

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. GRUBB

Caractérisation de quelques propriétés des problèmes aux limites pour les systèmes elliptiques : problèmes aux limites variationnel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 19 bis,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972___A19_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

CARACTERISATION DE QUELQUES PROPRIETES DES PROBLEMES AUX LIMITES
POUR LES SYSTEMES ELLIPTIQUES :
PROBLEMES AUX LIMITES VARIATIONNELS.

par G. GRUBB

Exposé N° 19 bis

3 Mars 1972

Cette conférence est la suite de l'exposé n° XIX et a été donnée le 3 Mars 1972 dans le cadre du séminaire Lions-Brézis à l'Université de Paris VI.

§ 7. Nous reprenons ici l'étude de l'inégalité (6), en particulier sa relation avec les formes sesquilinéaires intégral-différentielles (cf. p. XIX.3). L'association de A avec une forme intégral-différentielle n'a un sens que si $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, ou si on se borne à des considérations locales. D'autre part, nos résultats seront valables pour un opérateur A quelconque, d'ordre $2m$. (Le résultat principal n'a pas encore été publié ailleurs.)

Nouvelles hypothèses : $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, et Γ est la frontière de Ω dans \mathbb{R}^n . Les fibrés sont triviales, c'est-à-dire

$$E = \bar{\Omega} \times \mathbb{C}^q ; F_j = \Gamma \times \mathbb{C}^{q_j}, j \in J.$$

A est un opérateur différentiel linéaire d'ordre $2m$ quelconque, à coefficients C^∞ sur $\bar{\Omega}$. Nous supposons que B est normal (voir p. XIX.2) mais ne mettons aucune restriction ultérieure sur $\sum_{j \in J} q_j$. Nous posons désormais

$$(22) \quad D(A_B) = \{u \in H^{2m}(\Omega)^q \mid B_\rho u = 0\}.$$

Par une forme sesquilinéaire nous entendons une forme intégral-différentielle.

$$(23) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} D^\beta u \overline{D^\alpha v} dx,$$

où les $a_{\alpha\beta}$ sont des $q \times q$ -matrices de fonctions dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Définition 1 : Une forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est dite associée à A, si

$$(24) \quad (Au, v) = a(u, v), \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega)^q,$$

c'est-à-dire

$$(25) \quad A = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha a_{\alpha\beta} D^\beta \quad \bullet$$

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire associée à A , et soit V un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)^q$, contenant $H_0^m(\Omega)^q$. Alors $a(u, v)|_V$ définit un certain opérateur \tilde{A} dans $L^2(\Omega)^q$, satisfaisant à

$$(\tilde{A}u, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in D(\tilde{A})$$

(voir [12]: ch.2.9, pour des détails ultérieurs). \tilde{A} opère comme A ; et si V est défini par des conditions au bord normales, \tilde{A} est en effet de la forme A_B . Nous allons étudier la question :

Problème II : Pour quels choix de B (et de A) existe-il une forme sesquilinéaire $a_B(u, v)$ telle que

$$(26) \quad (Au, v) = a_B(u, v), \quad \forall u, v \in D(A_B) ?$$

Définition 2 : Nous appelons A_B variationnel, quand il existe a_B telle que (26) a lieu.

(26) entraîne en particulier

$$(27) \quad |(Au, v)| \leq c \|u\|_m \|v\|_m, \quad \forall u, v \in D(A_B),$$

parce que $a_B(u, v)$ est continue sur $H^m(\Omega)^q \times H^m(\Omega)^q$.

Notons que (27) entraîne (6).

• On note $D^\alpha = (i^{-1}\partial/\partial X_1) \dots (i^{-1}\partial/\partial X_n)$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$; et $D_t = i^{-1}\partial/\partial n$ (dérivée normale intérieure).

§ 8. Dans ce paragraphe, nous reprenons la formule de Green (1) de Seeley [14] de façon plus détaillée, et étudions aussi la "demi-formule de Green" pour A et une forme sesquilinéaire associée $a(u,v)$.

Sur Γ , A s'écrit sur la forme

$$(28) \quad A = A_{2m} D_t^{2m} + A_{2m-1} D_t^{2m-1} + \dots + A_0,$$

où les A_k sont des opérateurs différentiels sur Γ , d'ordres $2m-k$, respectivement. En particulier, A_{2m} est une fonction ($q \times q$ -matricielle).

Nous observons que Γ est non-caractéristique pour A au point $y \in \Gamma$, si et seulement si $A_{2m}(y)$ est inversible.

Proposition 2 : Soit A' l'adjoint formel de A. On a pour $u, v \in H^{2m}(\Omega)^q$

$$(29) \quad \int_{\Omega} (Au \bar{v} - u \overline{A'v}) dx = \int_{\Gamma} \mathcal{C} \rho u \cdot \overline{\rho v} d\sigma,$$

où \mathcal{C} est la $M \times M$ -matrice (de $q \times q$ -matrices)

$$(30) \quad \mathcal{C} = i \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & \dots & A_{2m} \\ & A_{2,2} & & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & A_{2m} & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $A_{1,k} = A_1 +$ opérateur différentiel d'ordre inférieur à $2m-k$.

La formule (29) est immédiate quand $\Omega = \overline{\mathbf{R}}_+^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$

(notation $x = (y, t)$). On ramène le cas général à celui-là par utilisation de bonnes coordonnées locales.

On voit que Q est inversible (son invers étant encore un opérateur différentiel) exactement quand Γ est non-caractéristique pour A . Nous allons écrire, pour $\delta, \varepsilon = 0, 1$

$$(31) \quad (a_{jk})_{j \in M_\delta, k \in M_\varepsilon} = \alpha_{M_\delta, M_\varepsilon} \text{ ou, très abrégé, } = \alpha_{\delta\varepsilon};$$

alors (29) prend la forme, après insertion de $\rho u = [\gamma u, \nu u]$

$$(32) \quad (Au, v) - (u, A'v) = \langle \alpha_{01} \nu u, \gamma v \rangle + \langle \alpha_{00} \gamma u, \gamma v \rangle + \langle \alpha_{10} \gamma u, \nu v \rangle,$$

où nous avons noté par $(\ , \)$ la dualité dans $L^2(\Omega)^q$ et par $\langle \ , \ \rangle$ la dualité (et ses extensions) dans $L^2(\Gamma)^{mq}$.

Proposition 3 : Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire associée à A . Alors on a pour $u, v \in H^{2m}(\Omega)^q$

$$(33) \quad (Au, v) = a(u, v) + \langle \alpha_{01} \nu u, \gamma v \rangle + \langle \mathcal{S} \gamma u, \gamma v \rangle,$$

où $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{jk})_{j, k \in M_0}$ est un opérateur différentiel sur Γ , continu de $\prod_{k \in M_0} H^{m-k-1/2}(\Gamma)^q$ dans $\prod_{j \in M_0} H^{-m+j+1/2}(\Gamma)^q$, c'est-à-dire, de type

$$(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j, k \in M_0}.$$

Démonstration : Posons $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$, alors a^* est associée à A' . Une intégration par parties donne

$$(Au, v) - a(u, v) = \langle \mathcal{R}_1 \nu u, \gamma v \rangle + \langle \mathcal{S}_1 \gamma u, \gamma v \rangle$$

$$(A'v, u) - a^*(v, u) = \langle \mathcal{R}_2 \nu v, \gamma u \rangle + \langle \mathcal{S}_2 \gamma v, \gamma u \rangle$$

(les \mathcal{R}_i de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j \in M_0, k \in M_1}$ et les \mathcal{S}_i de type

$(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j,k \in M_0}$), d'où

$$(Au, v) - (u, A'v) = \langle \mathcal{P}_1 v u, \gamma v \rangle + \langle (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2^*) \gamma u, \gamma v \rangle + \langle \gamma u, \mathcal{L}_2 v v \rangle.$$

Prenant $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^q$ avec $\gamma u = 0$, $vu = \varphi$, $\gamma v = \Psi$, on trouve par comparaison avec (32),

$$\langle \mathcal{A}_{01} \varphi, \Psi \rangle = \langle \mathcal{K}_1 \varphi, \Psi \rangle,$$

d'où $\mathcal{A}_{01} = \mathcal{K}_1$, puisque φ et Ψ peuvent être choisis librement dans $\mathcal{D}(\Gamma)^{mq}$.

D'autre part \mathcal{J} dans (33) peut être n'importe quel opérateur différentiel de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j,k \in M_0}$. Car nous avons

Théorème 7 : Pour tout opérateur différentiel \mathcal{J} sur Γ de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j,k \in M_0}$, il existe une forme sesquilinéaire $s(u, v) =$

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} s_{\alpha\beta} D^{\beta} u \overline{D^{\alpha} v} dx \text{ telle que}$$

$$(34) \quad s(u, v) = \langle \mathcal{J} \gamma u, \gamma v \rangle, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)^q.$$

En particulier, l'opérateur différentiel S sur $\bar{\Omega}$ associé à $s(u, v)$

$$(35) \quad S = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^{\alpha} s_{\alpha\beta} D^{\beta}$$

est nul.

Indication de démonstration : La deuxième partie du théorème est évidente, car $(Su, v) = s(u, v) = \langle \mathcal{J} \gamma u, \gamma v \rangle = 0$ pour tout $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La première partie est démontrée en détail dans [6], voir Proposition 5.1. On généralise la technique du cas plus simple, où $\Omega = \mathbf{R}_+^2$, $m = 1$

(donc $\gamma = \gamma_0$) et $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} u(y,0) \right) v(y,0) dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial y} u(y,t) v(y,t) \right) dt dy \\ &= - \int_{\mathbf{R}_+^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} v + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dy dt, \text{ pour } u, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}_+^2}). \end{aligned}$$

Pour éliminer la dérivation d'ordre 2, nous ajoutons

$$0 = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} v \right) dy = \int_{\mathbf{R}_+^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} v + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dy dt,$$

et obtiendrons

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} \gamma_0 u \gamma_0 v dy = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dy dt, \quad u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega});$$

la formule s'étend par continuité à $H^1(\Omega)$.

Corollaire 1 : Pour tout opérateur différentiel \mathcal{L} sur Γ de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j, k \in M_0}$, il existe $a(u, v)$ associée à A telle que (33) a lieu.

§ 9. Nous reprenons ici le lemme 1, et donnerons la démonstration pour le cas présent, où les fibrés sont triviales (la démonstration s'étend en effet immédiatement au cas non-trivial) :

Lemme 1' : L'opérateur B , continu de $\prod_{k \in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$ dans $\prod_{j \in J} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$ pour tout $s \in \mathbf{R}$, est surjectif et possède une inverse à droite C , opérateur différentiel injectif continu de $\prod_{j \in J} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$ dans $\prod_{k \in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Ecrivons $B = B' + B''$, où B' est la partie "diagonale" de B ,

$$B' = (\delta_{jk} B_{jk})_{j \in J, k \in M}$$

Par nos hypothèses, voir p.XIX.2 en bas, B' est une fonction matricielle C^∞ sur Γ , et pour chaque $y \in \Gamma$, $B'(y)$ définit une application surjective de $\prod_{k \in M} \mathbb{C}^q$ sur $\prod_{j \in J} \mathbb{C}^{q_j}$.

On peut alors définir

$$C'(y) = B'(y)^* (B'(y) B'(y)^*)^{-1},$$

(par rapport au produit scalaire euclidien), qui est une fonction matricielle C^∞ sur Γ , envoyant $\prod_{j \in J} \mathbb{C}^{q_j}$ injectivement dans $\prod_{k \in M} \mathbb{C}^q$ pour chaque

$y \in \Gamma$, et ayant la propriété

$$B'(y) C'(y) \text{ est l'identité dans } \prod_{j \in J} \mathbb{C}^{q_j}$$

Observons maintenant que l'opérateur $C'B''$ dans $\prod_{k \in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$

est nilpotent, parce qu'il a des zéros dans, et au-dessus de, la diagonale. En utilisant $B = B' + B''$, on obtient finalement que l'opérateur différentiel

$$C = \sum_{k=0}^{2m} (-C'B'')^k C'$$

satisfait à : $BC = \text{identité sur } \prod_{j \in J} H^{s-k}(\Gamma)^{q_j}, \forall s \in \mathbb{R}$.

Avec la notation habituelle, nous avons aussi

Corollaire 2 : $B_{J_0 M_0} C_{M_0 J_0} = I$ et $B_{J_1 M_1} C_{M_1 J_1} = I$ (identités dans $\prod_{j \in J_0} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$, resp., $\prod_{j \in J_1} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$).

Ceci permettra une représentation des valeurs au bord des $u \in D(A_B)$ (cf. (22)) :

Lemme 3 : Les valeurs au bord $[\gamma u, \nu u]$ qui s'obtiennent quand u parcourt $D(A_B)$ sont exactement ceux de la forme

$$(36) \quad \gamma u = (I - C_{M_0 J_0} B_{J_0 M_0}) \varphi$$

$$(37) \quad \nu u = (I - C_{M_1 J_1} B_{J_1 M_1}) \psi - C_{M_1 J_1} B_{J_1 M_0} \gamma u,$$

où $[\varphi, \psi]$ parcourt $\prod_{k \in M_0} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k \in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$.

Démonstration : Quand $u \in D(A_B) (\subset H^{2m}(\Omega)^q)$, $\gamma u \in \prod_{k \in M_0} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$ et

satisfait à (3)^{*}; donc $\gamma u = \gamma u - C_{00} B_{00} \gamma u = (I - C_{00} B_{00}) \gamma u$. De même, $\nu u \in \prod_{k \in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$, et (3) entraîne

$$\nu u = (I - C_{11} B_{11}) \nu u + C_{11} B_{11} \nu u = (I - C_{11} B_{11}) \nu u - C_{11} B_{10} \gamma u.$$

D'autre part, quand $[\varphi, \psi]$ est donné, on vérifie en utilisant coroll.2 que $\chi = (I - C_{00} B_{00}) \varphi$ et $\eta = (I - C_{11} B_{11}) \psi - C_{11} B_{10} \chi$ satisfont aux équations

$$B_{00} \chi = 0$$

$$B_{10} \chi + B_{11} \eta = 0.$$

* voir p.9

Ici $[\chi, \eta] \in \prod_{k \in M_0} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k \in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$, et il

est bien connu (voir e.g. [12]) qu'il existe $u \in H^{2m}(\Omega)^q$ avec $[\gamma u, \nu u] = [\chi, \eta]$.

§ 10. Finalement, on résoud le problème II, et (6).

Théorème 8 : Soit A un opérateur différentiel d'ordre $2m$ sur $\bar{\Omega}$, et soit A_B la réalisation de A défini par (22). Les trois conditions

(i) - (iii) sont équivalentes :

(i) A_B est variationnel.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Re}(Au, u) \geq -\lambda \|u\|_m^2$ pour $u \in D(A_B)$.

(iii) L'opérateur $(I - C_{M_0 J_0} B_{J_0 M_0})^* C_{M_0 M_1} (I - C_{M_1 J_1} B_{J_1 M_1})$ est nul.

Démonstration : Nous avons déjà remarqué que (i) implique (ii), de manière évidente.

Montrons alors (ii) \Rightarrow (iii). Choisissons arbitrairement une forme sesquilinéaire $a_0(u, v)$ associée à A . Alors, par la proposition 3 :

$$(38) \quad (Au, v) = a_0(u, v) + \langle Q_{01} \nu u, \gamma v \rangle + \langle \mathcal{S}_0 \gamma u, \gamma v \rangle, \quad \forall u, v \in H^{2m}(\Omega)^q, \text{ où}$$

\mathcal{S}_0 est de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j, k \in M_0}$. Donc

$$(39) \quad |\langle \mathcal{S}_0 \gamma u, \gamma v \rangle| \leq \| \mathcal{S}_0 \gamma u \|_{\{-m+k+1/2\}} \| \gamma u \|_{\{m-k-1/2\}}$$

$$\leq c \| \gamma u \|_{\{m-k-1/2\}} \| \gamma v \|_{\{m-k-1/2\}} \leq c_1 \| u \|_m \| v \|_m.$$

♦ Avec la notation $B_{J \varepsilon M_\delta} = B_{\varepsilon \delta}$, (3) s'écrit : $B_{00} \gamma u = 0$, $B_{10} \gamma u + B_{11} \nu u = 0$.

Puisque $a_0(u, v)$ est aussi continue sur $H^m(\Omega)^q \times H^m(\Omega)^q$, (ii)

implique

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_{01} \nu u, \gamma u \rangle \geq -\lambda_1 \|u\|_m^2, \quad \forall u \in D(A_B).$$

Pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u + w$ appartient à $D(A_B)$ et donc

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_{01} \nu u, \gamma u \rangle \geq -\lambda_1 \|u + w\|_m^2, \quad \forall u \in D(A_B), w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particulier,

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_{01} \nu u, \gamma u \rangle \geq -|\lambda_1| \inf_{w \in \mathcal{D}(\Omega)} \|u + w\|_m^2, \quad \forall u \in D(A_B),$$

d'où

$$(40) \quad \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_{01} \nu u, \gamma u \rangle \geq -\lambda_2 \|\gamma u\|_{\{m-k-1/2\}}^2, \quad \forall u \in D(A_B),$$

par un théorème bien connu (voir e.g. [12]). Par utilisation du lemme 3 nous avons

$$(41) \quad \langle \mathcal{A}_{01} \nu u, \gamma u \rangle = \langle \mathcal{A}_{01} (I - C_{11} B_{11}) \Psi, (I - C_{00} B_{00}) \varphi \rangle - \langle \mathcal{A}_{01} C_{11} B_{10} \gamma u, \gamma u \rangle.$$

Ici, $\mathcal{A}_{01} C_{11} B_{10}$ est de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j, k \in M_0}$ tel qu'une

estimation comme (39) s'applique au dernier terme de (41); alors (40) entraîne, après quelques réductions :

$$(42) \quad \operatorname{Re} \langle (I - C_{00} B_{00})^* \mathcal{A}_{01} (I - C_{11} B_{11}) \Psi, \varphi \rangle \geq -\lambda_3 \|\varphi\|_{\{m-k-1/2\}}^2$$

pour tout $[\varphi, \Psi] \in \prod_{k \in M_0} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k \in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$. Cela ne peut

être vrai que si

$$(43) \quad (I - C_{00} B_{00})^* C_{01} (I - C_{11} B_{11}) = 0,$$

ce qui prouve (iii).

Montrons finalement (iii) \Rightarrow (i). Quand (iii) est vrai, (38) a la forme, pour $u, v \in D(A_B)$ (cf. (41))

$$(44) \quad \begin{aligned} (Au, v) &= a_0(u, v) + \langle \mathcal{J}_0 \gamma u, \gamma v \rangle - \langle C_{01} C_{11} B_{10} \gamma u, \gamma v \rangle \\ &= a_0(u, v) + \langle (\mathcal{J}_0 - C_{01} C_{11} B_{10}) \gamma u, \gamma v \rangle. \end{aligned}$$

Le théorème 7 donne l'existence d'une forme sesquilinéaire $s(u, v)$ coïncidante avec le dernier terme pour $u, v \in H^m(\Omega)^q$. Prenant $a_B(u, v) = a_0(u, v) + s(u, v)$ on obtient

$$(45) \quad (Au, v) = a_B(u, v), \quad \forall u, v \in D(A_B).$$

Q.E.D.

Remarque 1 : La démonstration entraîne aussi que (45) est valable pour $u \in D(A_B)$ et $v \in V$, où

$$(46) \quad V = \{v \in H^m(\Omega)^q \mid B_{j_0} M_{j_0} \gamma v = 0\}.$$

Remarque 2 : On peut donner une démonstration un peu plus directe (toujours fondée sur §8 et §9) de l'équivalence entre (i) et (iii). Nous avons inclu la condition (ii) parce qu'elle rend la discussion plus intéressante, à notre avis.

La démonstration de (ii) \Rightarrow (iii) est encore valable (et (iii) \Rightarrow (ii) est conséquence directe de (44)) si les B_{jk} avec $j > k$ sont permis d'être pseudo-différentiels d'ordres $j-k$. Dans ce cas,

la question de (i) n'a pas beaucoup de sens, parce que les opérateurs pseudo-différentiels sur Γ ne se prolongent en général pas à des opérateurs pseudo-différentiels sur $\bar{\Omega}$.

Remarque 3 : Quand Γ est non-caractéristique pour A , il résulte de la caractéristique triangulaire de \mathcal{Q} et B , que (iii) entraîne

$$\sum_{j \in J} q_j \geq mq.$$

De plus, on peut montrer à l'aide du lemme 1 - 1', que si Γ est non-caractéristique pour A , et $\sum_{j \in J} q_j = mq$, alors (iii) est équivalente à

$$B_{J_0 M_0} (\mathcal{Q}_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^* = 0,$$

et le théorème 4 est une conséquence du théorème 8.

Exemple : Quand $q = m = 1$, les A_B sont toujours variationnels. Mais aussitôt que $q > 1$ ou $m > 1$ il y a des restrictions. Prenons le cas où $q = 1, m = 2$:

A est d'ordre 4, et s'écrit près de Γ comme $A = A_4 D_t^4 + A_3 D_t^3 + A_2 D_t^2 + A_1 D_t + A_0$. L'ensemble M est égal à $\{0, 1, 2, 3\}$, et on a, par la formule (30) pour \mathcal{Q} , que

$$\mathcal{Q}_{M_0 M_1} = \begin{pmatrix} iA_{3,1} & iA_4 \\ iA_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons $J = \{1, 3\}$, alors $B_{\text{pu}} = 0$ prend la forme

$$B_{10} \gamma_0 + \gamma_1 u = 0$$

$$B_{30} \gamma_0 u + B_{31} \gamma_1 u + B_{32} \gamma_2 u + \gamma_3 u = 0,$$

où nous avons pris $B_{11} = B_{33} = 1$, par l'hypothèse de normalité. Alors

$$B_{J_0 M_0} = (B_{10} \ 1) , \quad C_{M_0 J_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{J_1 M_1} = (B_{32} \ 1) , \quad C_{M_1 J_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve que théorème 8, (iii) se réduit à

$$(47) \quad A_{3,1} - B_{10}^* A_4 - A_4 B_{32} = 0.$$

1° Dans un point non-caractéristique de Γ , (47) devient

$$(48) \quad B_{32} = -B_{10}^* + A_4^{-1} A_{3,1},$$

une condition assez exigeante sur les deux opérateurs de premier ordre B_{10} et B_{32} .

2° Dans un point caractéristique de Γ , (47) devient

$$A_{3,1} = 0,$$

qui ne demande rien de B , mais impose une condition sur l'opérateur A .

Remarquons que (48) est stable seulement sous des perturbations de A d'ordre ≤ 2 (près de Γ), et des perturbations de $B_{J_1 M_0} = (B_{30} \ B_{31})$.

BIBLIOGRAPHIE (additif à la bibliographie de l'exposé n° XIX)

- [14] R. Seeley : Singular integrals and boundary value problems, Amer. J. Math. 88 (1966), 781-809.
-