

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

C. GOULAOUIC

**Problèmes d'analyticité pour des opérateurs différentiels
dégénérés ; applications (suite)**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 8, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A8_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 0 - 1 9 7 1

PROBLEMES D'ANALYTICITE POUR DES OPERATEURS

DIFFERENTIELS DEGENERES ; APPLICATIONS (Suite)

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

B - THEOREME SUR LES ITERES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

§ 1. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

On considère un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord analytique réelle.

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients analytiques sur $\bar{\Omega}$ ^(*), elliptique dans Ω , dégénérant au bord. On fait l'hypothèse :

(1.1) $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ sur lui-même.

On suppose aussi qu'au voisinage d'un point du bord l'opérateur s'écrit avec les coordonnées locales (x,y) ($(x,y) \in V$ voisinage de 0 dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, y étant la variable normale) sous la forme :

$$(1.2) \quad A = D_y y D_y + \sum_{|\alpha| \leq 2} b_\alpha D_x^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq 1} c_\alpha D_x^\alpha y D_y .$$

On suppose, de plus, qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathfrak{D}(V)$:

$$(1.3) \quad \|y u\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|A u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Exemples : 1) On prend $\Omega =$ disque unité de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{A} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (1-r^2) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\text{en posant} \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta . \end{cases}$$

(*) Les coefficients de $\mathcal{A}$ et la variété $\bar{\Omega}$ peuvent être, dans certains énoncés, supposés seulement de classe Gevrey sur $\bar{\Omega}$. On laisse la vérification au lecteur !

2) On considère dans Ω :

$$\mathcal{A} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta} \varphi D^\alpha + \sum_{1 \leq k, j \leq n} \Lambda_{k,j}^* \Lambda_{k,j}$$

où φ est une fonction analytique équivalente à la distance au bord de Ω , les fonctions $a_{\alpha\beta}$ sont analytiques dans $\bar{\Omega}$ et vérifient :

$$\operatorname{Re} \sum_{|\beta|=|\alpha|=1} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \overline{\xi^\beta} \geq C |\xi|^2 \quad (C > 0)$$

et

$$\Lambda_{k,j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} D_j - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} D_k.$$

Notons que les champs de vecteurs $\Lambda_{k,j}$ sont tangents à $\partial\Omega$.

On ne montre pas ici que les opérateurs $\mathcal{A}$ des exemples 1) et 2) vérifient les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.3) (Cf. travaux de Bolley et Camus, à paraître, [2] et [4]).

§ 2. REGULARITE.

Nous avons :

Théorème 2.1 : Soient s un nombre réel ≥ 1 et u une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\omega}$ vérifiant :

il existe L telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, on ait

$$(2.1) \quad \|D_x^\alpha D_y^k A u\|_{L^2(\omega)} \leq L |\alpha| + k + 1 \frac{[(|\alpha| + 2k)!]^s}{k!}.$$

Alors, pour tout compact K de ω , il existe une constante M telle que l'on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$:

$$(2.2) \quad \|D_x^\alpha D_y^k u\|_{L^2(K)} \leq M |\alpha| + k + 1 \frac{[(|\alpha| + 2k)!]^s}{k!}.$$

VIII.3

Voici deux corollaires du théorème 2.1.

Corollaire 1 : Si $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}u$ est analytique dans $\bar{\Omega}$, alors u est aussi analytique dans $\bar{\Omega}$.

Il suffit pour le voir, de prendre $s = 1$.

Corollaire 2 : Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est analytique dans $\bar{\Omega}$.

b) Il existe une constante K telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(2.3) \quad \|\mathcal{A}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1} (2i!).$$

En effet a) implique b) puisque $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients analytiques dans $\bar{\Omega}$.

Pour montrer que b) implique a), on note, comme dans [3]

$$W(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i} \frac{(\mathcal{A}^i u)}{(2i!)}(x)$$

et on remarque que l'on a

$$(2.4) \quad (D_t^2 + \mathcal{A}) W(x, t) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \times]-\varepsilon, +\varepsilon[.$$

Comme $D_t^2 + \mathcal{A}$ est de la même forme que $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$, on déduit de (2.4) et du théorème 2.1 avec $s = 1$, l'analyticité de W , donc de $u(x) = W(x, 0)$.

Remarque 2.1 : La méthode précédente ne permet malheureusement pas de caractériser les fonctions $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et vérifiant :

$$\|\mathcal{A}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1} (2i!)^s \quad (s \text{ réel } > 1).$$

Nous utiliserons une méthode différente (et plus compliquée) pour le faire dans le paragraphe 3.

Esquisse de la démonstration du théorème 2.1 :

(pour la démonstration complète voir [1])

1) Par une méthode d'ouverts emboîtés (voir A, § 3), on démontre d'abord :

$$(2.5) \quad \|D_x^\alpha T u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+3} [(|\alpha|+2)!]^s$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, où T est l'un des opérateurs différentiels d'ordre 2 suivants :

$$D_x^\mu \quad \text{pour} \quad |\mu| = 2, \quad D_x^\mu D_y^\nu \quad \text{pour} \quad |\mu| = 1, \quad D_y^\nu D_y^\nu.$$

2) On démontre maintenant (par récurrence sur k) qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(2.6) \quad \|D_x^\alpha D_y^k y u\|_{L^2(K)} \leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^k \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!}.$$

La relation (2.2) résulte alors facilement de (2.6). Pour donner une idée de la preuve de (2.6), on prend l'écriture simplifiée suivante de A :

$$(2.7) \quad A u = D_y^\nu y y u + D_x^2 u \quad (2 \text{ variables } x \text{ et } y, n=2).$$

La relation (2.6) est vérifiée avec des constantes M_1 et M_2 pour $k=0, 1$ et 2 . On la suppose vérifiée jusqu'à l'ordre $k+1$ et on démontre qu'elle est aussi vérifiée pour $k+2$ (si M_1 et M_2 sont assez grandes indépendamment de k). On applique, pour cela, l'opérateur $D_x^\alpha D_y^k$ à l'équation (2.7). On obtient :

$$(2.8) \quad \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| = \|D_x^\alpha D_y^{k+1} u\| + \|D_x^\alpha D_y^k A u\| + \|D_x^{\alpha+2} D_y^k u\|.$$

On utilise maintenant les deux inégalités suivantes (inégalités de Hardy) :

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha D_y^{k+1} u\| &\leq \frac{2}{2k+3} \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

$$\|D_x^{\alpha+2} D_y^k u\| \leq \frac{2}{2k+1} \|D_x^{\alpha+2} D_y^{k+1} y u\| .$$

On obtient alors à partir de (2.8)

$$(2.9) \quad \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \leq 2(\|D_x^\alpha D_y^k u\| + \frac{2}{2k+1} \|D_x^{\alpha+2} D_y^{k+1} y u\|) .$$

On utilise maintenant l'hypothèse (2.1) et la relation (2.6) vraie jusqu'à l'ordre $k+1$ par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| &\leq M_1^{\alpha+1} M_2^{k+2} \frac{[(\alpha+2k+4)!]^s}{(k+2)!} \times \\ &\left\{ \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^k \frac{1}{M_2^2} \frac{2(k+2)(k+1)}{[(\alpha+2k+4) \dots (\alpha+2k+1)]^s} + \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{4(k+2)}{2k+1} \right\} . \end{aligned}$$

Il suffit donc pour avoir $\{ \} \leq 1$ de supposer

$$M_1 \geq M \quad , \quad M_2 \geq M \quad , \quad \frac{1}{M_2^2} \geq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad 8 \frac{M_1^2}{M_2^2} \leq \frac{1}{2} .$$

§ 3. THEOREME DES LEMMES LE $\mathcal{A}$.

On introduit la notation :

$$R_k = \begin{cases} (D_y y D_y)^p & \text{si } k = 2p \\ y D_y (D_y y D_y)^p & \text{si } k = 2p + 1 \end{cases} .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$(3.1) \quad R_k R_{2p} = R_{k+2p}$$

$$[R_k, y D_y] = [R_k, R_1] = \left\{\frac{1}{2}\right\} R_k$$

où $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ est la partie entière de $\frac{k}{2}$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit s un nombre réel ≥ 1 . On se donne une fonction

$u \in \mathcal{D}(\bar{\omega})$ vérifiant la condition suivante : il existe une constante C telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on ait

$$(3.2) \quad \|A^i u\|_{L^2(\omega)} \leq C^{i+1} (2i!)^s .$$

Alors, pour tout compact K de $\bar{\omega}$, il existe une constante M , vérifiant, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(3.3) \quad \|D_x^\alpha R_k u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+k+1} [(|\alpha|+k)!]^s .$$

Avant de donner une esquisse de la démonstration du théorème 3.1, donnons-en quelques conséquences. Commençons par la

Définition 3.1 : On désigne par $\mathcal{Q}_s(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions

$u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap G_s(\bar{\Omega})$ et vérifiant la relation (3.3) sur toute carte locale voisine d'un point du bord de Ω .

On a alors

Proposition 3.1 : 1) $\mathcal{Q}_s(\bar{\Omega})$ est un $G_s(\bar{\Omega})$ module.

2) On a alors les inclusions

$$G_s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{Q}_s(\bar{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\bar{\Omega})$$

(en particulier $\mathcal{Q}_1(\bar{\Omega}) =$ l'espace des fonctions analytiques sur $\bar{\Omega}$).

On donne ici la démonstration de 2).

On commence par démontrer par récurrence sur k que l'on a :

$$(3.4) \quad R_{2k} D_y^v v(x, y) = \frac{1}{y^{k+1}} \int_0^y t^k R_{2(k+1)} v(x, t) dt$$

ou en déduit (inégalité de Hardy) :

$$\|R_{2k} D_y^v v\|_{L^2(K)} \leq \frac{2}{2k+1} \|R_{2(k+1)} v\|_{L^2(K)}.$$

En réitérant (3.4), on trouve, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|D_y^k D_x^\alpha u\| \leq \frac{2^k}{k!} \|R_{2k} D_x^\alpha u\|.$$

Si u vérifie (3.3), elle vérifie donc aussi la relation

$$\|D_y^k D_x^\alpha u\| \leq (2M)^k \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!}$$

ce qui démontre le 2) de la proposition.

Théorème 3.2 : Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $u \in \mathcal{Q}_s(\bar{\Omega})$
- b) Il existe une constante K telle que l'on ait, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\|\mathcal{A}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1} (2i!)^s.$$

La démonstration de "a) implique b)" est laissée au lecteur.

Le fait que "b) implique a)" résulte du théorème 3.1. (Pour $s=1$, on retrouve le corollaire 2 du théorème 2.1).

Esquisse de la démonstration du théorème 3.1 :

(La démonstration détaillée se trouve dans [1]).

1) On démontre d'abord la relation

$$(3.5) \quad \|D_x^\alpha T A^i u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+2+1} (|\alpha|+2i+2)!^s$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, où T est l'un des opérateurs D_x^μ pour $|\mu| = 2$, $D_x^\mu y D_y$ pour $|\mu| = 1$, $D_y y D_y$. On utilise pour cela une méthode "d'ouverts emboîtés", (voir A).

2) On démontre maintenant qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que l'on ait, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$

$$(3.6) \quad \|D_x^\alpha R_k A^i u\|_{L^2(K)} \leq M_1^{|\alpha|+2i+1} M_2^k [(|\alpha|+k+2i)!]^s.$$

La relation (3.3) résulte alors de (3.6).

Pour démontrer (3.6), on raisonne par récurrence sur k . La relation (3.5) montre que (3.6) est vraie pour $k=0, 1$ et 2 (avec un certain choix de M_1 et M_2). On suppose que (3.6) est vraie jusqu'à l'ordre $k+1$, et on la démontre pour $k+2$. On applique alors l'opérateur $D_x^\alpha R_k$ à l'équation (1.2), il vient :

$$(3.7) \quad R_{k+2} D_x^\alpha A^i u = R_k D_x^\alpha A^{i+1} u - \sum_{|\mu| \leq 2} R_k D_x^\alpha b_\mu D_x^\mu A^i u - \sum_{|\mu| \leq 1} R_k D_x^\alpha c_\mu D_x^\mu A^i u.$$

On a besoin d'une "formule de Leibnitz" pour les opérateurs R_k :

Lemme 3.1 : Pour tout couple d'entiers m et k vérifiant

$$0 \leq m \leq k,$$

il existe un opérateur différentiel unique P_m^k de degré $k-m$ et à coefficients polynômes en y , vérifiant pour tous f et g fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\omega}$:

$$(3.8) \quad R_k(f, g) = \sum_{m=0}^k R_m(f) P_m^k(g) \quad .$$

En outre, si g est dans $G^s(\bar{\omega})$, il existe une constante L ne dépendant que de g telle que l'on ait, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $k, j \in \mathbb{N}$ ($j \leq k$) ;

$$(3.9) \quad \|P_j^k D_x^\alpha g\|_{L^\infty(\omega)} \leq L |\alpha|^{+k-+1} [(|\alpha|+k-j)!]^s \quad .$$

Pour achever la démonstration du théorème 3.1', il suffit d'appliquer à (3.7) la formule de Leibnitz habituelle, ainsi que (3.8) et (3.9), et d'utiliser (3.6), vraie par hypothèse de récurrence jusqu'à l'ordre $k+1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. (A paraître).
- [2] P. Bolley et J. Camus : Note C. R. Acad. Sc. (Octobre-Novembre 1970).
- [3] J. L. Lions et E. Magènes : Problèmes aux limites non homogènes, t. 3 (Dunod) Paris.
- [4] H. Triebel : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung. Math. Ann. 177 (1968) p. 247-264.