M. Derridj
C. Zuily

Régularité Gevrey pour les opérateurs de Hörmander

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

REGULARITE GEVREY POUR LES OPERATEURS DE HÖRMANDER

par M. DERRIDJ et C. ZUILY

Exposé N° IV

3 Novembre 1971

§ 1. INTRODUCTION

L. Hörmander a introduit dans [4] la classe d'opérateurs de la forme $P=\sum_{j=o}^{r} X_j^2+X_o+c$, où $\{X_o,\dots,X_r\}$ est une famille de champs de vecteurs réels et de classe C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, et c est une fonction de classe C^∞ dans Ω, et a montré qu'ils sont hypoelliptiques sous l'hypothèse (H_1,Ω) (voir Définition 2.1).

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la régularité Gevrey de ces opérateurs. Nous nous contenterons de donner ici une idée des démonstrations des théorèmes énoncés. Ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure.

Il y aura deux parties ; dans la première nous donnons des résultats de régularité . Dans la deuxième, nous montrons que les hypothèses utilisées sont nécessaires si l'on veut avoir une certaine régularité Gevrey.

§ 2. REGULARITE

1. Notations et rappels.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soient $X_o,\dots,X_r$ des champs de vecteurs réels de classe C^∞ dans Ω .

Posons

$$P=\sum_{j=1}^{r} X_j^2+X_o+c\quad .$$

$\mathcal{L}(X_o,\dots,X_r)$ désignera l'algèbre de Lie engendrée par $X_o,\dots,X_r$.

Définition 2.1 : On dira que la famille $(X_o,\dots,X_r)$ vérifie la condition $(H_1.\Omega)$ (resp. $(H_2.\Omega)$) si $\mathcal{L}(X_o,\dots,X_r)$ (resp. $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_r)$) est de rang d en tout point de Ω.

Pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous définissons

$$|||u||| = \|u\| + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\| \quad \text{où } \|.\| = \|.\|_{L^2}$$

et pour $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\|f\|' = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\int f \varphi|}{|||\varphi|||} .$$

Rappelons le résultat de L. Hörmander : à tout compact K de Ω, on peut associer un entier ρ_K, lié à la structure des champs de vecteurs $X_o, \dots, X_r$, tel que si $\delta < \frac{1}{\rho_K}$:

$$(2.1) \qquad \|u\|_\delta \leq C(K,\delta)\left(\sum_{j=1}^{r} \|X_j u\| + \|u\|\right) \quad ; \; u \in C_o^\infty(K)$$

l'inégalité précédente permet de démontrer l'hypoellipticité de P.

Nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

<u>Théorème 2.1</u> : Soit $(X_o, \dots, X_r)$ une famille de champs de vecteurs réels de classe $C^\infty(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse $(H_1.\Omega)$ et $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_o + c$. Soit K un compact de Ω d'intérieur non vide et soit s tel que $s > 2\rho_K$. Alors si les coefficients de P sont dans $G^s(K)$ et si $Pu \in G^s(K)$, on a $u \in G^s(K)$.

<u>Théorème 2.2</u> : Nous gardons les notations du théorème (2.1). Supposons la condition $(H_2.\Omega)$ satisfaite. Alors le même résultat est vrai, si l'in suppose seulement $s > \rho_K$.

<u>Remarque</u> : Le théorème 2.2 est en général faux si $s < \rho_K$. En effet considérons l'opérateur $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, dans un voisinage Ω de l'origine dans $\mathbb{R}^3$. Pour cet opérateur $\rho_K = 2$, si K est un compact de l'origine. M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont montré dans [1] qu'il existe une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que Pu soit analytique, et u n'appartenant à aucun G^s tel que $s < 2$, (voir aussi [3]).

Démonstration : Fixons d'abord quelques notations.
Soit K compact de Ω, d'intérieur non vide. Soit ω un ouvert d'adhérence contenue dans $\overset{o}{K}$. Posons

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \; ; \; d(x, \complement\omega) > \varepsilon\} \quad .$$

Pour des raisons technique nous supposerons $\omega_\varepsilon = \emptyset$ si $\varepsilon > 1$. ψ désignera une fonction de $C_o^\infty(K)$, valant 1 sur $\bar{\omega}$. Enfin ε et ε_1 étant donnés $(\varepsilon + \varepsilon_1 < 1)$, soit $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} \in C_o^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que :

a) $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} \in C_o^\infty(\omega_{\varepsilon_1})$

b) $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} = 1$ sur $\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$

c) $\sup\limits_{\omega_{\varepsilon_1}} |D^\alpha \varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1}| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$ C_α étant indépendante de ε et ε_1.

Un tel choix est possible.

Lemme 2.3 : Supposons la condition $(H_1.\Omega)$ satisfaite. Soient m un entier positif et $\frac{p}{q}$ un rationnel positif tel que $\frac{p}{q} < \frac{1}{\rho_K}$. Il existe une constante $C = C(m, \frac{p}{q}, K)$, positive, telle que

$$(2.2) \qquad \|u\|_{H^{k.\frac{p}{q}}} \leq C \{ \sum_{l=o}^{k-1} \|P \psi T_{l.\frac{p}{q}} u\|' + \|u\| \} \; ; \quad 1 \leq k \leq mq-1 \text{ et } u \in C_o^\infty(K)$$

$$(2.3) \qquad \|u\|_{H^{m.p}(\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1})} \leq C \{ \sum_{l=o}^{mq-1} \|P \psi T_{l.\frac{p}{q}} \varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} u\|' + \|\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} u\| \} \quad ; \quad u \in C^\infty \; .$$

La démonstration du lemme (2.3) découle de l'inégalité (2.1) de Hörmander, en raisonnant par récurrence sur k.

Lemme 2.4 : Supposons la condition $(H_1.\Omega)$ satisfaite. Soit s un nombre réel tel que $s > 2\rho_K$. Il existe une constante $B > 0$, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $j \in N$ et tout $u \in C^\infty(\Omega)$ on ait :

$$(2,4) \qquad \varepsilon^{s|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} \leq B^{|\alpha|+1} \quad ; \quad |\alpha| \leq j \; .$$

<u>Idée de la démonstration</u> : On raisonne par récurrence sur j. On suppose (2.4) vraie jusqu'à l'ordre j, et on essaye de montrer que si B est une constante convenable, alors (2.4) est aussi vraie à l'ordre (j+1). Pour simplifier la situation on suppose que $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ dans le lemme (2.4), il suffit de prendre $m = 1$.

Alors on a l'inégalité

$$(2.5) \qquad \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \le C(\|P\,\psi\, u\|' + \|u\|) \qquad u \in C_o^\infty(K)$$

$$(2.6) \qquad \|u\|_{H^1(\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1})} \le C(\|P\,\psi\, T_{\frac{1}{2}}\,\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} u\|' + \|P\,\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} u\|' + \|\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1} u\|) \;;\; u \in C^\infty .$$

Soit α tel que $|\alpha| = j+1$, alors on a

$$\varepsilon^{s(j+1)} \|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_{(j+1)\varepsilon})} \le \varepsilon^{s(j+1)} \|D^\beta u\|_{H^1(\omega_{(j+1)\varepsilon})} \quad ; \quad |\beta| = |\alpha| - 1$$

Appliquons alors l'inégalité (2.6) avec $\varepsilon_1 = j\varepsilon$, à la fonction $D^\beta u$

$$\varepsilon^{s(j+1)} \|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_{(j+1)\varepsilon})} \le \varepsilon^{s(j+1)} C\{\|P\,\psi\, T_{\frac{1}{2}}\,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} D^\beta u\|' + \|P\,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} D^\beta u\|' +$$

$$+ \|\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} D^\beta u\|\} .$$

Le dernier terme du second membre se majore aisément d'après la récurrence par $C B^{|\alpha|}$. Quant au deuxième, il peut s'écrire

$$\|P\,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} D^\beta u\|' \le \varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} D^\beta Pu\| + \|[P,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}] D^\beta u\|'$$

comme $Pu = f$ est G^s , que $[P,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]$ peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^{r} X_j[X_j,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}] + \sum_{j=1}^{r} [X_j,[X_j,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]] + [X_o,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]$$

et en utilisant $\|X_j f\|' \le C\|f\|$ $\quad f \in C_o^\infty(K)$, on obtient :

$$\|[P,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]D^\beta u\|' \le \varepsilon^{-1}\|D^\beta u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} + \varepsilon^{-2}\|D^\beta u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} \ .$$

Reste le premier terme du 2nd membre ; on peut l'écrire

$$\|P\,\psi\,T_{\frac{1}{2}}\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}D^\beta u\|' \le \|\psi\,T_{\frac{1}{2}}\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}D^\beta P u\|' + \|[P,\psi\,T_{\frac{1}{2}}\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}D^\beta]u\|' \ .$$

Le premier terme se majore par $CB^{|\alpha|}$, si B est convenable. Dans le deuxième terme, la quantité qui donnera le plus de difficulté est :

$$\|\psi\,T_{\frac{1}{2}}[P,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]D^\beta u\|' \ ;$$

elle s'écrira

$$\sum_{j=1}^{r}\|\psi\,T_{\frac{1}{2}}X_j[X_j,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]D^\beta u\|' + \sum_{j=1}^{r}\|\psi\,T_{\frac{1}{2}}[X_j[X_j,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]]D^\beta u\|'$$

$$+\|\psi\,T_{\frac{1}{2}}[X_o,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]D^\beta u\|' + \dots$$

utilisant de nouveau $\|X_j u\|' \le C\|u\|$ $j=1,\dots,r$ si $u\in C_o^\infty(K)$, on voit qu'il nous reste à estimer des termes de la forme $\|X^2(\varphi)D^\beta u\|_{\frac{1}{2}}$. Pour cela on utilise l'inégalité (2.5), ce qui donnera lieu à une majoration de la quantité suivante

$$\|P\,\psi\,X^2(\varphi)D^\beta u\|' \quad \text{ici } \varphi=\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon} \ .$$

En corchetant de nouveau, il apparaît un terme de la forme $\|X^4(\varphi)D^\beta u\|$; nous voyons alors que la récurrence marche si $s\ge 4$. En effet

$$\|X^4(\varphi)D^\beta u\| \le \varepsilon^{-4}\|D^\beta u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} \ .$$

Le cas général d'un rationnele quelconque $\frac{p}{q}$ se traite similairement sauf qu'il faut manipuler un grand nombre d'inégalités données dans le lemme (2.3).

Lemme 2.5 : Supposons la condition $(H_2.\Omega)$ vérifiée. Soit s un nombre réel tel que $s > \rho_K$. Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $j \in \mathbb{N}$ et toute $u \in C^\infty$ on ait :

$$\varepsilon^{s|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} \le B^{|\alpha|+1} \qquad |\alpha| \le j \quad . \tag{2.7}$$

Idée de la démonstration : Nous commençons par prendre un rationnel $\frac{p}{q}$ et un entier m tels que $\frac{p}{q} < \frac{1}{\rho_K}$ et $\frac{q}{p} + \frac{1}{m} \le s$, mais très voisin de s, ce qui est possible.

Pour simplifier supposons que $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ et $m = 1$ (pour donner une idée de la démonstration ; le cas général introduisant des longueurs dues au nombre d'inégalités du lemme (2.3) qu'il faut manipuler). Elle vient essentiellement de la majoration des termes de la forme $\|\phi T_{\frac{1}{2}}[X_j,[X_j,\varphi_{\varepsilon,j\varepsilon}]]D^\beta u\|'$ (voir page IV.5).

Ici nous utilisons l'inégalité :

$$\|\phi T_{\frac{1}{2}} v\|' \le C \|v\| \qquad v \in C_0^\infty(K) \quad , \tag{2.8}$$

qui est vérifiée si $(H_2.\Omega)$ est satisfaite, ce qui nous donne à majorer simplement $\|X^2(\varphi)D^\beta u\|$, quantité qui se majore sans utiliser une nouvelle fois l'inégalité (2.5) comme dans le lemme (2.4). Finalement, il n'apparaîtra qu'une quantité de la forme $\varepsilon^{-3}\|D^\beta u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})}$ au lieu de $\varepsilon^{-4}\|D^\beta u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})}$. Le lemme est donc vrai si $s \ge 2 + 1$.

Dans le cas général d'un rationnel quelconque $\frac{p}{q}$ et d'un entier m, on trouve que la récurrence marche si $s \ge \frac{q}{p} + \frac{1}{m}$.

Le théorème 2.1 (resp. le théorème 2.2) découle de façon classique du lemme 2.4 (resp. du lemme 2.5) .

§ 3. NECESSITE DE LA CONDITION $(H_1.\Omega)$

Nous commencerons par rappeler que la condition de Hörmander est nécessaire et suffisante pour que P soit hypoelliptique si ses coefficients sont analytiques, [2], mais qu'elle ne l'est pas si ses coefficients ne sont pas analytiques. Nous montrons ici que pour espérer qu'une fonction $u \in C^{\infty}(\Omega)$ telle que $Pu = 0$ appartienne à une classe Gevrey, il faut que la condition $(H_1.\Omega)$ soit satisfaite.

1. Définitions.

Soit $(A_i)_{i\in\Lambda}$ (Λ étant un ensemble d'indices) une famille d'opérateurs différentiels dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, d'ordres respectifs m_i. Etant donné un multi-indice $I = (i_1,\dots,i_k)$ nous noterons :

$$|I| = k \qquad M_I = \sum_{j=1}^{k} m_{i_j} \quad \text{et} \quad A_I = A_{i_1} \circ \dots \circ A_{i_k} \quad .$$

Nous dirons qu'une fonction $u \in C^{\infty}(\Omega)$ est vecteur de Gevrey d'ordre s de la famille $(A_i)_{i\in\Lambda}$ si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|A_I u\|_{L^2(K)} \leq C^{|I|+1}(M_I!)^s \tag{3.1}$$

$G^s(A_i)$ désignera l'ensemble des vecteurs de Gevrey d'ordre s de la famille (A_i), et $\mathcal{A}(A_i) = G^1(A_i)$.

<u>Remarque</u> : La notion de vecteur analytique (i.e. $s = 1$) d'une famille d'opérateurs a été introduite dans [6] par E. Nelson sous une forme différente. En effet Nelson remplaçait (3.1) par :

$$\|A_I u\|_{L^2(K)} \leq C^{|I|+1}(|I|!)^s \quad .$$

2. Résultats.

Considérons une famille $(A_i)_{i\in\Lambda}$ de champs de vecteurs dans $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, à coefficients analytiques dans Ω

$$(3.2) \qquad A_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Supposons que les coefficients de ces champs vérifient la condition :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \forall K \text{ compact} \subset \Omega, \ \exists M_K > 0 \text{ tel que} \\ \forall i \in \Lambda, \ \forall p \in \mathbb{N}^d \quad \sup\limits_{\substack{x\in K \\ j=1,\dots,d}} |D^p a_{ij}(x)| \le M_K^{|p|} p! . \end{cases}$$

Théorème 3.1 : Soit $(A_i)_{i\in\Lambda}$ une famille de champs de vecteurs vérifiant la condition (3.3). Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que l'algèbre de Lie engendrée par toute sous-famille finie de la famille $(A_i)_{i\in\Lambda}$ soit de rang $<d$ en ce point. Alors $\mathcal{A}(A_i) \not\subset G^s(\Omega)$, pour tout $s \in [1,+\infty[$.

Théorème 3.2 : Soient $(X_0,\dots,X_r)$ une famille de champs de vecteurs dans Ω à coefficients analytiques ne vérifiant pas $(H_1.\Omega)$ et $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$ où $c \in \mathcal{A}(\Omega)$. Supposons que P soit non totalement dégénéré. Alors, pour tout $s \in [1,+\infty]$, il existe $u \in C^\infty(\Omega)$, u n'appartenant pas à $G^s(\Omega)$ telle que Pu soit analytique. (On dit que P est non totalement dégénéré dans Ω si, pour tout $x \in \Omega$, il existe $j \in \{1,\dots,r\}$ tel que $X_j(x) \neq 0$).

Pour la démonstration de ces théorèmes, nous nous contenterons ici de citer les lemmes et propositions utilisés.

Lemme 3.3 : Soient $B_1,\dots,B_p$ des champs de vecteurs dans Ω de classe $G^s(\Omega)$, $s \geq 1$ et α_{ij} $j=1,\dots,p$, $i=1,\dots,q$ des fonctions de $G^s(\Omega)$. Posons

$$C_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} B_j \qquad i=1,\dots,q$$

alors
$$G^s(B_1,\dots,B_p) \subset G^s(C_1,\dots,C_q) \quad .$$

Proposition 3.4 : Soit L un opérateur différentiel d'ordre 2 que l'on peut écrire sous la forme (pour t assez petit ; $t \in I$)

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{p \geq 0} t^p B_p(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{q \geq 0} t^q A_q(x, \frac{\partial}{\partial x}) \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

où B_p sont des opérateurs différentiels en x d'ordre 2, et A_q des opérateurs différentiels en x d'ordre 1. Posons $C_{2p} = A_p$; $C_{2p+1} = B_p$. Supposons que les solutions $u \in C^\infty(I \times \Omega)$ de l'équation $Lu = 0$ soient de classe G^s dans $I \times \Omega$. Alors

$$\mathcal{A}(C_p) \subset G^s(\Omega) \; .$$

Remarque : Le cas des opérateurs L de la forme $\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} + B_{2m}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ est un résultat de J. L. Lions et E. Magenes [5].

Lemme 3.5 : Soit $s \in [1,+\infty[$ et soit $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que :

(3.4) $\quad \forall K \subset \Omega, \; \exists \, C_K > 0$ t.q. : $\quad \|x^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} u\|_{L^2(K)} \leq C_K^{k+1} k!^s \qquad k \in \mathbb{N}$

et soit $B = x \frac{\partial}{\partial x}$; alors $u \in G^s(B)$.

Lemme 3.6 : Soit la fonction u(x) définie par :

$$u(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

alors $u \in \mathcal{Q}(B)$ et $u \notin \bigcup_{s<1+\frac{1}{\alpha}} G^s(\Omega)$.

Idée de la démonstration du théorème 3.1 : La démonstration se fait par récurrence sur la dimension. En dimension 1, il est facile de voir que si $\mathcal{L}(A_i)$ est de dimension inférieure à d, alors chaque A_i s'écrit

$$A_i = \alpha_i B \qquad \text{où} \quad B = x \frac{\partial}{\partial x}$$

alors les lemmes (3.3), (3.5) et (3.6) donnent le résultat.
Pour passer en dimension supérieure, on utilise la récurrence sur la dimension et le développement en série des A_i.

Idée de la démonstration du théorème 3.2 : P n'étant pas totalement dégénéré, il peut s'écrire sous la forme

$$P = \frac{\partial}{\partial t^2} + \sum_{p\geq o} t^p B_p(x, \frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{q\geq o} t^q A_q(x, \frac{\partial}{\partial x})$$

et on montre que si $\mathcal{L}(X_o, \ldots, X_r)$ n'est pas de rang d, alors l'algèbre de Lie engendrée par la famille (C_p) où $C_{2p} = B_p$ et $C_{2p+1} = A_{p+1}$ n'est pas de rang d. En utilisant alors le théorème 3.1 et la proposition (3.4) on achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi et C. Goualouic : Conférence au séminaire de l'A.M.S., Berkeley (Août 1971).

[2] M. Derridj : Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients analytiques, Séminaire Goulaouic-Schwartz Ecole Polytechnique (Janvier 1971).

[3] M. Derridj et C. Zuily : Régularité analytique et Gevrey pour des opérateurs elliptiques dégénérés (à paraître).

[4] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967), 147-171.

[5] J. L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod 1970, tome 3.

[6] E. Nelson : Analytic vectors, Ann. of Math. 70 (1959), 572-615.