d^h w}{dy^h} \right| \leq s^h e^s |y| \quad h=0, 1, \dots, n \quad .$$

Démonstration : On raisonne comme au lemme 2.3 en commençant par le cas $n = 1$.

Lemme 2.5 : Soit $\varphi(s)$ $s \in \mathbb{R}$, une fonction positive décroissante. Il existe alors une fonction $\psi(s)$, C^∞ positive décroissante telle que

$$\psi(s) + \left| \frac{d\psi}{ds} \right| + \left| \frac{d^2\psi}{ds^2} \right| \leq \varphi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad .$$

Démonstration : Considérons une fonction $\gamma(s)$, C^∞ sur $\mathbb{R}$ nulle pour $|s| \geq 1$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\gamma(s) + \left| \frac{d\gamma}{ds} \right| + \left| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right| \right) ds < 1 \quad .$$

Il suffit alors de poser

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(s-t) \varphi(t+1) dt \quad .$$

Lemme 2.6 : Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ deux fonctions C^∞ dans un ouvert B de $\mathbb{R}^2$. Supposons que

$$(2.8) \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \sum_{h=0}^{n-1} b_h \frac{\partial^h u}{\partial y^h \partial x^{n-h}} + \sum_{0 \leq h+k \leq n-1} b_{h,k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial y^h \partial x^k} = f(x,y)$$

$$(2.9) \quad \left| \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^r \partial y^s} \right| \leq (s+r)! \alpha^s \beta^r \quad \text{pour } s, r \in \mathbb{N}$$

$$(2.10) \quad \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} \right| \leq (r+s)! \alpha^s \beta^s \quad \text{pour } r \in \mathbb{N}, s = 0, 1, \dots, n$$

$$(2.11) \quad \beta > 1 ; \alpha > \beta \left\{ 1 + \sum_{h=0}^{n-1} |b_h| + \sum_{h+k=0}^{n-1} |b_{hk}| \right\}$$

Alors (2.10) est vraie $\forall s \in \mathbb{N}$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur s et on dérive l'équation (2.8) par rapport à y .

Soit w une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^6$, un point de $\mathbb{R}^6$ sera noté (x, y, t) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$. On notera

$$|\text{grad } w| = \left(\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|^2 + \sum_{j=1}^4 \left| \frac{\partial w}{\partial t_j} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2}.$$

Lemme 2.7 : Supposons qu'il existe une constante positive σ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^4} \{ |w(x, y, t)| + |\text{grad } w(x, y, t)| + |\Delta w(x, y, t)| \} dt \leq \sigma.$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(2.12) \quad w(x, y, 0, 0, 0, 0) = -\frac{1}{4\omega_6} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta w(\xi, \eta, z)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + |z|^2]^2} d\xi d\eta dz$$

où ω_6 est la mesure de la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^6$.

Démonstration : Il résulte de l'hypothèse que

$$(2.13) \quad \int_{x^2+y^2+|z|^2 \leq \rho^2} \{ |w| + |\text{grad } w| + |\Delta w| \} dx dy dz \leq \pi \sigma \rho^2 \quad \forall \rho > 0.$$

Soit une fonction $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que
$$\begin{cases} \gamma(s) = 1 & s \leq 0 \\ \gamma(s) = 0 & s \geq 1 \end{cases}.$$

Pour tout $\rho > 0$ considérons la fonction

$$\beta(x, y, t) = w(x, y, t) \gamma[\sqrt{x^2 + y^2 + |t|^2} - \rho]$$

alors β est à support compact et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^6$. On a donc en utilisant la solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^6$:

$$\beta(x, y, t) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta \beta(\xi, \eta, z) d\xi d\eta dz}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + |z-t|^2]^2}$$

d'où

$$\beta(x, y, 0, 0, 0, 0) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta \beta(\xi, \eta, z) d\xi d\eta dz}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + |z|^2]^2}.$$

En faisant tendre ρ vers $+\infty$ et en utilisant les théorèmes classiques de convergence des intégrales on déduit (2.12).

§ 3. PROPOSITIONS FONDAMENTALES

Proposition 3.1 : Soit $f(x, y)$ une fonction (réelle ou complexe) analytique dans $\mathbb{R}^2$ et soit φ une fonction positive décroissante définie sur $\mathbb{R}$.

Il existe une fonction $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^3$ et une fonction ψ décroissante positive C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(3.1) \quad f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \tau^2]^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} 0 < \psi(s) \leq \varphi(s) \\ \text{supp } g \subset \{(\xi, \eta, \tau) : \psi(\xi^2 + \eta^2) \leq \tau \leq 2\psi(\xi^2 + \eta^2)\} \\ \psi(\xi^2 + \eta^2) \geq \int_0^{+\infty} |g(\xi, \eta, \tau)| d\tau \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Démonstration : Nous noterons (x,y,t) $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^4$, les points de $\mathbb{R}^6$. D'après le théorème de Cauchy-Kovalewska il existe un ouvert $A \subset \mathbb{R}^6$ contenant l'hyperplan $t_4 = 0$ et une fonction $u(x,y,t)$ tel que

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } A \\ u(x,y,t_1,t_2,t_3,0) = f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial t_4} u(x,y,t_1,t_2,t_3,0) = 0 \end{cases} .$$

D'autre part il existe une fonction $\alpha(s)$ positive décroissante continue telle que pour tout $s \geq 0$:

$$A(s) = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 \leq s \quad |t| \leq \alpha(x^2 + y^2)\} \subset A .$$

Posons alors

$$\beta(s) = \text{Max} \{ |u| + |\text{grad } u| : (x,y,t) \in A(s) \} , \quad s \geq 0 .$$

Soit p un nombre réel ≥ 1 . D'après le lemme 2.5 il existe une fonction ϕ , C^∞ décroissante, telle que, pour tout $s \geq 0$

$$(3.4) \quad \begin{cases} 0 < \phi(s) \leq \varphi(s) \\ 2 \phi(s) \leq \alpha(s) \\ \phi(s) + |\phi'(s)| + |\phi''(s)| \leq \frac{1}{[p+s+\beta(s)]^2} \end{cases} .$$

Soit $\gamma(s)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(s) = 0 & \text{pour } s \geq 4 & ; & 0 \leq \gamma(s) \leq 1 & \text{pour } s \in \mathbb{R} \\ \gamma(s) = 1 & \text{pour } s \leq 1 & ; & |\gamma'| \leq 1 & ; & |\gamma''| \leq 1 & \text{pour } s \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Posons alors

$$w(x, y, t) = \begin{cases} u(x, y, t) \cdot \gamma \left[\frac{|t|^2}{\{\phi(x^2 + y^2)\}^2} \right] & , (x, y, t) \in A \\ 0 & (x, y, t) \notin A . \end{cases}$$

On a alors : $\Delta w = 0$ pour $|t| \leq \phi(x^2 + y^2)$, $w = \Delta w = 0$ pour $|t| \geq 2\phi(x^2 + y^2)$ et $f(x, y) = w(x, y, 0, 0, 0, 0)$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part il est facile de voir que w vérifie les hypothèses du lemme 2.7. On a donc

$$(3.5) \quad w(x, y, 0, 0, 0, 0) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta w(\xi, \eta, z) d\xi d\eta dz}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + |z|^2]^2} .$$

Il suffit alors de poser

$$\begin{cases} g(\xi, \eta, \tau) = C^{te} \int_{|z|=\tau} \Delta w(\xi, \eta, z) dz & , \tau > 0 \\ g(\xi, \eta, \tau) = 0 & \tau < 0 . \end{cases}$$

On aura alors en vertu de (3.5)

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \tau^2]} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 3.2 : Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(3.6) \quad \frac{\partial^n v}{\partial y^n} + \sum_{h=0}^{n-1} b_h \frac{\partial^h v}{\partial y^h \partial x^{n-h}} + \sum_{h+k=0}^{n-1} b_{h,k} \frac{\partial^{h+k} v}{\partial y^h \partial x^k} = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \tau^2]^2}$$

où ξ, η, τ sont des nombres réels, $\eta \geq 4$, $\tau > 0$.

Soient $\mu_1, \dots, \mu_n$ les racines de l'équation $\mu^n + \sum_{h=0}^{n-1} b_h i^{n-h} \mu^h = 0$.

Posons $m = 2 + \sum_{h=0}^{n-1} |b_h| + \sum_{h+k=0}^{n-1} |b_{h,k}|$.

Soit δ un nombre réel tel que

$$(3.7) \quad 0 < \delta < 1/4$$

$$(3.8) \quad \delta \leq \frac{1}{2} |\operatorname{Re} \mu_k| \quad \forall h : \operatorname{Re} \mu_h \neq 0.$$

Il existe alors une solution v de l'équation (3.6) telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tout $s \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \dots, n$

$$\left| \frac{\partial^{r+s} v}{\partial x^s \partial y^r} \right| \leq c_1 (s+r)! \alpha_1^s \beta_1^r \quad \text{si } |y| \leq \eta/4m$$

$$\left| \frac{\partial^{r+s} v}{\partial x^r \partial y^s} \right| \leq c_2 (s+r)! \alpha_2^s \beta_2^r \quad \text{si } |y| \geq \eta/4m$$

où c_1, α_1, β_1 dépendent continûment de m, δ, y mais sont indépendants de τ tandis que c_2, α_2, β_2 dépendent continûment de m, δ, y, τ et décroissent par rapport à τ .

Démonstration : Par translation on peut se ramener au cas où $\xi = 0$ dans le membre de droite de (3.6). Transformons (3.6) par Fourier par

port à x . Il vient

$$(3.9) \quad \frac{d^n}{dy^n} w(p, y, \eta, \tau) + \sum_{h=0}^{n-1} b_h (ip)^{n-h} \frac{d^h}{dy^h} w(p, y, \eta, \tau) + \\ + \sum_{h+k=0}^{n-1} b_{h,k} (ip)^k \frac{d^h}{dy^h} w(p, y, \eta, \tau) = q(p, y, \eta, \tau) \quad ; \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\text{où } q(p, y, \eta, \tau) = \mathfrak{F}_x [q[x^2 + (y-\eta)^2 + \tau^2]^{-2}] = \frac{\pi}{2} e^{-|p|[(y-\eta)^2 + \tau^2]^{1/2}} \times \\ \times \{[(y-\eta)^2 + \tau^2]^{-3/2} + |p|[(y-\eta)^2 + \tau^2]^{-1}\}.$$

Soient $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ les racines de l'équation caractéristique de (3.9)

$$\lambda^n + \sum_{h=0}^{n-1} b_h (ip)^{n-h} \lambda^h + \sum_{h+k=0}^{n-1} b_{h,k} (ip)^k \lambda^h = 0.$$

D'après le lemme 2.1 on a

$$|\mu_h| \leq m-1 \quad h = 1, \dots, n$$

En appliquant la proposition 2.2 il vient

$$\min_h |p^{-1} \lambda_j(p) - \mu_h| \leq 2(m-1) |p|^{-1/n} \quad j = 1, \dots, n$$

pour $|p| \geq 2^n$.

Posons $p_0 = p_0(m, \delta) = \left(\frac{4m}{\delta}\right)^n$ et $p_1 = p_1(\tau) = \max \{0, 12 \tau^{-1}(1 - \log \tau)\}$.

D'après la dernière inégalité, de (3.7), (3.8) il vient :

$$(3.10) \quad |\operatorname{Re} \lambda_j(p) - \delta |p| | \geq \delta |p| - 2m |p|^{1-1/n} + 1 \geq \frac{1}{2} \delta |p| + 1$$

pour $|p| \geq p_0$.

D'autre part si $|p| \geq p_1$ on a :

$$(3.11) \quad 0 < q(p, y, \eta, \tau) \leq e^{-\frac{|p|}{4}} \cdot \tau e^{-\frac{|p|}{2} |y-\eta|}.$$

En vertu de (3.10), (3.11) on peut appliquer le lemme 2.3 à l'équation (3.9) avec $|p| \geq p_0 + p_1$. Pour un tel p il existe donc une solution unique de (3.9) qui satisfait à

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-\delta |p| y} w_1 = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-\delta |p| y} w_1 = 0.$$

Soit maintenant w_2 la solution de (3.9) qui satisfait à

$$\frac{d^h w_2}{dy^h}(0) = 0 \quad h = 0, \dots, n-1.$$

Posons

$$w(p, y, \eta, \tau) = \begin{cases} w_1(p, y, \eta, \tau) & |p| \geq p_0 + p_1 \\ w_2(p, y, \eta, \tau) & |p| < p_0 + p_1 \end{cases}.$$

Nous allons estimer les dérivées en y de w jusqu'à l'ordre n . Tout d'abord en vertu du lemme 2.1 on a

$$(3.12) \quad |\lambda_j(p)| \leq (m-1)(1+|p|) \quad j = 1, \dots, n \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Supposons $|y| \leq \eta/4m$. Si $|p| \geq p_0 + p_1$ d'après (3.10), (3.11) et le fait que $\eta \geq 4$, le lemme 2.3 appliqué à l'équation (3.9) avec $r = \delta |p|$ et $s = \frac{\delta |p|}{2}$ donne

$$(3.13) \quad \left| \frac{d^h w(p, y, \eta, \tau)}{dy^h} \right| \leq e^{-\frac{9}{2} \delta |p|} m^h (1 + |p|)^h \quad h = 0, 1, \dots, n.$$

D'autre part si $|p| < p_0 + p_1$ en vertu de (3.12), de l'inégalité

$$q(p, y, \eta, \tau) \leq e^{-\frac{|p|}{2} |y - \eta|}$$

et du lemme 2.4 appliqué à l'équation (3.9) il vient

$$(3.14) \quad \left| \frac{d^h w(p, y, \eta, \tau)}{dy^h} \right| \leq e^{-\frac{3}{4} |p|} e^{m|y|} m^h (1 + |p|)^h \quad h = 0, 1, \dots, n.$$

Utilisant (3.13), (3.14) et $\delta < 1/4$, il vient

$$(3.15) \quad \left| \frac{d^h w(p, y, \eta, \tau)}{dy^h} \right| \leq e^{-3\delta|p|} e^{m|y|} m^h (1 + |p|)^h$$

$h = 0, 1, \dots, n$; $|y| \leq \frac{\eta}{4m}$.

Considérons maintenant le cas $|y| \geq \frac{\eta}{4m}$. Si $|p| \geq p_0 + p_1$, d'après (3.10), (3.11) on peut appliquer la proposition (2.3) à l'équation (3.9) avec

$$r = \delta|p|, \quad s = \delta|p| - 2m|p|^{1-1/n}, \quad \alpha = (m-1)(1+|p|) \quad \text{d'où}$$

$$(3.16) \quad \left| \frac{d^h w(p, y, \eta, \tau)}{dy^h} \right| \leq e^{-|p|\{\tau/4 - 2m(4m+1)|y| \cdot |p|^{-1/n}\}} m^h (1+|p|)^h;$$

$h = 0, 1, \dots, n$.

Enfin, de (3.12) et du fait que

$$q(p, y, \eta, \tau) \leq \frac{\pi}{2} \{\tau^{-3} + |p| \tau^{-1}\}$$

appliquant à nouveau le lemme 2.4 à l'équation (3.9), nous obtenons pour $|p| < p_0 + p_1$:

$$(3.17) \quad \left| \frac{d^h w(p, y, \eta, \tau)}{dy^h} \right| \leq \frac{\pi}{2} (\tau^{-3} + |p| \tau^{-1}) e^{m(1+|p|)|y|} m^h (1+|p|)^h;$$

$h = 0, 1, \dots, n$.

Posons maintenant

$$v(x, y, \eta, \tau) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixp} w(p, y, \eta, \tau) dp.$$

Les estimations (3.13), (3.14), (3.16) et (3.17) nous permettent de conclure que v possède les propriétés énoncées dans la proposition 3.2.

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1

Tout d'abord nous nous plaçons dans le cas particulier suivant. L'opérateur A est de la forme (2.8) et f est représentée par (3.1) où g est telle que :

$$\begin{aligned} g(\xi, \eta, \tau) &= 0 \quad \text{pour} \quad \eta \leq 4 \\ g(\xi, \eta, \tau) &= 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| \geq \eta. \end{aligned}$$

D'autre part nous supposons que φ est telle que

$$(4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta < +\infty.$$

Dans ce cas la fonction

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta \int_0^{+\infty} g(\xi, \eta, \tau) v(x, y, \xi, \eta, \tau) d\tau,$$

où v est la solution de (3.6) considérée à la proposition 3.2, est solution de $Au = f$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas général on recouvre $\mathbb{R}^2$ par des ouverts $A_0, \dots, A_7$ tels que A_0 est borné et si (x, y) et (x', y') sont dans le même A_h , $h > 0$

$$xx' + yy' > \frac{1}{2} \{ \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} \}.$$

La fonction g peut être alors écrite comme somme de huit fonctions g_h avec $\text{supp } g_h \subset A_h$, $h = 0, \dots, 7$.

$$\text{On pose alors} \quad f_h = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_h(\xi, \eta, \tau)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \tau^2]^2} d\xi d\eta d\tau$$

et on est ramené au cas précédent.

Remarque : L'auteur pense que le théorème 1.1 a de grandes chances d'être faux si le nombre de variables excède 2. Il doute de l'existence dans $\mathbb{R}^3$ d'une solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, t)$$

$$\text{où } f(x, y, t) = \sum_{h, k=1}^{+\infty} \exp [\varphi(h, k)(ix + ih^2 t - (y-h)^2 - 1)]$$

$\varphi(h, k) = [([p(h)]^k)!]$ où $p(h)$ = le $(k+1)$ -ième nombre premier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1963.
- [2] T. Kawai : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations
 I - Proceedings of Japan Academy, Vol. 47 N° 6 (1971), 537.
 II- Publications of the R.I.M.S. Kyoto Univeristy (1971).
- [3] F. Trèves : Locally convex spaces and P.D.E., Springer Verlag.
