

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. EL KOLLI

n^{ime} épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 17,
p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A16_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES PARIS V

Téléphone : MEdicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

n¹ème ÉPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

par A. EL KOLLI

Exposé N°XVII

16 Février 1971

DEFINITIONS

1) $n^{\text{ième}}$ épaisseur dans un espace vectoriel normé

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, on appelle, selon Kolmogorov, $n^{\text{ième}}$ épaisseur de A dans E le nombre

$$d_n(A, E) = \inf_{E_n \in \mathcal{G}_n(E)} \sup_{x \in A} \inf_{y \in E_n} \|x - y\|_E$$

où $\mathcal{G}_n(E)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de E .

On a les propriétés suivantes :

- 1- $d_0(A, E)$ est le rayon de la plus petite boule centrée à l'origine contenant A .
- 2- $d_n(\alpha A, E) = \alpha \cdot d_n(A, E) \quad (\alpha \geq 0)$
- 3- $A \subset B \Rightarrow d_n(A, E) \leq d_n(B, E)$
- 4- $d_n(A, E) = 0 \Leftrightarrow \{ \text{Il existe un sous-espace vectoriel de dimension } n \text{ de } E \text{ contenant } A \}.$
- 5- La suite d_n est décroissante. De plus, pour que $d_n \rightarrow 0$ il faut et il suffit que A soit précompact. Un résultat fondamental : le

Théorème de Krein : Soit E_{n+1} un sous-espace de dimension $(n+1)$ d'un espace de Banach E et U_{n+1} la boule unité de E_{n+1} . Alors

$$d_n(U_{n+1}, E) = 1$$

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration de ce théorème dans l'ouvrage de G. G. Lorentz [11].

2) Espaces de Sobolev avec poids

On notera J le pavé ouvert $]0, 1[^m$ de $\mathbb{R}^m$, $J = J' \times]0, 1[$, $x = (x', t)$ où $x' \in \mathbb{R}^{m-2}$. Pour tout multi-indice $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_i \in \mathbb{N}$,
 $|\mu| = \sum_{i=1}^m \mu_i$ et $D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_m^{\mu_m}}$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $L_{-\beta}^p(J)$ est l'espace des (classes de) fonctions $u : J \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $t^{-\beta} u \in L^p(J)$.

k étant un entier positif, on appelle espace de Sobolev $W_{\alpha}^{k,p}(J)$ l'espace des (classes de) fonctions $u : J \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $t^{\alpha} D^{\mu} u$ appartienne à $L^p(J)$ pour $|\mu| \leq k$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(J)}^p = \sum_{|\mu| \leq k} \|t^{\alpha} D^{\mu} u\|_{L^p(J)}^p$$

$W_{\alpha}^{ok,p}(J)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(J)$ dans $W_{\alpha}^{k,p}(J)$. Sur $W_{\alpha}^{ok,p}(J)$

$(\sum_{|\mu|=k} \|t^{\alpha} D^{\mu} u\|_{L^p(J)}^p)^{1/p}$ est une norme équivalente à

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(J)} \quad \text{si } \alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\} - [4].$$

Etant donné deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ on dit que $u_n \approx v_n$ s'il existe deux constantes positives A et B telles que $Au_n \leq v_n \leq Bu_n$ pour " n assez grand".

SE désignera la boule unité d'un espace normé E .

II . n^{ième} EPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

Lemme II.1 : Pierre Grisvard [6]

Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α réel tel que $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$ on a

$$W_{\alpha}^{ok,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J)$$

Démonstration par récurrence

1- $k = 1$ pour $u \in \mathcal{D}(J)$ on a

$$|u(x', t)| \leq \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s} u(x', s) \right| ds \quad \text{si } \alpha + \frac{1}{p} < 1$$

$$|u(x', t)| \leq \int_t^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} u(x', s) \right| ds \quad \text{si } \alpha + \frac{1}{p} > 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx' \int_0^1 t^{(\alpha-1)p} |u(x', t)|^p dt &= \int_0^{+\infty} dx' \int_0^{+\infty} t^{(\alpha-1)p} |u(x', t)|^p dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} dx' \left(\frac{p}{|\alpha p + 1 - p|} \right)^p \int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x', t) \right|^p dt \quad (\text{Inégalité de Hardy}) \\ &\leq \left(\frac{p}{|\alpha p + 1 - p|} \right)^p \int_0^1 dx' \int_0^1 t^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x', t) \right|^p dt \\ &\leq C. \|u\|_{W_{\alpha}^{o1,p}(J)}^p \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}(J)$ est dense dans $W_{\alpha}^{o1,p}(J)$ cette inégalité se prolonge à $W_{\alpha}^{o1,p}(J)$.

2- Soit u un élément de $W_{\alpha}^{ok,p}(J)$.

$u, \frac{\partial u}{\partial x_j} (j = 1, \dots, n-1), \frac{\partial u}{\partial t}$ sont des éléments de $W_{\alpha}^{ok-1,p}(J)$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, de $L_{\alpha-k+1}^p(J)$; ce qui implique que u appartient à $W_{\alpha-k+1}^{o1,p}(J)$.

$$u \in W_{\alpha-k+1}^{o1,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J)$$

Lemme II.2 P. Bolley et J. Camus [4]

Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α réel tel que $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$, p réel l'application

$$u \longmapsto t^{\rho} u$$

est un isomorphe de $W_{\alpha}^{ok,p}(J)$ sur $W_{\alpha-\rho}^{ok,p}(J)$

Démonstration

$$\text{Posons } \mu = (\mu', \mu_m) \quad D^{\mu} = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'}$$

$$D^{\mu}(t^{\rho} u) = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'} t^{\rho} u = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} t^{\rho} D^{\mu'} u$$

$$= \sum_{j=0}^{\mu_m} A_j t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u$$

$$\text{Pour } u \in W_{\alpha}^{ok,p}(J) \quad \frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u \in W_{\alpha-k-|\mu'|-\mu_m+j,p}^{ok-|\mu'|-\mu_m+j,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-j}^p(J)$$

$$\text{et } t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u \in L_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-\rho}^p(J) \hookrightarrow L_{\alpha-\rho}^p(J)$$

Ce qui implique que

$$D^\mu(t^\rho u) \in L_{\alpha-\rho}^p(J) \quad \text{pour } |\mu| \leq k$$

Il est clair que l'application est injective et que la bijection réciproque est l'application $u \longmapsto t^{-\rho}u$.

Théorème II.1 : Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α et β réels tels que $\alpha + \beta < k$ posons $d_n = d_n(SW_\alpha^{0,k,p}(J), L_{-\beta}^p(J))$, alors :

1. Si $\alpha + \beta < \frac{k}{m}$ $d_n \approx n^{-\frac{k}{m}}$
2. Si $\alpha + \beta = \frac{k}{m}$ et $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$ il existe une constante positive B telle que

$$d_n \leq B \left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{k}{m}}$$

3. Pour $\frac{k}{m} < \alpha + \beta < k$ et, si $\beta < 0$, $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$

$$d_n \approx n^{-\frac{k-(\alpha+\beta)}{m-1}}$$

Démonstration

1ère partie : Nous commençons par ramener le problème au cas où α et β sont de même signe

1. $\alpha < 0$ et $\beta \geq 0$
 $\alpha + \frac{1}{p} < 1$ et l'application

$$u \longmapsto t^\alpha u$$

est un isomorphisme de $W_\alpha^{0,k,p}(J)$ sur $W^{0,k,p}(J)$ et de $L_{-\beta}^p(J)$ sur $L_{-(\alpha+\beta)}^p(J)$, ce qui implique :

$$d_n(SW_\alpha^{0,k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \approx d_n(SW^{0,k,p}(J), L_{-(\alpha+\beta)}^p(J))$$

2. $\alpha \geq 0$ et $\beta < 0$

Si $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$ l'application $u \mapsto t^{-\beta} u$ est un isomorphisme simultané de $\overset{o}{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$ sur $\overset{o}{W}_{\alpha+\beta}^{k,p}(J)$ et de $L_{-\beta}^p(J)$ sur $L^p(J)$: ce qui implique :

$$d_r(\overset{o}{SW}_{\alpha}^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \approx d_r(\overset{o}{SW}_{\alpha+\beta}^{k,p}(J), L^p(J))$$

Si $\alpha + \frac{1}{p} \in \{1, 2, \dots, k\}$ il existe α' et α'' tels que $\alpha' < \alpha < \alpha''$
 $\alpha' + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$, $\alpha'' + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$, vérifiant les mêmes inégalités que α . Les inclusions

$$\overset{o}{W}_{\alpha'}^{k,p}(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}_{\alpha''}^{k,p}(J)$$

nous permettent de conclure.

2ème partie Démonstration du théorème pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

1. Majoration

Dans toute la démonstration C désigne une constante positive qui dépend de α , β , k , p , qui ne sera pas toujours la même.

1.a Soit δ un nombre réel tel que $0 < \delta < 1$. On approche u par 0 sur le pavé $J' \times]0, \delta[$.

Si $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, k\}$ d'après le lemme II.1

$$\overset{o}{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J) \hookrightarrow L_{-\beta}^p(J)$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt &= \delta^{1-\beta p} \int_{J'} dx' \int_0^1 s^{-\beta p} |u(x', \delta s)|^p ds \\ &\leq C \cdot \delta^{1-\beta p} \int_{J'} dx \int_0^1 s^{(\alpha-k)p} |u(x', \delta s)|^p ds \\ &= C \cdot \delta^{kp - (\alpha+\beta)p} \int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{(\alpha-k)p} |u(x', t)|^p dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \cdot \delta^{kp - (\alpha + \beta)p} \|u\|_{L_{\alpha-k}^p(J)}^p \\
&\leq C \cdot \delta^{kp - (\alpha + \beta)p} \|u\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)}^p \quad (1)
\end{aligned}$$

si $\alpha + \frac{1}{p} \in \{1, 2, \dots, k\}$ il existe $\alpha' > \alpha$ tel que $\alpha' + \frac{1}{p} \notin \{1, \dots, k\}$ et $\alpha + \beta < \alpha' + \beta < k$. Alors $W_{\alpha}^{o, k, p}(J) \hookrightarrow W_{\alpha'}^{o, k, p}(J)$ implique

$$\int_J dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt \leq C \cdot \delta^{kp - (\alpha' + \beta)p} \|u\|_{W_{\alpha'}^{o, k, p}(J)}^p \quad (1')$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, (1) ou (1') implique

$$\int_J dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt \leq \varepsilon^p \|u\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)}^p \quad (2)$$

en prenant

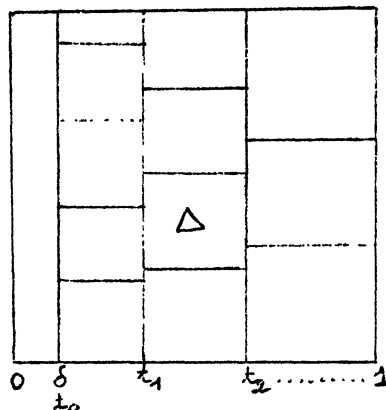
$$\begin{aligned}
C \cdot \delta^{kp - (\alpha + \beta)p} &= \varepsilon^p & \text{si } \alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, \dots, k\} \\
C \cdot \delta^{kp - (\alpha' + \beta)p} &= \varepsilon^p & \text{si } \alpha + \frac{1}{p} \in \{1, \dots, k\}
\end{aligned}$$

1.b On partage maintenant $J' \setminus]\delta, 1[$ en cubes Δ . Sur chaque cube Δ on approche la fonction u par un polynôme $P_{\Delta} u$ de degré $(k-1)$ tel que

$$\int_{\Delta} (D^{\mu} u(x) - D^{\mu} P_{\Delta} u(x)) dx = 0 \quad \text{pour } |\mu| < k.$$

On obtient les cubes Δ de la manière suivante :

on divise $] \delta \ 1[$ par des points $t_0 = \delta \ t_1 \dots t_h = 1$; si $l_j = t_j - t_{j-2}$, pour $t_{j-1} < t < t_j$ le cube Δ a pour côté l_j .



On détermine l_j de manière à avoir

$$\int_{\Delta} |u - P_{\Delta} u|^p t^{-\beta p} dx' dt \leq C. \varepsilon^p \int_{\Delta} \sum_{|\mu|=k} |D^{\mu} u(x)|^p t^{\alpha p} dx' dt$$

Alors si on appelle Ξ la subdivision de J obtenue et P_{Ξ} l'opération qui, à u , fait correspondre 0 pour $t < \delta$, $P_{\Delta} u$ pour $t > \delta$

$$\int_J |u - P_{\Xi} u|^p t^{-\beta p} dx' dt \leq C. \varepsilon^p \sum_{|\mu|=k} \|t^{\alpha} D^{\mu} u\|_{L^p(J)}^p$$

$$\text{soit } \|u - P_{\Xi} u\|_{L_{-\beta}^p(J)} \leq C. \varepsilon \|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(J)}$$

Détermination de l_j

$$\int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta} u(x)|^p t^{-\beta p} dx \leq t_{j-1}^{-\beta p} \int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta} u(x)|^p dx$$

On utilise l'inégalité de Poincaré. Comme $\int_{\Delta} (u(x) - P_{\Delta} u(x)) dx = 0$

$$\int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta} u(x)|^p dx \leq C. (t_j - t_{j-1})^p \int_{\Delta} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} P_{\Delta} u(x) \right|^p dx$$

($x_m = t$)

On applique à nouveau l'inégalité de Poincaré autant de fois que cela est nécessaire et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta} u(x)|^p t^{-\beta p} dx &\leq C. t_{j-1}^{-\beta p} l_j^{kp} \int_{\Delta} \sum_{|\mu|=k} |D^{\mu} u(x)|^p dx \\ &\leq C. t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \int_{\Delta} \sum_{|\mu|=k} t^{\alpha p} |D^{\mu}(x)|^p dx \end{aligned}$$

On veut que

$$\max_j C t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \leq \varepsilon^p \text{ soit } l_j \leq C. \varepsilon^{\frac{1}{k}} t_{j-1}^{\frac{\alpha+\beta}{k}} \quad \forall j$$

Posons à priori $l_j = a. \varepsilon^{\sigma} . j^{\gamma}$ où a est une constante

$$\sigma = \frac{1}{k - (\alpha + \beta)} \text{ et } \gamma = (\alpha + \beta)\sigma. \text{ Alors}$$

$$t_j = \sigma + a. \varepsilon^{\sigma} . \sum_{r=1}^j r^{\gamma}$$

Comme

$$\sum_{r=1}^j r^{\gamma} \approx j^{\gamma+1} = j^{k\sigma} \text{ et } \delta \approx \varepsilon^{\sigma} \text{ si } \alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, \dots, k\}$$

$$\delta \approx \varepsilon^{\frac{1}{k - (\alpha' + \beta)}} \text{ si } \alpha + \frac{1}{p} \in \{1, \dots, k\}$$

$\alpha' > \alpha$

$$t_j \approx \varepsilon^\sigma \cdot j^{k\sigma}$$

$$\text{et } 1_j t_{j-1}^{-\frac{\alpha+\beta}{k}} \approx \varepsilon^{\frac{1}{k}} \forall j$$

Soit h tel que $t_{h-1} < 1 \leq t_h$

$$t_h \approx 1 \approx \varepsilon^\sigma h^{k\sigma}$$

$$\text{soit } h^{-k} \approx \varepsilon \quad (3)$$

* Pour $m = 1$ on a approché tout élément de la boule unité de $W_\alpha^{o, k, p}(J)$ par un sous-espace vectoriel de dimension $n = h+1$ et il existe une constante B positive telle que

$$d_n(SW_\alpha^{o, k, p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot n^{-k}$$

** Pour $m > 1$, évaluons le nombre n de cubes Δ de la subdivision Ξ

$$n = \sum_{j=1}^h 1_j^{-(m-1)} + 1 \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}} \sum_{j=1}^h j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}}$$

$$\text{si } \alpha+\beta < \frac{k}{m} \quad \sum_{j=1}^h j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} \approx h^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} + 1 = h^{\frac{k-m(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}}$$

$$\text{soit } n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)} - \frac{k-m(\alpha+\beta)}{k[k-(\alpha+\beta)]}} = \varepsilon^{-\frac{m}{k}}$$

$$\text{et } d_n(SW_\alpha^{o, k, p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot n^{-\frac{k}{m}}$$

$$\text{si } \alpha+\beta > \frac{k}{m} \quad \sum_{j=1}^h j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} \approx 1$$

$$\text{soit } n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}}$$

$$\text{et } d_n^{\circ k, p}(\text{SW}_\alpha(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B. n^{-\frac{k-(\alpha+\beta)}{m-1}}$$

$$\text{si } \alpha+\beta = \frac{k}{m} \quad \frac{h}{\sum_{j=1}^m j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}}} = \frac{h}{\sum_{j=1}^m j^{-1}} \sim \text{Log } h$$

$$n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}} \text{Log } h = \varepsilon^{-\frac{m}{k}} \text{Log } h \approx \varepsilon^{-\frac{m}{k}} \text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$$

$$\text{Log } n \sim -\frac{m}{k} \text{Log } \varepsilon + \text{Log } \text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\text{Log } n}{n} \approx \varepsilon^{\frac{m}{k}} + \frac{\text{Log } \text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}}{\text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}}$$

$$\frac{\text{Log } n}{n} \approx \varepsilon^{\frac{m}{k}} ; \left(\frac{\text{Log } n}{n} \right)^{\frac{k}{m}} \approx \varepsilon$$

$$\text{et } d_n^{\circ k, p}(\text{SW}_\alpha(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B. \left(\frac{\text{Log } n}{n} \right)^{\frac{k}{m}}$$

Remarque

Dans certains cas, par exemple $\alpha=0$, $\beta < \frac{1}{p}$ et $m < kp$ ou bien $\alpha=0$ et $m \geq kp$ on retrouve des cas particuliers de résultats de M. Birman et M.Z. Solomjak [3]

2. Minoration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$. On partage $]0, 1[$ en s sous-intervalles et on obtient une partition de J en s^m cubes J_1 de côté $\frac{1}{s}$. On définit φ_1 par $\varphi_1(x) = \varphi(sx-1)$ $1 = (1_1, \dots, 1_m)$. Alors $\varphi_1 \in \mathcal{D}(J_1)$.

* Pour $0 \leq \alpha+\beta < \frac{k}{m}$.

Soit E_{n+1} le sous-espace de $L_{-\beta}^p(J)$ engendré par les fonctions φ_1 . Si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$; $E_{n+1} = \{f_\gamma = \sum_1 \gamma_1 \varphi_1\}$; $\dim E_{n+1} = n+1 = s^m$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p &= \int_J |\sum_1 \gamma_1 \varphi_1(x)|^p t^{-\beta p} dx \geq \int_J |\sum_1 \gamma_1 \varphi_1(x)|^p dx \\ &\geq \sum_1 |\gamma_1|^p \int_{J_1} |\varphi_1(x)|^p dx = s^{-m} \sum_1 |\gamma_1|^p \|\varphi\|_{L^p(J)}^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)}^p &= \sum_{|\mu| \leq k} \|t^{\alpha} D^{\mu} f_\gamma\|_{L^p(J)}^p = \sum_{|\mu| \leq k} \int_J t^{\alpha p} |\sum_1 \gamma_1 D^{\mu} \varphi_1(x)|^p dx \\ &\leq \sum_{|\mu| \leq k} \int_J |\sum_1 \gamma_1 D^{\mu} \varphi_1(x)|^p dx = \sum_{|\mu| \leq k} \sum_1 |\gamma_1|^p \int_{J_1} |D^{\mu} \varphi_1(x)|^p dx \\ &= \sum_{|\mu| \leq k} \sum_1 |\gamma_1|^p \int_{J_1} s^{|\mu|p} |(D^{\mu} \varphi)_1(x)|^p dx \\ &= s^{-m} \sum_1 |\gamma_1|^p \sum_{|\mu| \leq k} s^{|\mu|p} \int_J |D^{\mu} \varphi(x)|^p dx \\ &\leq C \cdot s^{-m} \sum_{|\mu| \leq k} s^{|\mu|p} = C s^{-m} \sum_{r=0}^k s^{rp} \end{aligned}$$

$$\sum_{r=0}^k s^{rp} \sim s^{kp}$$

$$\|f_\gamma\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)}^p \leq C \cdot s^{kp-m}$$

$$\text{et } \|f_\gamma\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)} \leq C \cdot s^k \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}$$

La boule B_r de rayon $r = C^{-1} s^{-k}$ de E_{n+1} est donc contenue dans la boule unité de $W_{\alpha}^{o, k, p}(J)$. En utilisant le théorème de Krein et les propriétés de la $n^{\text{ième}}$ épaisseur, on obtient :

$$d_n^{ok,p}(\text{SW}_\alpha(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq d_n(B_r, L_{-\beta}^p(J)) = C^{-1} s^{-k}$$

Comme $(n+1) = s^m$, $n \sim s^m$. Il existe donc une constante positive A telle que

$$d_n^{ok,p}(\text{SW}_\alpha(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq A \cdot n^{-\frac{k}{m}}$$

** Pour $\frac{k}{m} < \alpha + \beta < k$

Soit E_{n+1} le sous-espace de $L_{-\beta}^p(J)$ engendré par les fonctions φ_l telles que $l_m = 0$

$$E_{n+1} = \{f_\gamma = \sum_{l_m=0} \gamma_l \varphi_l\} \quad \dim E_{n+1} = n+1 = s^{(m-1)}$$

$$\|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p = \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l \varphi_l(x) \right|^{p t^{-\beta p}} dx \geq s^{\beta p} \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l \varphi_l(x) \right|^p dx$$

$$\|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p \geq s^{\beta p} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_1} |\varphi_l(x)|^p dx = s^{\beta p - m} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \|\varphi\|_{L^p(J)}^p$$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{W_\alpha}^{p,ok,p}(J) &= \sum_{|\mu| \leq k} \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l D^\mu \varphi_l(x) \right|^{p t^{\alpha p}} dx \\ &= \sum_{|\mu| \leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_1} t^{\alpha p} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx \\ &\leq s^{-\alpha p} \sum_{|\mu| \leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_1} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx \end{aligned}$$

Un calcul identique au précédent (cas $\alpha + \beta < \frac{k}{m}$) donne

$$\|f_\gamma\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)}^p \leq C. s^{kp - \alpha p - m}$$

$$\text{et } \|f_\gamma\|_{W_{\alpha}^{o, k, p}(J)} \leq C. s^{k - (\alpha + \beta)} \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}$$

En utilisant le théorème de Krein

$$d_n(W_{\alpha}^{o, k, p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq A. n^{-\frac{k - (\alpha + \beta)}{m - 1}}$$

3ème partie : démonstration du théorème pour $\alpha < 0$, $\beta < 0$

La majoration est une conséquence de

$$W_{\alpha}^{o, k, p}(J) \hookrightarrow W^{o, k, p}(J) \hookrightarrow L^p(J) \hookrightarrow L_{-\beta}^p(J)$$

$$d_n(W_{\alpha}^{o, k, p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq d_n(W^{o, k, p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq d_n(W^{o, k, p}(J), L^p(J))$$

Minoration

$$\text{Soient } a = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}), \quad Q = \frac{1}{2} J + a$$

On reprend la démonstration faite dans le cas $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < \frac{k}{m}$ en substituant le cube Q au cube J .

2- Généralisation

Soient $\bar{\Omega}$ une variété à bord C^∞ , compacte, de dimension m et φ une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, positive dans Ω , nulle à l'ordre 1 au bord.

On appelle espace de Sobolev $W_{\alpha}^{k, p}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\varphi^{\alpha} . D^{\mu} u \in L^p(\Omega)$ pour $|\mu| \leq k$. C'est un espace

de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\varphi^{\alpha} \cdot D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p$$

où $W_{\alpha}^{k,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}_s(\Omega)$ dans $W_{\alpha}^{k,p}(\Omega)$.

$L_{-\beta}^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\varphi^{-\beta} u \in L^p(\Omega)$.

Le théorème II.1 est encore valable si on substitue Ω à J .
La démonstration se fait par cartes locales et partition de l'unité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Aronszajn, R. Adams, K. T. Smith : Theory of Bessel Potentials Part II, Annales de l'Institut Fourier Tome XVII Fasc.2 1967.
- [2] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Archive for Rat. Mech. and Anal. Vol.34, N°5, 1969, p.361.
- [3] M. Birman, M. Z. Solomjak : Approximation polynomiale par morceaux des fonctions de classe $W^{\alpha,p}$, Math. Sbornik t.73 (115) 3 1967 § 3.
- [4] P. Bolley, J. Camus : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Séminaire d'analyse fonctionnelle , Université de Rennes 1968-69
- [5] L. Boutet de Monvel, P. Grisvard : Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un problème aux limites, C. R. Acad. Sc.
- [6] P. Grisvard : Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids, Scuola Normale Superiore, Pisa Serie III, Vol.XVII, Fasc.3 (1963)
- [7] A. N. Kolmogorov : Über die beste Annäherung von functionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. of Math. (2) 37, 1936 p.107-111
- [8] J. L. Lions : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Math. Sup. Montréal 1962
- [9] J. L. Lions, E. Magenes : Scuola Normale Superiore, Pisa 15, 1961 p.39-101
- [10] J. L. Lions, J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation I.H.E.S. N°19, 1964
- [11] G. G. Lorentz : Approximation of functions, Holt Rienhart and Winston 1966 p.137-139
- [12] J. Marcinkiewicz : Sur les multiplicateurs des séries de Fourier Studia Mathematica, 8, 1939
- [13] Mihlin : Intégrales singulières à plusieurs variables et équations intégrales, Moscou 1962
- [14] R. T. Seeley : Extension of C^∞ functions defined in a half space Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 15 N°4 August 1964

XVII.17

- [15] M. Z. Solomjak, V. H. Tihomirov : Geometric characteristics of imbedding of the classes $W^{\alpha,p}$ in C , Izo Vysš Učebn Zaved Matematika Tome 10, N°65, 1967, p.76 à 82
 - [16] A. El Kolli : $n^{\text{ième}}$ épaisseur dans les espaces de Sobolev , Thèse Alger 1969
 - [17] A. Mostefai : ε -entropie dans les espaces de Sobolev, Thèse Alger 1970.
-