Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Unterberger

Problèmes de convexité pour les opérateurs différentiels à coefficients constants

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 13, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A13_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

PROBLEMES DE CONVEXITE POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS

par A. UNTERBERGER

Exposé N° XIII   19 Janvier 1972

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Rappelons que Ω est dit $P(-D)$-convexe si pour toute partie compacte K de Ω, il existe une partie compacte L de Ω telle que pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que le support de $P(D)u$ soit contenu dans K, le support de u soit contenu dans L. Disons de même que Ω est $P(-D)$-singulier-convexe si la condition analogue, où l'on a remplacé les supports par les supports singuliers, est vérifiée.

Cet exposé comprend deux parties distinctes : dans la première nous montrons comment certaines propriétés de convexité concernant Ω sont équivalentes à la validité d une certaine famille d'inégalités proches des inégalités de Carleman.

Dans la deuxième partie, nous donnons des conditions géométriques suffisantes pour qu'un ouvert soit singulier-convexe par rapport à un opérateur <u>pseudo</u>-différentiel : plus précisément, nous donnons une forme ξ-localisée d'un tel théorème; quant aux hypothèses, elles exigent malheureusement que les caractéristiques soient simples. On applique ceci à la propagation des singularités pour certains opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$.

Les deux parties de cet exposé font un usage essentiel des espaces de Sobolev d'ordre variable, pour la description desquels nous renvoyons à (2).

§ 1. INEGALITES DE CARLEMAN ET CONVEXITE

Les inégalités de Carleman sont des inégalités du genre :

$$\int e^{2\tau\rho(x)}|u(x)|^2 dx \leq C \int e^{2\tau\rho(x)}|P(D)u(x)|^2 dx. \tag{1}$$

On sait que ces inégalités jouent un rôle dans les questions d'unicité du problème de Cauchy (cf(1), p.45), et dans les problèmes de convexité (cf(2),p.V.12 et V.13) : des conditions suffisantes assez larges sur ρ permettant d'écrire de telles inégalités ont été données par Trèves (cf(1), chapitre IV); sans aborder ce problème, nous cherchons ici à donner la véritable signification de ces inégalités, c'est-à-dire à voir quelle est la notion de convexité qui est équivalente à la validité de suffisamment d'inégalités (2) (comme on le verra, il faut généraliser un peu les inégalités (1) en se permettant de ne pas avoir la même fonction ρ dans les deux membres de l'inégalité).

Rappelons pour commencer qu'aucune des deux propriétés de convexité définies dans l'introduction n'entraîne l'autre, et que la conjonction des deux est appelée forte convexité. Cela étant, soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, et k un entier ≥ 0. Considérons les assertions suivantes :

A) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que, pour tout $x_0 \in \Omega - L$ et tout compact $M \subset \Omega$ contenant $K \cup \{x_0\}$, il existe deux fonctions ρ et σ à valeurs réelles, définies et C^∞ dans un voisinage de M, un nombre $T_0 > 0$ et un nombre $C > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\rho(x_0) > 0$ et $\rho(x_0) > \sup\limits_K \sigma(x)$

b) pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_M(\Omega)$ et tout nombre $T \geq T_0$, on a l'inégalité

$$\int e^{2\tau\rho(x)}|u(x)|^2 dx \leq C[\int e^{2\tau\sigma(x)}|P(D)u(x)|^2 dx + \|u\|^2_{\tau_0}] \tag{2}$$

B_k) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que, pour tout $x_o \in \Omega - L$ et tout compact $M \subset \Omega$ contenant $K \cup \{x_o\}$, il existe deux fonctions ρ et σ à valeurs réelles, définies et C^∞ dans un voisinage de M, vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\rho(x_o) > \sup_K \sigma(x)$

b) pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbb{R}^k)$ dont le support est contenu dans $M \times [-1,1]^k$ telle que $P(D)\, u \in H^\sigma(\Omega \times \mathbb{R}^k)$, u appartient à $H^\rho(\Omega \times \mathbb{R}^k)$.

C_k)(resp C'_k) : $\Omega \times \mathbb{R}^k$ est $P(-D)$-fortement convexe (resp. $P(-D)$-singulier-convexe).

<u>Théorème 1.1</u> : Pour tout entier $k \geq 0$, A) entraine B_k), C_k) (et C'_k)); pour tout entier $k \geq 1$, B_k), C'_k) (ou C_k)) entraîne A); enfin, A) équivaut à la condition suivante, que nous appellerons <u>stable</u> $P(-D)$-convexité de Ω :
pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que, pour tout entier $k \geq 0$ et toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega \times \mathbb{R}^k)$ vérifiant supp. sing $(P(D)u) \subset K \times \mathbb{R}^k$, on ait supp. sing $(u) \subset L \times \mathbb{R}^k$.

On pourra trouver la démonstration détaillée du théorème 1.1 dans (3) : contentons-nous ici des indications suivantes : une inégalité telle que (2) reste valable si l'on y remplace $u \in \mathcal{D}_M(\Omega)$ par $v \in \mathcal{D}_{M \times \mathbb{R}^k}(\Omega \times \mathbb{R}^k)$; puis, pour $a > 0$ et b réel on peut poser $e^{-\tau} = t^a$ et multiplier les deux membres de l'inégalité (2) par t^{-2b}, ce qui conduit, après avoir observé que $\|v\|_{\tau_o} \leq C\, \|P(D)v\|_{\tau_o}$ à l'inégalité

$$\int t^{-2\rho'(x)} |v(x,y)|^2 dx\, dy \leq C[\int e^{-2\sigma'(x)} |P(D)v(x,y)|^2 dx\, dy + t^{-2b} \|P(D)v\|^2_{\tau_o}],$$

où l'on a posé $\rho' = a\rho + b$ et $\sigma' = a\sigma + b$.

En utilisant la formule qui exprime $\|v\|_\rho$ au moyen des normes L^2 de certaines régularisées de v(cf (2), p.V.6, pour l'énoncé de ladite formule, et (2), p.V.12, pour son application), on aboutit à l'inégalité

$$\|v\|^2_{\rho'} \leq C[\|P(D)v\|^2_{\sigma'} + \|P(D)v\|^2_{\tau_o+b}]$$

c'est-à-dire à l'implication :

$$\forall\, v \in \mathcal{E}'_{M\times\mathbb{R}^k}(\Omega\times\mathbb{R}^k), P(D)v \in H^{\sigma'} \cap H^{\tau_o+b} \Rightarrow v \in H^{\rho'}.$$

Cela étant si $P(D)v \in H^s$ et si supp sing $(P(D)v) \subset K\times\mathbb{R}^k$, et si par ailleurs on pose $\mu = \sup\limits_K \sigma(x)$, alors pour tout t réel l'hypothèse A)a) permet de résoudre le système d'inéquations (dont les inconnues sont a et b) :

$$\begin{aligned} a\mu + b &< s \\ \tau_o + b &< s \\ a\rho(x_o) + b &> t\,. \end{aligned}$$

Il résulte de ces inégalités que v est de classe H^t au voisinage de $\{x_o\}\times\mathbb{R}^k$, et comme t est arbitraire, on a prouvé que A) entraine la stable P(-D)-convexité de Ω : incidemment, on a aussi prouvé que A) entraîne B_k).

Les autres implications affirmées dans le théorème 1.1. sont banales, ou reposent essentiellement sur le théorème du graphe fermé, à l'exception de l'implication $B_k) \Rightarrow A)$, qui résulte du lemme suivant :

Lemme 1.1 : Soit ρ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, partout > 0. Soit k un entier ≥ 1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$, à valeurs réelles, non identiquement nulle. Pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et tout $t > 0$, définissons la fonction $u \otimes \phi^t$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ par la formule

$$(u \otimes \phi^t)(x,y) = t^{-k/2} u(x)\phi(\tfrac{y}{t}).$$

Alors pour tout compact M de $\mathbb{R}^n$ il existe trois constantes strictement positives C_1, C_2 et ε telles que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_M(\mathbb{R}^n)$ et tout t tel que $0 < t < \varepsilon$, on ait l'inégalité

$$C_1 \|u \otimes \phi^t\|_\rho^2 \leq \int t^{-2\rho(x)} |u(x)|^2 dx + \|u\|_\rho^2 \leq C_2[\|u \otimes \phi^t\|_\rho^2 + \|u\|_\rho^2].$$

On pourra trouver la démonstration du lemme 1.1 dans (3) : ce lemme peut d'ailleurs être considéré comme une sorte de "réciproque" du théorème II.1 de (2) (p.V.6).

§ 2. OPERATEURS PROPAGEANT LES SINGULARITES COMME $\frac{\partial}{\partial x_1}$ OU BIEN $\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$

Dans ce paragraphe, on désigne par $\Theta[f]$ l'opérateur pseudo différentiel de symbole $f(x, \xi)$.

Théorème 2.1 : Soit $A = \Theta[h]$ un opérateur pseudo-différentiel de convolution, dont le symbole $h(\xi)$ est C^∞ pour $|\xi| \neq 0$ et s'écrit $h = h_o + h_r$, où h_o est homogène d'ordre r_o et h_r est d'ordre $r < r_o$ (non nécessairement homogène). Soit ξ^o un point de la sphère unité Σ de $\mathbb{R}^n$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et K et L deux parties compactes de Ω, avec $K \subset L$.

Supposons l'une des conditions a), b) et c) vérifiées :

a) $h_o(\xi^o) \neq 0$

b) $h_o(\xi^o) = 0$, et le vecteur $dh_o(\xi^o)$ dont les composantes sont $\frac{\partial h_o}{\partial \xi_j}(\xi^o)$

est réel et non nul. De plus, pour toute droite F_1 parallèle à $dh_0(\xi^0)$, l'homomorphisme d'inclusion $H^1(F_1 \cap \Omega, F_1 \cap L) \to H^1(F_1 \cap \Omega, F_1 \cap K)$ est trivial.

c) $h_0(\xi^0) = 0$ et $dh_0(\xi^0) = a + ib$, où a et b sont deux vecteurs réels non nuls. De plus, pour tout plan F_2 parallèle au plan engendré par a et b, l'homorphisme d'inclusion $H^2(F_2 \cap \Omega, F_2 \cap L) \to H^2(F_2 \cap \Omega, F_2 \cap K)$ est trivial.

Pour tout point $x^0 \in \Omega - L$ et tout compact M de Ω contenant $K \cup \{x^0\}$, il existe alors un voisinage W de ξ^0 dans Σ tel que, pour toute fonction $\alpha(\xi)$ homogène de degré 0 et C^∞ pour $|\xi| \neq 0$, vérifiant $\Sigma \cap \operatorname{supp}(\alpha) \subset W$, et pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ vérifiant supp. sing $(\Theta[\alpha] A u) \subset K$, $\Theta[\alpha]u$ soit de classe C^∞ dans un voisinage de x^0.

Dans l'énoncé de ce théorème la cohomologie employée est celle d'Alexander (limite inductive des groupes de cohomologie des voisinages), disons sur le corps des réels. Le point essentiel de la démonstration de ce lemme (que l'on pourra trouver, complète, dans (4)) consiste à prouver que si l'on a

$$\operatorname{Re} \sum_{jk} \frac{\partial h_0}{\partial \xi_j} \frac{\partial h_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_k} > 0$$

pour tout $(x,\xi) \in M \times W$, et si $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ est telle que $\Theta[\alpha]Au$ appartienne à H^ρ, alors $\Theta[\alpha]u$ appartient aussi à H^ρ.

Ceci se prouve comme le lemme 4.1 de (2) (p.VI,3), le fait que A soit pseudo-différentiel et non différentiel, non plus que la localisation par rapport à ξ, n'introduisant de difficultés supplémentaires.

A l'aide de ce théorème, on démontre aisément, par exemple, le théorème (dû à Grushin) sur la propagation des singularités pour les opérateurs à coefficients constants, à symboles principaux réels et à caractéristiques simples. Une autre application est le théorème suivant (on pourra penser, à titre d'exemples, aux polynômes $\xi_1^3 + \xi_2^3 - 3\xi_1\xi_2\xi_3$ et $\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \xi_1^3$) :

<u>Proposition 2.1</u> : Soit $P(\xi)$ un polynôme homogène réel d'ordre $m \geq 2$ sur $\mathbb{R}^3$; soit V son cône caractéristique, et soit S le sous-cône défini par les équations $P^{(j)}(\xi) = 0$ $(j=1,2,3)$. Supposons qu'en tout point $\xi \in S-\{0\}$, la matrice hessienne $H(\xi) = (P^{(jk)}(\xi))$ soit de rang 2. Soit S_1 le sous-cône de S engendré par les points de $\Sigma \cap S$ (Σ sphère unité de $\mathbb{R}^3$) isolés dans $\Sigma \cap V$.
Soit p_1 l'ensemble des directions de droites de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonales à V en des points réguliers de V; soit p_2 l'ensemble des directions de plans de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonales à des droites de S_1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et K et L deux parties compactes de Ω. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites :

a) pour toute droite E_1 parallèle à un élément de $\bar{p}_1$ (adhérence de p_1 dans l'espace projectif $P_2(\mathbb{R})$), l'homomorphisme d inclusion $H^1(E_1 \cap \Omega, E_1 \cap L) \to H^1(E_1 \cap \Omega, E_1 \cap K)$ est trivial.

b) pour tout plan E_2 parallèle à un élément de p_2, l'homomorphisme d'inclusion $H^2(E_2 \cap \Omega, E_2 \cap L) \to H^2(E_2 \cap \Omega, E_2 \cap K)$ est trivial.

Alors pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que $P(D)u$ soit C^∞ en dehors de K, u est C^∞ en dehors de L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Trèves : Linear Partial Differential Equations, Gordon and Breach

[2] A. Unterberger : Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1970-71

[3] A. Unterberger : Ouverts stablement convexes par rapport à un opérateur différentiel, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier

[4] A. Unterberger : Méthodes de factorisation dans les problèmes de convexité, à paraître.