Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

E. de Giorgi

Solutions analytiques des équations aux dérivées partielles à coefficients constants

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 29, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A29_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

SOLUTIONS ANALYTIQUES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

par E. DE GIORGI

Exposé N° XXIX

24 Mai 1972

Dans la première partie de cet exposé je parlerai d'un exemple de non existence de solutions analytiques dans tout l'espace pour l'équation de la chaleur avec données analytiques. Après je parlerai de quelques conjectures, que je crois raisonnables, sur les phénonmènes qui peuvent apparaître dans le cas général.

Dans le travail [1] est énoncée la conjecture qu'il n'existe aucune solution analytique pour l'équation

(1) $$Eu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,t),$$ où

(2) $$f = \sum_{h,k}^{1,\infty} f_{hk}$$

(3) $$f_{hk} = \exp\left[\gamma_{hk}(ix + ih^2 t - (y-h)^2 - 1)\right]$$

(4) $$\gamma_{hk} = ((p(h)^k)!)!$$

(5) $$p(1) = 3, p(2) = 5, p(3) = 7, \ldots$$

$p(h)$ est le $(h+1)$-ième nombre premier.

Une démonstration complète de cette conjecture va paraître dans une publication prochaine de L. Piccinini. Ici je donnerai seulement les lignes générales de cette démonstration : on raisonne par l'absurde; on suppose l'existence d'une fonction u holomorphe dans un ouvert $A \subseteq \mathbb{C}^3$ et on suppose que l'on a $\mathbb{R}^3 \subseteq A$ et que, dans tout $\mathbb{R}^3$, l'équation (1) est satisfaite; on peut alors trouver un nombre positif p tel que

$$\{(x,y,t) \in \mathbb{C}^3;\ |x| + |y| + |t| \leq 3p\} \subseteq A;$$

on considère les fonctions w_{hk} déterminées par les conditions suivantes :

(6) $$\begin{cases} Ew_{hk} = f_{hk} \\ |w_{hk}| \leq \exp\,(-\gamma_{hk}) \\ \lim\limits_{y \to \pm\infty} w_{hk}(x,y,t) = 0 \end{cases}$$

et la série $w = \sum\limits_{h,k}^{1,\infty} w_{hk}$.

On considère aussi les fonctionnelles linéaires b_{hk} données par la formule

(7) $$b_{hk}(g) = \int_{-p}^{p} \frac{\partial^{\gamma(h,k)}}{\partial x^{\gamma(h,k)}}\, g(0,0,t).\exp\,[-h^2\gamma(h,k)[\frac{t^2}{2p} + it]]dt.$$

On prouve les relations suivantes :

(8) $$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\log|b_{hk}(w_{hk})|}{\gamma(h,k)} - \log\,\gamma(h,k)\right) = -(h+\frac{3}{4})\ ;$$

(9) $$\lim_{k\to\infty} \sup \left(\frac{\log|b_{hk}(u)|}{\gamma(h,k)} - \log\,\gamma(h,k)\right) \leq -(\frac{h^2p}{2}+\log\,p);$$

(10) $$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\log|b_{hk}(w-w_{hk})|}{\gamma(h,k)} - \log\gamma\,(h,k)\right) = -\infty;$$

(11) $$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\log|b_{hk}(w-u)|}{\gamma(h,k)} - \log\,\gamma(h,k)\right) = -\infty;$$

les relations (8) (9) (10) (11) ne sont pas compatibles pour h très grand.

<u>Remarque 1</u> : Pour démontrer (9) on peut faire une décomposition du type

$$\int_{-p}^{+p} \cdots = \int_{-p}^{-p-ip} \cdots\cdots + \int_{-p-ip}^{p-ip} \cdots + \int_{p-ip}^{p}$$

dans l'intégrale (7).

<u>Remarque 2</u> : On peut choisir plusieurs définitions des b_{hk} telles que des conditions du type (8) (9) (10) (11) soient satisfaites.

Par le contre-exemple énoncé on voit que pour assurer que l'équation $E(u) = f$ a des solutions analytiques, il est nécessaire de faire des hypothèses raisonnables sur la fonction analytique f; ici, je vais considérer un type particulier d'hypothèses qui sont en relation très étroite avec les résultats et les méthodes de [1] et [2]. A ce propos je rappelle le résultat de [1] (dans une forme à peine plus faible mais plus simple que la forme originale) :

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction analytique; alors il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et une mesure ν qui satisfont les conditions suivantes</u> :

$$E \cap \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; \tau = 0\} = \emptyset$$

$$\mathrm{Supp}\ \nu \subseteq E$$

$$f(x) = \int_E (|x - \xi|^2 + |\tau|^2)^{-\frac{n}{2} - 1} \, d\nu(\xi,\tau). \tag{12}$$

Ce théorème suggère la définition suivante :

<u>Définition 1</u> : <u>Soient un polynôme $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et un ensemble fermé $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; je dirais que E est P-compatible si, pour chaque mesure ν avec supp $\nu \subseteq E$, il existe une solution analytique dans $\mathbb{R}^n$ de l'équation</u>

$$P(D)u = f \tag{13}$$

<u>où f est donnée par (12) et où on note $D = (D_1, \ldots, D_n)$ et $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$</u> .

Conjecture 1 : Si $P(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, alors on a cette condition nécessaire et suffisante pour que $E \subset \mathbb{R}^4$ soit P-compatible : pour chaque $h \in \mathbb{N}$,

(14) $$\operatorname{dist}\,(E;\{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^4 ;\ \tau = 0,\ |\xi_3| \le h\}) > 0$$

Si on arrive à prouver la conjecture 1, on peut passer à la

Conjecture 2 : Soit un polynôme $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$; il existe un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ avec la propriété suivante :
Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ est P-compatible si et seulement si, pour chaque $h \in \mathbb{N}$, on a

(15) $$\operatorname{dist}\,(E;\{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \tau = 0,\ \operatorname{dist}\,(\xi,S) \le h\}) > 0.$$

Remarque 3 : Si on considère les solutions analytiques de (13), non dans l'espace l'espace $\mathbb{R}^n$ mais dans un ouvert $A \subseteq \mathbb{C}^n$, on peut parler d'ensembles (A,P)-compatibles.

On peut aussi faire alors les conjectures suivantes :

Conjecture 3 : Si l'ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ est P-compatible, il existe un ouvert $A \subset \mathbb{C}^n$ tel que l'on ait $\mathbb{R}^n \subset A$ et que l'ensemble E soit (A,P)-compatible.

Conjecture 4 : Soit A un ouvert de $\mathbb{C}^n$; une condition suffisante pour que l'ensemble E soit (A,P)-compatible est la suivante : pour chaque point $\eta \in E$, l'ensemble $\{\eta\}$ est (A,P)-compatible.

<u>Remarque 4</u> : Je crois que si on arrive à démontrer les conjectures 1, 2, 3, 4, ou à démontrer qu'une (ou plusieurs) de ces conjectures est fausse, on aura fait un bon progrès dans l'étude des solutions analytiques des équations à coefficients constants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. De Giorgi, L. Cattabriga : Una formula di rappresentazione per funzioni analitiche in R^n; Boll. Un. Mat. It. (4),4 (1971) p. 1010-1014.

[2] E. De Giorgi, L. Cattabriga : Una dimostrazione diretta dell' esistenza di soluzioni analitiche nel piano reale di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti; Boll. Un. Mat. It. (4), 4 (1971) p. 1015-1027.

[3] T. Kawai : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations I, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] L. Puccinini : Article à paraître.
