L. Boutet de Monvel

Utilisation des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs trace dans certains problèmes aux limites

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

UTILISATION DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET DES OPERATEURS TRACE DANS CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé N° I

13 Octobre 1971

Dans ces exposés, nous passons en revue un certain nombre de constructions que permettent de faire les opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs associés pour l'étude de problemes aux limites.

Pour commencer nous développons, en reprenant une définition de S. Lojasiewicz, une théorie des traces d'une distribution, qui permettra de parler de la trace sur une sous-variété de codimension 1 (ici le bord R^{n-1} du demi-espace R^n_+) dans un grand nombre de cas où elle n'est pas définie a priori.

Dans une deuxième partie nous passons en revue le calcul pseudo différentiel sur une variété à bord (ici le demi-espace R^n_+) et donnons quelques exemples et applications.

Le contenu de ces exposés a déjà été présenté à Rome (congrès sur les équations hypoelliptiques, Janvier 1971), et en partie à Bordeaux (congrès d'analyse fonctionnelle, Avril 1971).

§ 1. TRACES D'UNE DISTRIBUTION

La définition suivante est due à S. Lojasiewicz [10]. Elle vaut aussi pour les distributions à valeurs dans un espace localement convexe.

1.1 Définition : Soit f une distribution sur la demi-droite R_+. On dit que f est nulle à l'origine si $f(tx)$ tend vers 0 (dans $\mathcal{D}'(R_+)$) quand t tend vers +0.

Nous noterons $\overset{o}{E}$ l'espace des distributions nulles à l'origine. Il s'identifie naturellement a un sous espace de l'espace $C(\overline{R}_+,\mathcal{D}'(R_+))$ des fonctions continues $[0,\infty[\to\mathcal{D}'(R_+)$.

Nous noterons encore $\overset{o}{\mathcal{E}}(R_+)$ l'espace des distributions $f\in\mathcal{D}'(R)$ portées par $\overline{R}_+$ telles que $f(tx)\to 0$ quand t tend vers 0.

Si $f(x)$ est une fonction continue pour $x \geq 0$, nulle à l'origine, c'est évidemment un élément de $\overset{\circ}{E}$. Si $f \in \overset{\circ}{E}$, il en est de même de $(\frac{\partial}{\partial x})^k x^k f$ pour tout entier $k \geq 0$ (car l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x})^k x^k$ est continu dans $\mathcal{D}'$ et commute aux **homothéties** $(x \to tx)$. Inversement

1.2 <u>Proposition</u> : Soit $f \in \overset{\circ}{E}$. Il existe un entier N et une fonction continue **g**, nulle **à** l'origine, tels que $f = (\frac{\partial}{\partial x})^N x^N g$ au voisinage de 0.

Preuve (repris de [5]) : l'ensemble des $f(tx)$ $(t \leq 1)$ est borné dans $\mathcal{S}'(R_+)$. Alors si I est un intervalle relativement compact de R_+, l'ensemble des restrictions $f(tx)/I$ est déjà borné (et tend vers 0) dans un espace de distributions d'ordre fini sur I.

Choisissons une fonction C^∞ φ, nulle pour $x < 1/4$, et égale à 1 pour $x > 1/2$. Posons

$$g(x) = - \int_1^\infty \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} t^{-2n} \varphi(1/t) f(tx)\, dt =$$

$$= - x^n \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} t^{-2n} \varphi(x/t) f(t)\, dt$$

(l'intégrale représente la dualité entre fonctions et distributions). Si n est assez grand, g est bien définie pour $x \leq 1$; et c'est une fonction continue qui tend vers 0 avec x. Or on a

$$f = x^{2n}(\frac{\partial}{\partial x})^n x^{-n} g + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \int_1^\infty \frac{(t-1)^{p-1}}{(p-1)!} t^{-2n-p} \varphi^{(p)}(1/t) f(tx) dt$$

Comme $x^{2n}(\frac{\partial}{\partial x})^n x^{-n}$ est combinaison linéaire des $(\frac{\partial}{\partial x})^k x^k$ $(k \leq n)$ et comme les termes de la somme sont des fonctions continues qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 (pour $p \geq 1$ la fonction $(t-1)^{p-1} \ldots \varphi^{(p)}(1/t)$ est C^∞ à support compact dans $]1,\infty[$, puisque $\varphi^{(p)}$ est nulle au voisinage de 1), la proposition est démontrée.

(L'espace $\overset{\circ}{E}$ est complet ; il n'est pas nucléaire ni même de Montel. Cependant on vérifie sans peine qu'il est bornologique, et qu'une partie de $\overset{o}{E}$ est bornée si et seulement si elle est bornée dans $\mathcal{D}'$ et si on peut choisir N (comme dans 1.2) de sorte que l'unique $g \in \overset{o}{F}$ telle que $f = (\frac{\partial}{\partial x})^N x^N g$ parcourre un ensemble borné de fonctions continues tendant vers 0 à l'origine (sur un intervalle borné I) quand f parcourt cet ensemble. Ces fonctions g n'ont toutefois aucune raison de tendre vers 0 uniformément, même si on a choisi N très grand).

Si $f \in \overset{o}{E}$, on voit en prolongeant g par 0 dans 1.2 qu'elle possède un prolongement $\tilde{f} \in \overset{o}{\mathcal{E}}$ (de sorte que l'application de restriction $\overset{o}{\mathcal{E}} \to \overset{o}{E}$ est bijective).

Pour les distributions de plusieurs variables, on est conduit aux définitions et généralisations suivantes, où on note le point de R^n $x = (y,t)$, avec $y \in R^{n-1}$, $t \in R$, R^n_+ désigne le demi-espace $t > 0$, et k est un entier positif ou négatif :

1.3 <u>Définition</u> : on note $\overset{o}{E}_k(R^n_+)$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(R^n_+)$ telles que $s^{-k} f(y,st)$ tende vers 0 quand s tend vers +0.
On note $E_k(R^n_+)$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(R^n_+)$ qui admettent une décomposition : $f = \sum_0^k \frac{1}{l!} a_l(y)\, t^l + r(y,t)$ où les a_l sont des distributions arbitraires, et $r \in \overset{o}{E}_k$.

On notera encore $\overset{o}{\mathcal{E}}_k$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ nulles pour $t < 0$ telles que $s^{-k} f(y,st) \to 0$ quand $s \to +0$, et $\mathcal{E}_k$ l'espace des sommes des précédentes et de distributions de la forme $\sum a_l(y)\, t^l_+$, où t_+ désigne la partie positive de t, et par abus de notation on convient que t^0_+ vaut 1 pour $t > 0$, et 0 pour $t < 0$.

Si $f \in E_k$, on posera $Tr(\frac{\partial^k f}{\partial t^k}) = \gamma_k(f) = a_k$

(Pour $k < 0$, la somme qui définit E_k est vide, et on a $E_k = \overset{o}{E}_k$).

On prouve exactement comme ci-dessus que si $f \in \overset{o}{E}_k$, pour tout compact de R^n il existe un entier N est une distribution $g(y,t)$ continue en t[(•)], nulle pour $t<0$, tels que $f = (\frac{\partial}{\partial t})^N t^{N+k} g$ au voisinage de $K \cap R^n_+$. Il en résulte que l'application de restriction au demi-espace $R^n_+ : \mathcal{E}_k \to E_k$ est surjective (elle est injective pour $k \geq -1$, mais pas pour $k \leq -2$).

On a aussi le résultat suivant : si $f \in \overset{o'}{E}_k$, pour tout compact K de R^n il existe un entier M et une fonction de classe C^k, nulle pour $t<0$, g, tels que $f = \Delta'^M (\frac{\partial}{\partial t})^M t^M g$ au voisinage de $K \cap R^n_+$ (Δ' désigne le Laplacien de R^{n-1}) (il suffit en effet d'intégrer un nombre suffisant de fois par rapport à y, et de remplacer la fonction g de la formule précédente par la fonction $t^{-M} \int_o^t \frac{(t-u)^{M-N-1}}{(M-N-1)!} u^{N+k} g(y,u)du$, qui est de classe C^k si M est assez grand).

Notons ici les deux résultats suivants (évidents)

(1.4) on a $t^m E_k \subset E_{k+m}$

(1.5) on a $(\frac{\partial}{\partial t})^m E_k \subset E_{k-m}$

Nous dirons qu'un opérateur différentiel P à coefficients C^∞ est de classe m si dans sa décomposition

$$P = \Sigma\, a_r(x, \frac{\partial}{\partial y}) (\frac{\partial}{\partial t})^r$$

le coefficient $a_r(x,\frac{\partial}{\partial x})$ de $(\frac{\partial}{\partial t})^r$ s'annule à l'ordre $r+m$ (au moins) pour $t = 0$. Il revient au même de dire que pour toute fonction $C^\infty f$, Pf est nulle à l'ordre $r+m$ si f est nulle à l'ordre r, pour $t = 0$.

Conjugant (1.4) et (1.5) on voit que si P est de classe m, on a $P\, E_k \subset E_{k+m}$.

(•) ie. g provient d'une fonction continue : $t \to g(y,t)$ de R dans $\mathcal{S}'(R^{n-1})$.

Si f est de classe C^k, elle est évidemment dans E_k, ainsi que Pf si P est de classe 0. Alors toute $f \in \overset{o}{E}_k$ est somme de distributions de la forme $P_j f_j$ où P_j est de classe 0 et f_j est de classe C^k. (On l'a vu si $f \in \overset{o}{E}_k$, et c'est évident pour une distribution de la forme $a(y)\ t^r$) ; comme la propriété d'être de classe 0, pour un opérateur différentiel, ne dépend pas des coordonnées choisies, l'espace E_k (et l'espace $\overset{o}{E}_k$) est invariant par changement de coordonnées (pourvu que ce changement de coordonnées respecte le bord R^{n-1}).

(1.4) n'admet pas de réciproque (ie. t $f \in E_k$ n'implique pas $f \in E_{k-1}$). Mais la réciproque de (1.5) est vraie, et plus généralement

1.6 <u>Proposition</u> : Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre m. On suppose que l'hyperplan R^{n-1} est non caractéristique pour P. Alors si f est une distribution prolongeable sur R^n_+ et si $P\,f \in E_k$, on a $f \in E_{k+m}$.

<u>Preuve</u> : on va montrer que si $f \in E_r$ avec $r < k+m$, on a encore $f \in E_{r+1}$. Comme on a de toute facon $f \in E_r$ pour r assez petit si f est prolongeable (ie. restriction au demi-espace R^n_+ d'une distribution définie sur R^n tout entier), ceci démontrera la proposition. Posons $P = a_o(x)\ (\frac{\partial}{\partial t})^m + Q$, où Q est de degré $m-1$ en $(\frac{\partial}{\partial t})$, donc de classe $m-1$. Si $f \in E_r$, on a $Qf \in E_{r-m-1}$, $P\,f \in E_k$, et comme $k \leq r-m+1$, $a_o(x)\ (\frac{\partial}{\partial t})^m f$ et $(\frac{\partial}{\partial t})^m f$ (puisque a_o ne s'annule pas pour $t = 0$) sont dans E_{r-m+1}.

Il suffit donc de prouver que $\frac{\partial f}{\partial t} \in E_r$ implique $f \in E_{r+1}$. Et en effet si $\frac{\partial f}{\partial t} = \Sigma\, a_s(y)\ t^s + (\frac{\partial}{\partial t})^N\ t^{N+k}\ g$ où g est continue en t, nulle pour $t = 0$, et $N > 0$ (ce qu'on peut toujours supposer), on a

$$f = \Sigma\ \frac{a_s(y)}{s+1}\ t^{s+1} + (\frac{\partial}{\partial t})^{N-1}\ t^{N+k}\ g + \text{constante, donc } f \in E_{r+1}.$$

<u>Exemples</u> : si f admet une trace sectionnelle (ie. f est définie par une fonction continue : $t \in R \to f(y,t) \in \mathcal{D}'(R^{n-1})$), alors $f \in E_o$.

En particulier si le front d'ondes de f est disjoint du fibré normal du bord R^{n-1}, alors $f \in E_\infty = \cap E_k$ (c'est le cas si P f est une fonction C^∞, où P est un opérateur différentiel et le bord R^{n-1} est non caractéristique). (cf. [7]).

Cependant il se peut parfaitement qu'on ait $f \in E_\infty$ sans que f ait de limite pour $t \to 0$. C'est le cas par exemple de la fonction sin $1/x$.

On a $t^{1/p} L^p \subset E_0$ (on le voit en estimant la primitive de $t^{1/p} f$ pour $f \in L^p$). Il s'ensuit plus généralement qu'une distribution de la forme

$$f = \Sigma \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-m} t^{k+1/p} g_{k,\alpha}$$

est dans E_m si les $g_{k,\alpha}$ sont dans L^p. $(1 \leq p < \infty)$.