Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. M. Bony

P. Schapira

Solutions analytiques et hyperfonctions du problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 12, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

SOLUTIONS ANALYTIQUES ET HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY POUR LES OPERATEURS HYPERBOLIQUES NON STRICTS

par J. M. BONY et P. SCHAPIRA

Exposé N°XII

12 Janvier 1972

§ 1. NOTATIONS

Dans tout cet exposé, nous considèrerons un opérateur différentiel

$$P(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{\alpha\leq m} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$$

à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage $\tilde{U}$ de U dans $\mathbb{C}^n$ où les fonctions a_α se prolongent en fonctions holomorphes. Nous noterons encore P l'opérateur

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

défini dans $\tilde{U}$ et nous noterons p son symbole principal

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\zeta^\alpha .$$

On dit que la partie principale de P est hyperbolique dans la direction N (avec $N \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$) si pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a $p(x,N + i\xi) = 0$. Il est équivalent d'affirmer que N est non caractéristique et que l équation $p(x,\xi + \tau N)$ n'a que des racines τ réelles pour ξ réel.

Remarque 1.1 : Si on pose $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ et si N désigne le vecteur de composantes $x' = 0$; $x_n = 1$, on peut énoncer une formulation géométrique équivalente : si un hyperplan H (de codimension réelle 1) de $\mathbb{C}^n$ contient l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_n = 0$, et si H est caractéristique pour $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$, alors H contient $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2 : Aucune hypothèse supplémentaire ne sera faite sur P. Les termes d'ordre inférieur et la multiplicité des caractéristiques peuvent être quelconques.

§ 2. INEGALITE HYPERBOLIQUE

Lorsque z n'est pas réel, l opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ n'est plus en général hyperbolique. L'inégalité qui suit permet de montrer que l'on s'écarte assez peu du cas hyperbolique. Nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme 2.1 : Soit $\pi(z,\tau)$ un polynôme en une variable τ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables z. On suppose que pour z réel, les racines τ de ce polynôme sont réelles. On a alors sur tout compact une majoration du type suivant :

$$\pi(z,\tau) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leq C|\operatorname{Im} z|.$$

Ce lemme se déduit d'une forme locale du théorème des tubes de Bochner, due à M. Kashiwara.

Théorème 2.1 : Supposons la partie principale de P hyperbolique dans la direction N. Alors, sur tout compact, il existe une constante telle que

$$p(z,\zeta+\tau N) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leq C(|\xi||y| + |\eta|)$$

Compte tenu de l'homogénéité en (z,τ), le lemme précédent fournit le résultat pour $|\eta|/|\xi|$ borné. Si on a au contraire $|\eta| \geq |\xi|$, c'est une conséquence immédiate de la majoration en module $|\tau| \leq C|\zeta|$ qui résulte de $p(z,N) \neq 0$.

§ 3. SOLUTIONS ANALYTIQUES DU PROBLEME DE CAUCHY

On désignera par $B(0,a)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon a et par $B'(0,a)$ son intersection avec l'hyperplan d'équation $x_n = 0$. On notera $K(a,\delta)$ (pour $\delta > 0$) le cône tronqué intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0,a)$ et du point δaN.

L'opérateur P est supposé défini dans un voisinage d'une boule $B(0,r)$, et de partie principale hyperbolique dans la direction $N = (0,..0,1)$ pour tout x. L'opérateur P se prolonge à $\overline{B(0,r)} + i\,\{y \leq \varepsilon\}$ pour ε assez petit. On désignera par A_ε l'ensemble fermé des ζ tels que l'on ait $p(z,\zeta) = 0$ pour au moins un z appartenant à $\overline{B(0,r)} + i\,\{y \leq \varepsilon\}$.

Le théorème 2.1 peut se traduire géométriquement par la proposition suivante.

<u>Proposition 3.1</u> : Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout $a < r$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout hyperplan (de codimension réelle 1) dont la normale appartient à A_ε et qui passe par δaN coupe $(B(0,a) + i\{y \leq \varepsilon\}) \cap \{z_n = 0\}$.

Cette proposition est à rapprocher de la remarque 1.1. Elle résulte, par un calcul élémentaire de la majoration du théorème 2.1. Il suffit de prendre $\delta < \frac{1}{C(r+1)}$.

<u>Théorème 3.1</u> : Soit g analytique dans $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$. Soient $h_0, \ldots, h_{m-1}$ analytiques sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule f, analytique dans $K(a,\delta)$ et au voisinage de $B'(0,a)$ solution du problème de Cauchy

$$Pf = g \; ; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x',0) = h_k(x').$$

Pour chaque $a' < a$, le théorème de Cauchy-Kowalewski permet de trouver une solution f au voisinage de $\overline{B'(0,a')}$ et donc se prolongeant holomorphiquement au voisinage de $\overline{B'(0,a')} + i\{|y| \leq \varepsilon\}$ pour ε convenable. Compte tenu de la proposition 3.1, le théorème de prolongement démontré dans l'exposé 11 (th.2.1. de [3]) montre que f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\delta a'N$ et de $B'(0,a')$. Sa trace sur $\mathbb{R}^n$ est une solution définie dans $K(a',\delta)$ pour tout $a' < a$ et donc dans $K(a,\delta)$.

§ 4. RAPPELS SUR LES HYPERFONCTIONS

On désignera systématiquement par I, I', I_α,... des parties fermées convexes propres de la sphère unité S^{n-1}, et par Γ, Γ', Γ_α,... l'intérieur de leurs polaires respectifs, cônes ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\tilde{\omega}$ un voisinage complexe de ω, on peut définir [4] la valeur au bord $b(f)$ d'une fonction holomorphe dans $(\omega + i\Gamma) \cap \tilde{\omega}$, c'est une hyperfonction sur ω et réciproquement toute hyperfonction s'obtient comme somme finie de telles valeurs au bord.

Si (x,η) appartient à $\omega \times S^{n-1}$, et si u est une hyperfonction sur ω, nous dirons avec M. Sato [5] que le point (x,η) n'appartient pas au support singulier essentiel de u (que nous noterons $SS^*(u)$) s'il existe des I_α en nombre fini, ne contenant pas η, tels que dans un voisinage V de x, l'hyperfonction u soit somme de valeurs au bord de fonctions f_α, homomorphes dans $(V + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{V}$ pour un voisinage complexe $\tilde{V}$ de V convenable.

On montre alors que si des I_α en nombre fini sont tels que les $\omega \times I_\alpha$ recouvrent $SS^*(u)$, on peut écrire $u = \Sigma u_\alpha$ avec $SS^*(u_\alpha) \subset \omega \times I_\alpha$. De plus, si on a $SS^* u \subset \omega \times I$, pour tout voisinage I' de I, on a $u = b(f)$ où f est holomorphe dans $(\omega + i\Gamma') \cap \tilde{\omega}$.

Dans le cas où $N = (0,\ldots,0,1)$ et $-N$ n'appartient pas au support singulier essentiel de u en 0, on peut définir la trace de u sur l'hyperplan $x_n = 0$. En effet au voisinage de 0 on a $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ avec $\pm N \notin I_\alpha$. Il en résulte que les cônes Γ_α coupent l'hyperplan $x_n = 0$. Les restrictions f'_α des fonctions f_α à $(\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \{z_n = 0\}$ ont des valeurs au bord dans $\{x_n = 0\}$ au voisinage de 0 et $\Sigma\, b(f'_\alpha)$ qui ne dépend pas de la décomposition choisie est par définition la trace de u.

§ 5. SOLUTIONS HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY

Les notations sont celles du paragraphe 3, la partie principale de P est toujours supposée hyperbolique dans la direction N.

Proposition 5.1 : Il existe une constante δ' telle que, si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dont la trace Γ' sur l'hyperplan $x_n = 0$ est d'ouverture supérieure à $\pi/4$ (c'est à dire contient un cône de révolution d'axe γ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$), si f est holomorphe au voisinage de $B'(0,a) + i\Gamma$, alors f se prolonge en fonction holomorphe dans l'intersection de $K(a,\delta') + i\Gamma_1$ et d'un voisinage complexe de $K(a,\delta')$ où Γ_1 est un cône ouvert convexe non vide convenable.

Si δ est la constante de la proposition 3.1., il est immédiat que tout hyperplan dont la normale appartient à A_ε et qui passe par le point $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$ coupe $(B'(0,a) + i\Gamma'_\varepsilon)$ en supposant γ unitaire et en notant Γ'_ε l'intersection de Γ' et de la boule de rayon ε. Si on désigne alors par M_ε l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\frac{\delta a N}{2\sqrt{2}} + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$ et de $B'(0,a) + i\Gamma_\varepsilon$, il résulte du théorème 2.1 de [3] que f se prolonge à M_ε. La réunion des $M_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon' < \varepsilon$ contient un ouvert de la forme $K(a.\delta')+i\Gamma$ à condition de prendre $\delta' < \delta/2\sqrt{2}$.

Théorème 5.1 : Soit v une hyperfonction définie dans la réunion de $K(a\ \delta')$ et d'un voisinage de $B'(0,a)$, telle que N et -N n'appartiennent pas au support singulier essentiel de u. Soient $w_0,\ldots,w_{m-1}$ des hyperfonctions définies sur $B'(0,a)$. Il existe alors une et une seule hyperfonction u, définie dans la réunion de $K(a,\delta')$ et d'un voisinage

$B'(0,a)$, solution du problème de Cauchy :

$$P_u = v ; \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u|_{x_n=0} = w_k$$

En écrivant les hyperfonctions v et w_k comme somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, on se ramène à résoudre des problèmes de Cauchy $Pf_\alpha = g_\alpha ; \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^k f_\alpha|_{z_n=0} = h_{k,\alpha}$ au voisinage de $B'(0,a)+i\Gamma'_\alpha$, puis on utilise la proposition pour montrer que les f_α se prolongent.

Remarque : En précisant la démonstration de la proposition 3.1. on peut montrer que l'écart angulaire entre $SS^*(u|_{X_n=0})$ et $SS^*(u|_{X_n=t})$ est majoré par une constante fois t. Il y a non seulement propagation des solutions à vitesse finie, mais aussi propagation des directions de singularité à vitesse finie (ces vitesses ne dépendant que de la constante C du théorème 2.1.

Corollaire 5.1.(résolubilité locale) : Il existe un voisinage V de 0 tel que si v est une hyperfonction définie dans un sous-ouvert ω de V il existe une hyperfonction u dans ω solution de $Pu = v$.

Le faisceau des hyperfonctions étant flasque, on peut supposer $\omega = V$. On peut écrire $v = b(g^+) + b(g^-) + \Sigma b(g_\alpha)$ où les parties I_α correspondantes ne contiennent pas N et -N, et où I_+ et I_- sont des voisinages arbitrairement petits de N et -N. Le théorème 5.1 permet de résoudre $Pu_\alpha = b(g_\alpha)$ pour V assez petit. D'autre part, le théorème 4.2 de [3] permet de résoudre $Pf^+ = g^+$ dans Γ^+. On pose $u = \Sigma u_\alpha + b(f^+) + b(f^-)$.

Remarque : On peut déduire (voir [1],[2]) des résultats qui précèdent des théorèmes d'existence et de prolongement au bord analogues à ceux de [3], en supposant que la partie principale de P est hyperbolique dans les directions normales au bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972) p.86

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Problème de Cauchy existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (Janvier 1972)

[3] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, n°11.

[4] M. Sato : Theory of hyperfunctions I et II. Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 8 (1959-60) p.139-193 et 387-437

[5] M. Sato : Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations. Actes Cong. Intern. Math. Nice 1970 t.2