

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. GRUBB

Caractérisation de quelques propriétés des problèmes aux limites pour les systèmes elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 19, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A18_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

CARACTERISATION DE QUELQUES PROPRIETES DES PROBLEMES AUX LIMITES
POUR LES SYSTEMES ELLIPTIQUES

par G. GRUBB

Exposé N° XIX

1er Mars 1972

XIX.1

§ 1. Soit $\bar{\Omega}$ une variété compacte C^∞ de dimension n , à bord Γ (nous noterons $\bar{\Omega} \setminus \Gamma = \Omega$) et soit E un fibré vectoriel C^∞ de rang $q \geq 1$ sur $\bar{\Omega}$. On choisit une "dérivée normale" D_t dans E qui définit les opérateurs de trace

$$\gamma_k : u \mapsto D_t^k u|_{\Gamma}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

et on définit convenablement les espaces L^2 et les espaces de Sobolev H^s sur E et sur $E|_{\Gamma}$.

Soit A un opérateur différentiel elliptique dans E , d'ordre $2m$ et à coefficients C^∞ . Notons

$$M = \{0, 1, \dots, 2m-1\}, \quad M_0 = \{0, \dots, m-1\}, \quad M_1 = \{m, \dots, 2m-1\};$$

et $\rho = \{\gamma_k\}_{k \in M}$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k \in M_0}$ et $v = \{\gamma_k\}_{k \in M_1}$. On a la formule de Green

$$(1) \quad (Au, v) - (u, A'v) = (Q\rho u, \rho v), \quad \forall u, v \in C^\infty(E),$$

où Q est une $M \times M$ -matrice $(Q_{jk})_{j,k \in M}$ d'opérateurs différentiels Q_{jk} dans $E|_{\Gamma}$ d'ordres $2m-j-1-k$ (donc nuls pour $2m-j-1 < k$). Notons

$$Q_{M_\alpha M_\beta} = (Q_{jk})_{j \in M_\alpha, k \in M_\beta}, \quad \text{pour } \alpha, \beta = 0, 1.$$

On va considérer les problèmes aux limites définis comme suit : il est donné un ensemble $J \subset M$, et pour chaque $j \in J$ un fibré F_j sur Γ de rang q tel que $\sum_{j \in J} q_j = mq$, et pour tout $(j, k) \in J \times M$ un opérateur différentiel B_{jk} d'ordre $j-k$ allant de $E|_{\Gamma}$ dans F_j . Soit $B = (B_{jk})_{j \in J, k \in M}$ alors on définit la réalisation A_B de A par

$$(2) \quad A_B : u \mapsto Au, \quad D(A_B) = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega), B\rho u = 0\}.$$

XIX.2

Les B_{jk} avec $j < k$ sont nuls; les B_{jj} peuvent être considérés comme des morphismes de $E|_{\Gamma}$ dans F_j . Soit $J_0 = J \cap M_0$, $J_1 = J \cap M_1$, et notons $B_{J_\alpha M_\beta} = (B_{jk})_{j \in J_\alpha, k \in M_\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1$; alors la condition $B_\rho u = 0$ s'écrit

$$(3) \quad \begin{cases} B_{J_0 M_0} \gamma u & = 0 \\ B_{J_1 M_0} \gamma u + B_{J_1 M_1} \nu u & = 0 \end{cases}$$

où $B_{J_0 M_0}$ et $B_{J_1 M_1}$ sont, dans un sens, triangulaires.

Problème : Sous quelles conditions existe-t-il $c > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que

$$(4) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq c \|u\|_m^2 - \lambda \|u\|_0^2, \quad \forall u \in D(A_B) \cap H^m(E)?$$

(l'inégalité "de Gårding"); ou

$$(5) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq -\lambda \|u\|_0^2, \quad \forall u \in D(A_B) ?$$

ou

$$(6) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq -\lambda \|u\|_m^2, \quad \forall u \in D(A_B) \cap H^m(E) ?$$

Ici, (4) exige $\operatorname{Re} \sigma^0(A) > 0$ sur $T^*(\Omega) \setminus 0$ pour être vrai sur $C_0^\infty(E|_\Omega)$; (5) exige au moins $\operatorname{Re} \sigma^0(A) \geq 0$; et (6) est toujours vrai sur $C_0^\infty(E|_\Omega)$. D'après une observation de Seeley [13], (5) + ellipticité de

A entraîne que B est normal dans le sens que tous les B_{jj} sont surjectifs. Nous supposons désormais que ceci a lieu; en particulier $q_j \leq q$ pour tout $j \in J$.

Une condition suffisante pour (4) a été donnée par Agmon [1] et Guedes de Figueiredo [9], portant sur les A_B qui peuvent être définis par une forme sesquilinéaire integro-différentielle (quand $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$). Shimakura et Fujiwara [3] (et l'auteur [5]) ont traité une classe particulière des B , pour $q = 1$.

Quand on regarde le problème aujourd'hui, on pense immédiatement à la méthode de Caldéron, Seeley et Hörmander (voir en particulier [10]), où on ramène des problèmes de régularité à des problèmes analogues pour des opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d.) dans la frontière. Mais, bien qu'on utilise leur résultat fondamental on doit, pour (4)-(6), procéder d'une manière différente; et on trouve qu'il entre, même pour (4), des conditions sur les opérateurs A et B entiers, non seulement sur leur symbole principal. Pour bien montrer ce qu'il se passe, nous esquissons d'abord une théorie abstraite élémentaire des problèmes aux limites généraux (détails dans [4]-[6]), et nous donnerons ensuite l'application -plus compliquée- aux problèmes aux limites concrets. Les nouveaux résultats sont pour la plupart annoncés dans [7] et [8].

§ 2. On désigne par A_1 l'opérateur maximal dans $L^2(E)$ pour A :

$$A_1 : u \mapsto Au; D(A_1) = \{u \in L^2(E) \mid Au \in L^2(E)\};$$

et par A_0 l'opérateur minimal de domaine $D(A_0) = H_0^{2m}(E)$. Les opérateurs linéaires $\tilde{A}$ avec

$$A_0 \subset \tilde{A} \subset A_1$$

sont les réalisations de A ; on désigne par A_γ la réalisation ("de Dirichlet") de domaine $H^{2m}(E) \cap H_0^m(E)$. Nous supposons que

(7) A_γ est un isomorphisme de $D(A_\gamma)$ sur $L^2(E)$,
et supposons aussi, pour simplifier les énoncés, que $A = A'$.

Avec le noyau de A_1 noté $Z(A_1)$,

$$Z(A_1) = \{u \in L^2(E) \mid Au = 0\}$$

on a la décomposition de $D(A_1)$ dans une somme directe topologique

$$(8) \quad D(A_1) = D(A_\gamma) \dot{+} Z(A_1),$$

notée

$$u = u_\gamma + u_\zeta = \text{pr}_\gamma u + \text{pr}_\zeta u,$$

où $u_\gamma = A_\gamma^{-1} Au$, $u_\zeta = u - u_\gamma$. Quand X est un sous-espace de $L^2(E)$, la projection orthogonale de u dans X sera notée u_X .

Théorème 1 : Soit $\tilde{A}$ une réalisation fermée de A . Soient

$$V = \overline{\text{pr}_\zeta D(\tilde{A})}, \quad W = \overline{\text{pr}_\zeta D(\tilde{A}^*)},$$

fermetures dans $Z(A_1)$. L'ensemble $G \subset V \times W$ défini par

$$G = \{[u_\zeta, (Au)_W] \mid u \in D(A)\}$$

est le graphe d'un opérateur $T : V \rightarrow W$, fermé et de domaine dense.

Inversement, soient V et W deux sous-espaces fermés de $Z(A_1)$, et $T : V \rightarrow W$ un opérateur fermé, de domaine dense. Alors T définit une réalisation fermée $\tilde{A}$ de A par

$$(9) \quad D(\tilde{A}) = \{u \in D(A_1) \mid u_\zeta \in D(T), (Au)_W = Tu_\zeta\}.$$

Les deux procédés définissent une correspondance biunivoque entre les réalisations fermées $\tilde{A}$ de A et les triples V, W, T .

Cette correspondance respecte les propriétés que nous étudions, et beaucoup d'autres :

Théorème 2 : Supposons que $\tilde{A}$ correspond à $T : V \rightarrow W$ par le théorème

1. Alors on a :

1° $\tilde{A}^*$ correspond à $T^* : W \rightarrow V$ par le théorème 1.

2° $Z(\tilde{A}) = Z(T)$; et $R(\tilde{A}) = R(T) \dot{+} (L^2(E) \ominus W)$.

3° Quand $Z(\tilde{A}) = Z(T) = 0$, alors

$$(10) \quad \tilde{A}^{-1} = A_{\gamma}^{-1} + T^{(-1)},$$

ou $T^{(-1)}f = T^{-1}(f_W)$ pour $f \in R(\tilde{A})$.

4° Soit $s \in [0, 2m]$. Alors

$$D(\tilde{A}) \subset H^s(E) \Leftrightarrow D(T) \subset H^s(E).$$

5° Supposons de plus que $A_{\gamma} > 0$. Alors

$$(11) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq 0 \text{ pour } u \in D(\tilde{A}) \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz, z) \geq 0 \\ \text{pour } z \in D(T).$$

$$(12) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq c \|u\|_m^2 - \lambda \|u\|_0^2 \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz, z) \geq c \|z\|_m^2 - \lambda \|z\|_0^2 \\ \text{pour } u \in D(\tilde{A}) \cap H^m(E) \quad \text{pour } z \in D(T) \cap H^m(E)$$

$$(13) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq -\lambda \|u\|_m^2 \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz, z) \geq -\lambda \|z\|_m^2 \\ \text{pour } u \in D(\tilde{A}) \cap H^m(E) \quad \text{pour } z \in D(T) \cap H^m(E)$$

On remarque les conséquences : par 1°, les réalisations autoadjointes sont caractérisées par $V = W$ et $T = T^*$. 3° permet l'application de théorèmes de perturbation; nous y reviendrons à la fin de cet exposé.

4° détermine en particulier les réalisations elliptiques, et 5° servira à notre problème. (Dans les articles [4]-[6] nous avons bien d'autres résultats du genre de 5°.).

§ 3. Pour traduire ces résultats en quelque chose qui a lieu sur Γ , nous allons utiliser que, sous l'hypothèse de (7), la théorie de Lions et Magenes [12] implique :

Proposition 1 : Pour tout $s \in \mathbb{R}$, γ définit un isomorphisme (appelé γ_Z) de $\{u \in H^s(E) \mid Au = 0\}$ sur $\prod_{k \in M_0} H^{s-k-1/2}(E|_{\Gamma})$. En particulier

$$(14) \quad \gamma_Z : Z(A_1) \rightarrow \prod_{k \in M_0} H^{-k-1/2}(E|_{\Gamma})$$

est un isomorphisme.

Nous désignerons par H_{γ} l'espace $\prod_{k \in M_0} H^{-k-1/2}(E|_{\Gamma})$ muni de la

norme pour laquelle (14) est une isométrie. On peut déduire de A un certain o.p.s.-d. positif elliptique R , isomorphisme de $\prod_{k \in M_0} H^{-k-1/2}(E|_{\Gamma})$

sur $\prod_{k \in M_0} H^{k+1/2}(E|_{\Gamma})$ pour lequel

$$(15) \quad \|\varphi\|_{H_{\gamma}}^2 = \langle R\varphi, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_{\gamma}$$

voir [6], exemple 6.3.

Avec cette définition, $T : V \rightarrow W$ se traduit en un opérateur $U : X \rightarrow Y$, où

XIX.7

$$(16) \quad X = \gamma V = \gamma \overline{\text{pr}_{\zeta} D(\tilde{A})} = \gamma D(A), \quad Y = \gamma W = \overline{\gamma D(\tilde{A}^*)},$$

(fermetures dans H_{γ}); $D(U) = \gamma D(T)$, et $U = \gamma T \gamma_Z^{-1}$.

Les énoncés du théorème 2 se traduisent de manière évidente, nous ne les répétons pas. (Dans [4]-[6] on a traduit T en un opérateur $L : X \rightarrow Y'$, pour éviter de fixer les normes dans H_{γ} , X et Y ; cela suffit pour les résultats "qualitatifs")

§ 4. Regardons maintenant la réalisation A_B . Nous avons besoin d'un lemme :

Lemme 1 : Quand B est normal B est une surjection de $\prod_{k \in M} H^{s-k}(E|_{\Gamma})$

sur $\prod_{j \in J} H^{s-j}(F_j)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$; et il existe une inverse à droite

$C = (C_{kj})_{k \in M, j \in J}$, opérateur différentiel injectif, continu de

$\prod_{j \in J} H^{s-j}(F_j)$ dans $\prod_{k \in M} H^{s-k}(E|_{\Gamma})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$B_{J_0 M_0} C_{M_0 J_0} = I_{J_0}, \quad B_{J_1 M_1} C_{M_1 J_1} = I_{J_1}$$

(où $I_{J_{\alpha}}$ désigne l'identité dans $\bigoplus_{j \in J_{\alpha}} F_j$).

Dans la démonstration, on utilise le caractère triangulaire de B . A l'aide de ce lemme, on montre assez facilement que (cf. (16) et (1), (2) (3))

$$(17) \quad X = \{\varphi \in H_\gamma \mid B_{J_0 M_0} \varphi = 0\}$$

$$(18) \quad Y = (C_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^* \prod_{j \in J_1} H^{-2m+j+1/2} (F_j).$$

L'opérateur U va de X en Y . Même si on montre que U est une restriction d'un o.p.s.-d. cela ne sert pas à grand chose, car X et Y ne sont pas en général des (produits d') espaces de Sobolev. Cependant on peut montrer, grâce au lemme 1 :

Lemme 2 : (i) Soit $G_1 = \bigoplus_{j \in J_1} F_j$. L'o.p.s.-d. $\Psi = (C_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^* \Xi$,

où $\Xi = (B_{J_1 M_1} C_{M_0 M_1}^{-1} R (C_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^*)^{-1/2}$, définit une isométrie de

$L^2(G_1)$ sur Y ; en outre, $\Psi_1 = \Xi^{-1} C_{M_1 J_1}^* C_{M_0 M_1}^*$ satisfait à $\Psi_1 \Psi = I$.

(ii) De même, il existe un fibré G sur Γ de rang $\sum_{j \in J_1} q_j$

et un o.p.s. -d. Φ injectif continu de $L^2(G)$ dans H_γ , isométrie de $L^2(G)$ sur X , et ayant une inverse à gauche Φ_1 , encore pseudo-différentielle. (Si $X = Y$, on prend $G = G_1$, $\Phi = \Psi$ et $\Phi_1 = \Psi_1$.)

Donc nous pourrions transformer U en un opérateur

$\mathcal{T}: L^2(G) \rightarrow L^2(G_1)$ (où $\mathcal{T} = \Psi_1 U \Phi$). On montre pour $\mathcal{T}$ le résultat fondamental :

Théorème 3 : $\mathcal{T}$ est la réalisation maximale de l'o.p.s.-d. d'ordre $2m$

$$\mathcal{T} = -\Xi (B_{J_1 M_0} + B_{J_1 M_1} P_{\gamma, \nu}) \Phi,$$

où $P_{\gamma, \nu} = \nu \circ \gamma_Z^{-1}$ (o.p.s. -d. sur Γ). $\sigma^0(\mathcal{T})$ dépend seulement de $\sigma^0(B)$ et

de $\sigma^0(A)$ sur Γ .

§ 5. Dans l'application du théorème 2. 5°, on trouve d'abord que $[V \subset W \Rightarrow] X \subset Y \Rightarrow X = Y$, par utilisation du lemme 1 encore une fois. Et $\mathcal{T}$ satisfait alors trivialement à $|\langle \mathcal{T}\varphi, \psi \rangle| \leq c \|\varphi\|_m \|\psi\|_m$. On aura, plus précisément

Théorème 4 : Soient X et Y définis par (17) -(18). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $X \subset Y$; (ii) $X = Y$; (iii) $X \supset Y$;
- (19) (iv) $B_{J_0 M_0} (Q_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^* = 0$;
- (v) $\operatorname{Re}(Au, u) \geq -\lambda \|u\|_m^2$, $\forall u \in D(A_B) \cap H^m(E)$;
- (vi) $|(Au, v)| \leq c \|u\|_m \|v\|_m$, $\forall u, v \in D(A_B) \cap H^m(E)$.

Le théorème est même vrai quand A est un opérateur quelconque d'ordre $2m$ avec Γ non-caractéristique; et il décrit aussi les A_B qui proviennent des formes sesquilineaires.

Quant aux autres inégalités, nous avons

Théorème 5 : (Hypothèses : A elliptique avec $A = A'$, et B normal.) A_B satisfait à l'inégalité de Garding (4) si et seulement si :

- a) $\sigma^0(A) > 0$ sur $T^*(\Omega) \setminus 0$;
- b) $B_{J_0 M_0} (Q_{M_0 M_1}^*)^{-1} B_{J_1 M_1}^* = 0$;
- c) $\operatorname{Re} \sigma^0(\mathcal{T}) > 0$ sur $T^*(\Gamma) \setminus 0$.

Ici, $\operatorname{Re} \sigma^0(\mathcal{T}) > 0$ entraîne en particulier $D(A_B) \subset H^{2m}(E)$.

On a $\operatorname{Re}(A_B u, u) \geq 0$ sur $D(A_B)$ si et seulement si a) et b) ont lieu, et

$$\left| \operatorname{Re}(\mathcal{T}_{\varphi, \varphi}) \geq 0 \text{ sur } D(\mathcal{T}). \right.$$

§ 6. Finalement une application de 3° :

Soit $\sigma^0(A) > 0$, et A_B une réalisation elliptique auto-adjointe, non inférieurement borné (i.e. $\sigma^0(\mathcal{T})$ inversible mais non défini positif). A_B est à spectre discret, et on peut le supposer inversible. Soit $N^\pm(A_B; t)$ le nombre de valeurs propres positifs, resp. négatifs, dans l'intervalle $[-t, t]$. Agmon [2] a montré :

$$(20) \quad N^+(A_B; t) - c(A)t^{n/2m} = o(t^{(n-\theta)/2m})$$

$$(21) \quad N^-(A_B; t) = o(t^{(n-\theta)/2m}),$$

pour tout $\theta < \frac{1}{2}$, $c(A)$ une constante dérivée de $\sigma^0(A)$. (Il paraît être prouvé que Hörmander [11] entraîne la validité de (20)-(21) avec $\theta < 1$, quand $q = 1$ ou les valeurs propres de $\sigma^0(A)$ sont distincts).

Par application du théorème de perturbation de Weyl à (10), ainsi que le fait que $\mathcal{T}$ est un opérateur d'ordre $2m$ sur la variété Γ de dimension $n-1$, nous trouvons

Théorème 6 : Sous les hypothèses ci-dessus,

$$N^-(A_B; t) \leq c_1 t^{(n-1)/2m} + o(t^{(n-1)/2m})$$

où c_1 est une constante dérivée de $\sigma^0(\mathcal{T})$.

D'autre part, on peut, pour tout choix de $B_{J_0 M_0}$ et $B_{J_1 M_1}$

satisfaisant à (19), choisir $B_{J_1 M_0}$ pseudo-différentiel, tel que A_B est elliptique et auto-adjoint, et

$$N^-(A_B; t) \geq ct^{(n-1)/2m}$$

pour c donnée > 0 . Voir [8] pour d'autres résultats sur $N^-(A_B; t)$.

Nous cherchons actuellement à appliquer des idées pareilles à $N^+(A_B; t)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon : The coerciveness problem for integro-differential forms, J. Analyse Math. 6 (1958), 183-223.
- [2] S. Agmon : Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators, Arch. Rat. Mech. An. 28 (1968) 165-183.
- [3] D. Fujiwara et N. Shimakura : Sur les problèmes aux limites stablement variationnels, J. Math. Pures Appl. 49 (1970) 1-28.
- [4] G. Grubb : A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 425-513.
- [5] G. Grubb : Les problèmes aux limites généraux d'un opérateur elliptique provenant de la théorie variationnelle, Bull. So. Math (2ème série) 94 (1970), 113-157.
- [6] G. Grubb : On coerciveness and semiboundedness of general boundary problems, Israel J. Math., 10 (1971), 32-95.
- [7] G. Grubb : Problèmes aux limites semi-bornés pour les systèmes elliptiques, C. R. Acad. Sc. (Série A) 274 (1972) 320-323.

- [8] G. Grubb : Le spectre négatif des problèmes aux limites auto-adjoints fortement elliptiques, C. R. Acad. Sc. (Série A) 274 (1972) 409-412.
 - [9] D. Guesdes de Figueiredo : The coerciveness problem for forms over vector valued functions, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 63-94.
 - [10] L. Hörmander : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966) 129-209.
 - [11] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator, Acta. Math. 121 (1968), 193-218.
 - [12] J. L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non-homogènes et applications, vol.1, Ed. Dunod, Paris 1968.
 - [13] S. Seeley, exposé dans les Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, vol.2, 798-801.
-