

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ANDRÉ UNTERBERGER

## Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1970-1971), exp. n° 5,  
p. 1-13

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1970-1971\\_\\_\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A5_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V  
Téléphone : MÉDiciS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE VARIABLE ET APPLICATIONS  
-----

par André UNTERBERGER



§ 1. DEFINITIONS ET PROPRIETES GENERALES.

On conserve les notations des exposés 3 et 4.

Soit  $\phi \in \mathcal{J}_{\infty}(X; \mathbb{R}) = \mathcal{J}(X; \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ , espace des fonctions sur  $X$  à valeurs réelles qui sont sommes d'une constante et d'un élément de  $\mathcal{J}(X)$ ; soit  $k$  un nombre réel.

Définition (I.1) : On désigne par  $S^{\rho, k}$  l'espace des fonctions  $a$  de classe  $C^{\infty}$  sur  $X \times \Xi$ , à valeurs complexes, satisfaisant les conditions suivantes :

1)  $\forall p, q \in \mathbb{N}^n, \forall M \in \mathbb{N}, \exists C > 0$  telle que

$$(1+|x|^2)^M |p| |D_x^p \partial_{\xi}^q a(x, \xi)| \leq C (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\rho(x)-|q|)} [1+\text{Log}(1+|\xi|^2)]^{k+|p|}$$

2) il existe une fonction de classe  $C^{\infty}$  sur  $\Xi$ , notée  $a(\infty, \xi)$ , telle que, pour tout  $q \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial_{\xi}^q a(x, \xi)$  tende vers  $\partial^q a(\infty, \xi)$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , et il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\partial^q a(\infty, \xi)| \leq C (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\rho(\infty)-|q|)} [1+\text{Log}(1+|\xi|^2)]^k.$$

Remarques :  $\rho(\infty)$  désigne bien sûr la limite de  $\rho(x)$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

Cette classe est introduite en vue de permettre la considération du symbole

$$a_{\rho, k}(x, \xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\rho(x)}{2}} [1+\text{Log}(1+|\xi|^2)]^k.$$

On notera que la fonction  $a$  elle-même et ses dérivées par rapport à  $\xi$  ne sont pas supposées être à décroissance rapide en  $x$ .

Enfin, dans le cas où  $\rho$  est constante, on distinguera l'espace  $S^{\rho, 0}$  et l'espace  $S^{\rho}$  qui a été introduit dans l'exposé N°3 : on a bien l'inclusion  $S^{\rho} \subset S^{\rho, 0}$ , mais non l'égalité.

Proposition (I.1) : Soient  $m$  et  $M$  deux nombres réels satisfaisant les inégalités  $m < \inf c \leq \sup c < M$ . Alors  $S^m \subset S^{\rho, k} \subset S^M$  pour tout  $k$  réel.

Le seul point non trivial concerne la deuxième inclusion, et en fait seulement l'estimation de  $\partial^q a(\infty, \xi) - \partial^q a(x, \xi)$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . Posons  $x = (x_1, x')$  avec  $x' = (x_2, \dots, x_n)$  ; choisissons  $M'$  vérifiant  $\sup c < M' < M$  ; soit  $K \in \mathbb{N}$  et supposons par exemple  $x_1 > 0$ .

On écrit alors

$$\begin{aligned} |\partial^q a(\infty, \xi) - \partial^q a(x, \xi)| &= \left| \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_1} \partial^q a(y_1, x', \xi) dy_1 \right| \\ &\leq C \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{(1+|x'|^2 + y_1^2)^K} (1+|\xi|^2)^{\frac{M'-|q|}{2}} [1 + \text{Log}(1+|\xi|^2)]^{k+1} dy_1 \end{aligned}$$

et on conclut par l'inégalité

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{dy_1}{(1+|x'|^2 + y_1^2)^K} \leq \min \left( (1+|x'|^2)^{\frac{1}{2}-K}, \frac{x_1^{1-2K}}{2K-1} \right) \leq \frac{1}{x_1^{2K-1}} x_1^{\frac{1}{2}-K} (1+|x'|^2)^{\frac{1}{4}-\frac{K}{2}}.$$

Proposition (I.2) : Si  $a \in S^{\rho, k}$  et  $b \in S^{\sigma, j}$ , alors  $D_x^p \partial_{\xi}^q a \in S^{\rho-|q|, k+|p|}$  et  $ab \in S^{\rho+\sigma, k+j}$ . De plus,  $a \# b \in S^{\rho+\sigma, k+j}$  et  $a_* \in S^{\rho, k}$  (cf. exposé N°4 pour la définition de l'opérateurs de composition  $\#$ , ainsi que pour celle de l'opérateur  $*$ ).

Les deux premiers points se prouvent sans difficulté. Pour les deux derniers, il est inutile de refaire une démonstration : on écrit "assez loin" les développements asymptotiques de  $a \# b$  et de  $a_*$  qui ont été établis dans l'exposé N°4, et on se sert de la proposition (I.1) et de la première moitié de la proposition (I.2)

Lemme (I.1) : Posons

$$a_{o,k}(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{\rho(x)}{2}} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^{-k}.$$

Il existe une suite  $(b_j)_{j \geq 0}$ ,  $b_j \in S^{-\rho-j, -k+j}$ , telle que, pour tout j, on ait

$$(b_o + \dots + b_{j-1}) \# a_{o,k} - 1 \in S^{-j, j}.$$

La preuve est immédiate par récurrence.

On pose  $b_o = a_{-o, -k}$  et, si

$$c_j = (b_o + \dots + b_{j-1}) \# a_{\rho, k} - 1, \text{ on pose } b_j = -c_j b_o.$$

Lemme (I.2) : Soit  $a \in S^{\rho, k}$ , et supposons que l'opérateur  $Op(a)$  soit autoadjoint. Alors  $Im a \in S^{\rho-1, k+1}$ .

Cela résulte de l'unicité du symbole d'un opérateur pseudo-différentiel, et de la formule qui donne le développement du symbole  $(\bar{a})_*$  de l'adjoint de  $Op(a)$ .

Lemme (I.3) : Soit  $a \in S^{2\rho, 2k}$ , et supposons que l'opérateur  $A = Op(a)$  soit autoadjoint. Supposons de plus qu'il existe  $C > 0$  et  $R > 0$  telles que

$$\text{Re } a(x, \xi) \geq C(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2k} \text{ pour } |\xi| \geq R.$$

Il existe alors

une suite  $(b_j)_{j \geq 0}$ ,  $b_j \in S^{\rho-j, k+j}$ , telle que, si l'on pose  $B_j = Op(b_j)$ , et si l'on appelle  $B_j^*$  l'adjoint de  $B_j$ , le symbole de l'opérateur  $A - (B_o^* + \dots + B_{j-1}^*)(B_o + \dots + B_{j-1})$  appartienne à  $S^{2\rho-j, 2k+1}$  pour tout  $j \geq 1$ . En particulier, quel que soit  $K \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_1 > 0$  telle que l'on ait, quelle que soit  $u \in \mathcal{D}(X)$  :

$$\text{Re } (Au, u) \geq -C_1 \|u\|_{-K}^2.$$

La deuxième partie du lemme est une conséquence immédiate de la première.

La première partie se prouve par récurrence.

On choisit  $b_0(x, \xi) = [\operatorname{Re} a(x, \xi)]^{1/2}$  en dehors d'un certain voisinage de  $\xi = 0$ , avec un prolongement convenable dans ce voisinage.

Puis, si  $c_j$  est le symbole de  $A - (B_0^* + \dots + B_{j-1}^*)(B_0 + \dots + B_{j-1})$ , on posera  $b_j = \frac{i}{2b_0}$  en dehors d'un voisinage de  $\xi = 0$ ; on se servira pour conclure du lemme (I.2).

Définition (I.2) : Soient  $\rho \in \mathcal{J}_\infty(X; \mathbb{R})$ , et  $k \in \mathbb{R}$ .

On désigne par  $H^{\rho, k}(X)$  l'espace des distributions  $u \in H^{-\infty}(X)$  telles que  $A^{\rho, k}u$  appartienne à  $L^2(X)$ ,  $A_{\rho(x)}^{\rho, k}$  étant l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $a_{\rho, k}(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\rho}{2}} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^k$ .

Proposition (I.3) : Soient  $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{J}_\infty(X; \mathbb{R})$ ; et soient  $k, j, \ell$  trois nombres réels. Supposons que l'on ait soit  $\inf(\rho - \sigma - \tau) > 0$ , soit  $\rho - \sigma - \tau \geq 0$  pour tout  $x \in X$  et  $k - j - \ell \geq 0$ . Alors si  $u \in H^{\rho, k}$  et si  $a \in S^{\sigma, j}$ ,  $Op(a)u \in H^{\tau, \ell}(X)$ . En particulier on a  $H^{\rho, k}(X) \subset H^{\tau, \ell}(X)$  si  $\inf(\rho - \tau) > 0$  ou bien  $\rho - \tau \geq 0$  et  $k - \ell \geq 0$ .

La deuxième partie de la proposition est un cas particulier de la première. Pour celle-ci, il s'agit de prouver que si  $u \in H^{-\infty}(X)$  et si  $A^{\rho, k}u \in L^2(X)$ , alors  $A^{\tau, \ell}Op(a)u \in L^2(X)$ .

Soit  $B$  un inverse à gauche de  $A^{\rho, k}$  modulo un opérateur "suffisamment améliorant" :  $B$  est fourni par le lemme (I.1) et son symbole appartient à  $S^{-\rho, -k}$ . On est ramené à prouver que  $A^{\tau, \ell}Op(a)B$  opère continûment de  $L^2(X)$  dans  $L^2(X)$  : or le symbole de cet opérateur pseudo-différentiel appartient à  $S^{\tau + \sigma - \rho, \ell + j - k}$ , et donc à  $S^{0, 0}$  en vertu des hypothèses faites.

Finalement, on est ramené à montrer qu'un opérateur pseudo-différentiel  $G$  de symbole  $g \in S^{0, 0}$  opère continûment de  $L^2(X)$  dans  $L^2(X)$ . A cet effet, soit  $C$  la borne supérieure de la partie réelle du symbole de  $G^*G$ , et soit  $C_1 > C$ . L'opérateur  $C_1 - G^*G$  vérifie les hypothèses du lemme (I.3) et il existe par

conséquent  $C_2 > 0$  telle que l'on ait

$$C_1 \|u\|^2 - \|Gu\|^2 \geq -C_2 \|u\|_{-1}^2$$

pour toute fonction  $u \in \mathcal{J}(X)$ .

Ceci conclut la preuve de la proposition (I.3).

Définition et Proposition (I.4) : Soient  $\phi \in \mathcal{J}_\infty(X; \mathbb{R})$ ,  $k$  et  $m$  deux nombres réels tels que  $m < \inf \phi(x)$ . On pose

$$\|u\|_{\phi, k}^2 = \|A^{\phi, k} u\|_0^2 + \|u\|_m^2$$

pour toute distribution  $u \in H^{\phi, k}(X)$ .

La norme ainsi définie ne dépend pas de  $m$ , à l'équivalence des normes près. Ni l'espace  $H^{\phi, k}(X)$  ni sa topologie ne dépendent du choix de la forme quadratique  $|\xi|^2$ . L'espace  $H^{\phi, k}(X)$  est complet.  $\mathcal{J}(X)$  y est dense. Enfin, le dual de  $H^{\phi, k}(X)$  est  $H^{-\phi, -k}(X)$  pour la dualité prolongeant celle entre  $\mathcal{D}(X)$  et  $\mathcal{D}'(X)$ .

Tout ceci se démontre sans peine, en utilisant des lemmes déjà établis, à l'exception de la densité de  $\mathcal{J}(X)$  dans  $H^{\phi, k}(X)$ , laquelle (pas difficile à prouver non plus) nécessite un examen du crochet de l'opérateur  $A^{\phi, k}$  et d'un opérateur de régularisation, que nous passons sous silence.

Remarque : Soit  $K$  un compact de  $X$ .

Pour définir l'espace  $H_K^{\phi, k}(X)$ , intersection de  $H^{\phi, k}(X)$  avec  $\mathcal{E}'_K(X)$ , on n'a besoin que de la connaissance de  $\phi$  dans un voisinage de  $K$ , comme on s'en convainc en utilisant le caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels. Il est facile d'énoncer et de prouver l'invariance des espaces  $H_K^{\phi, k}$  par difféomorphisme.

Lorsque  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , ou plus généralement une variété réelle  $\ell$  dénombrable à l'infini, on voit comment définir les espaces  $H_{\text{comp}}^{\phi, k}(\Omega)$ <sup>♦</sup>, duaux l'un de l'autre, sans faire sur  $\phi$  d'autre hypothèse que celle de différentiabilité indéfinie (bien entendu, dans le cas d'une variété il faut consi-

---

<sup>♦</sup> ou  $H_{\text{loc}}^{-\phi, -k}(\Omega)$

définir des espaces de section de certains fibrés ou bien introduire une métrique riemannienne pour définir cette dualité).

## § 2. UNE NORME "A LA HÖRMANDER" SUR LES ESPACES $H^{c,k}$ .

Tout ce paragraphe sera consacré à la démonstration du fait suivant :

Théorème (II.1) : Soient  $\phi \in \mathcal{J}_\infty(X; \mathbb{R})$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\phi \in \mathcal{J}(X)$ , à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

a) il existe  $M > 0$ ,  $M > \sup \phi$ , tel que

$$\hat{\phi}(\xi) = o(|\xi|^{2M}) \quad \text{quand} \quad |\xi| \rightarrow 0$$

b)  $\hat{\phi}$  ne s'annule identiquement sur aucune demi-droite issue de l'origine.

Pour tout  $t$  réel  $> 0$ , on pose  $\varphi_t(x) = t^{-n} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$ .

Soit enfin  $a < \frac{1}{2}$ .

Il existe alors trois constantes positives  $C_1, C_2, C$  telles que, pour toute fonction  $u \in \mathcal{J}(X)$ , on ait :

$$\begin{aligned} C_1 \int_0^{1/2} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx &\leq \|u\|_{\rho, k}^2 \\ &\leq C_2 \int_0^{1/2} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx + C \|u\|_{\rho-a}^2. \end{aligned}$$

Remarques : Les restrictions  $M > 0$  et  $2M > \sup \phi$  sont essentielles ; la condition  $M > \sup \phi$  ne l'est pas, mais simplifiera la démonstration d'un lemme à la fin.

Par ailleurs en appliquant plusieurs fois la deuxième inégalité annoncée, on voit qu'on peut remplacer le terme complémentaire  $\|u\|_{\rho-a}^2$  par  $\|u\|_{-N}^2$  aussi grand que soit  $N$ .

Enfin, on remarquera en cours de démonstration qu'on peut remplacer la borne supérieure  $\frac{1}{2}$  de l'intégrale par n'importe quel nombre positif inférieur à 1 : ceci permet d'utiliser les mêmes estimations si  $\phi$  n'est définie et  $C^\infty$  que dans un ouvert  $\Omega$  de  $X$  (sans conditions de croissance vers le bord), pourvu qu'on se limite aux fonctions  $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ ,  $K$  étant un compact fixe de  $\Omega$ .

Lemme (II.1) : Posons  $\phi = \phi * \check{\phi}$ , d'où  $\hat{\phi} = |\hat{\phi}|^2$ , et

$$f(x, \xi) = \int_0^{1/2} (\text{Log } \frac{1}{t})^{2k} t^{-2\rho(x)} \hat{\phi}(t\xi) \frac{dt}{t}.$$

Il existe deux constantes  $C > 0$  et  $R > 0$  telles que l'on ait

$$\frac{1}{C} f(x, \xi) \leq (1 + |\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2k} \leq C f(x, \xi)$$

pour  $|\xi| \geq R$ .

De plus, l'opérateur  $S$  défini par

$$S u(x) = \int f(x, \xi) e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi) d\xi = \int_0^{1/2} (\text{Log } \frac{1}{t})^{2k} t^{-2\rho(x)} (\phi_t * u)(x) \frac{dt}{t}$$

opère continûment de  $H^{2M}(X)$  dans  $L^2(X)$ .

Remarquons d'abord que l'intégrale qui définit  $f(x, \xi)$  est convergente pour  $\xi \neq 0$  en vertu de l'inégalité  $\hat{\phi}(t\xi) \leq C t^{2M} |\xi|^{2M}$ .

Après le changement de variable défini par  $t|\xi| = \theta$ , et en posant  $\eta = \xi/|\xi|$ , on obtient

$$f(x, \xi) = |\xi|^{2\rho(x)} (\text{Log } |\xi|)^{2k} g(x, \xi) \quad \text{avec}$$

$$g(x, \xi) = \int_0^{\frac{1}{2}|\xi|} \left[ \frac{\text{Log } \frac{1}{\theta}}{1 + \frac{\text{Log } \frac{1}{\theta}}{\text{Log } |\xi|}} \right]^{2k} \theta^{-2\rho(x)} \hat{\phi}(\theta\eta) \frac{d\theta}{\theta}.$$

Dans l'intervalle d'intégration, on a toujours  $1 + \frac{\text{Log } \frac{1}{\theta}}{\text{Log } |\xi|} > 0$ .

Par ailleurs, si  $k \geq 0$ , on écrira

$$1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} |\xi|} \leq 1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} 2} \quad \text{pour } \theta \leq 1, \text{ et } \leq 1 \quad \text{pour } \theta \geq 1.$$

Si  $k < 0$ , on écrira

$$1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} |\xi|} \geq 1 \quad \text{pour } \theta \leq 1, \text{ et } \geq \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} (2\theta)} \quad \text{pour } \theta \geq 1.$$

Dans les deux cas, on conclut par le théorème de convergence dominée que la fonction  $g(x, \xi)$  est continue pour  $\xi \neq 0$ , et tend lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ ,  $\eta$  restant fixe, vers l'intégrale  $\int_0^\infty \theta^{-2\rho(x)} \hat{\phi}(\theta \eta) \frac{d\theta}{\theta}$ , laquelle est une fonction continue et strictement positive de  $\rho(x)$  et de  $\eta$ .

La double inégalité annoncée en résulte.

Pour estimer  $\|Su\|$ , choisissons  $M'$  tel que  $\sup \rho < M' < M$ , et écrivons

$$(Su, v) = \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2k} t^{2M-2M'} (t^{-2M}(\phi_t * u), t^{2M'-2\rho(x)} v) \frac{dt}{t}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \|t^{-2M}(\phi_t * u)\|_0^2 &= t^{-4M} \int (\hat{\phi}(t\xi))^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \int |\xi|^{\frac{4M}{2}} |u(\xi)|^2 d\xi \leq C \|u\|_{2M}^2. \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad |(Su, v)| \leq C \|u\|_{2M} \|v\|_0 \quad \text{et} \quad \|Su\|_0 \leq C \|u\|_{2M}.$$

Lemme (II.2) : Il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que l'on ait, pour toute fonction  $u \in \mathcal{D}(X)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \operatorname{Re} \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\phi_t * u)(x) \overline{u}(x) dx &\leq \|u\|_{\rho, k}^2 \\ &\leq C_1 \operatorname{Re} \int_0^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\phi_t * u)(x) \overline{u}(x) dx + C_2 \|u\|_{0-a}^2. \end{aligned}$$

Soit en effet  $\alpha$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Xi$ , à valeurs réelles, égale à 0 pour  $|\xi| \leq \frac{1}{2}$  et à 1 pour  $|\xi| \geq 1$ . La fonction  $h(x, \xi) = \alpha(\xi) f(x, \xi)$  (cf. lemme II.1) appartient à l'espace  $S^{2\rho, 2k}$  comme il résulte facilement

du lemme (II.1), et l'inégalité

$$\frac{1}{C} h(x, \xi) \leq (1 + |\xi|^2)^{O(x)} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2k} \leq C h(x, \xi)$$

reste valable pour  $|\xi|$  assez grand.

Soit  $H$  l'opérateur autoadjoint  $\frac{1}{2} [Op(h) + Op(h)^*]$  : son symbole diffère de  $h(x, \xi)$  par un élément de  $S^{2O-1, 2k+1}$  : par ailleurs, le symbole de l'opérateur  $(A^{O, k})^* A^{O, k}$  diffère de  $(1 + |\xi|^2)^{O(x)} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2k}$  par un élément de  $S^{2O-1, 2k+1}$ .

Si  $C_1 > C$ , et si  $B$  est l'un des deux opérateurs  $C_1 H - (A^{O, k})^* A^{O, k}$  et  $(A^{O, k})^* A^{O, k} - \frac{1}{C_1} H$ , il résulte alors du lemme (I.3) que l'on a

$$\text{Re}(Bu, u) \geq -C_3 \|u\|_{O-a}^2.$$

Enfin, si  $b(x, \xi) \in S^{2O-1, 2k+1}$ , on a

$$|(Op(b)u, u)| \leq C_4 \|u\|_{O-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^2 \leq C_4 \|u\|_{O-a}^2.$$

Il résulte de tout cela que l'on a

$$\frac{1}{C_1} \text{Re}(Op(h)u, u) - C_5 \|u\|_{O-a}^2 \leq \|u\|_{O, k}^2 \leq C_1 \text{Re}(Op(h)u, u) + C_5 \|u\|_{O-a}^2.$$

Comme  $Op(h) = S Op(\alpha)$ , où  $S$  est défini dans le lemme (II.1), et comme  $Op(\alpha-1)$  opère continûment de  $H^{-\infty}(X)$  dans  $H^{\infty}(X)$ , on voit que pour terminer la preuve du lemme (II.2) il suffit de prouver que pour  $s$  entier  $> 0$  il existe  $r$  tel que  $S$  opère continûment de  $H^r(X)$  dans  $H^s(X)$ .

On l'a déjà vu dans le lemme (II.1) pour  $s = 0$ . En précisant les notations, et en appelant ici  $S_{O, k}$  l'opérateur que nous avons appelé  $S$ , on s'en tire dans le cas général au moyen de la formule  $\frac{\partial}{\partial x_j} S_{O, k} = S_{O, k} \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} S_{O, k} - \frac{1}{2}$  et de celles qu'on obtient en itérant cette dernière.

En partant du lemme (II.2), en écrivant

$$t^{-2\rho(x)} \varphi_t * u = \check{\varphi}_t * (t^{-2\rho(x)} (\varphi_t * u)) + L_t (t^{-2\rho(x)} \varphi_t * u) ,$$

avec  $L_t v = t^{-2\rho(x)} \check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)} v) - \check{\varphi}_t * v$ , et en notant que l'adjoint de  $\check{\varphi}_t *$  est  $\varphi_t *$ , on voit que pour terminer la preuve du théorème (II.1) il suffit d'établir le lemme suivant.

Lemme (II.3) : Soit  $L_t = t^{-2\rho(x)} \check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)} \cdot) - \check{\varphi}_t *$ .

Il existe  $\varepsilon > 0$  et une constante  $C > 0$  telle que l'on ait, pour tout  $t > 0$  assez petit et toute fonction  $u \in \mathcal{D}(X)$ , l'inégalité

$$\|L_t (t^{-2\rho(x)} \varphi_t * u)\|_{-\rho+a} \leq C t^\varepsilon \|u\|_{\rho-a} .$$

Toutes les constantes qui figurent dans la démonstration de ce lemme seront indépendantes de  $t$  ( $0 < t < t_0$ ).

Choisissons  $\varepsilon = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - a)$ . On peut, par une partition finie de l'unité, se ramener au cas où l'oscillation de  $\rho$  est strictement inférieure à  $\varepsilon$  (rappelons que  $\rho(x)$  tend vers une constante à l'infini) ; on pose alors  $\rho(x) = \rho_0 + \sigma(x)$ , avec  $\sigma(x) \geq 0$  pour tout  $x \in X$  et  $\sup \sigma(x) < \varepsilon$ .

Ecrivons

$$\begin{aligned} (L_t v)(x) &= \int \varphi_t(y-x) [t^{2\rho(y)-2\rho(x)} - 1] v(y) dy \\ &= \int \varphi(z) [t^{2\rho(x+tz)-2\rho(x)} - 1] v(x+tz) dz . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $|e^{ab} - 1| \leq |b| e^{|a|}$ , valable pour  $|b| \leq 1$ , avec  $b = t \operatorname{Log} \frac{1}{t}$  et  $a = \frac{2}{t} (\rho(x) - \rho(x+tz))$ , on obtient

$$\begin{aligned} |(L_t v)(x)| &\leq C t \operatorname{Log} \frac{1}{t} \int |\varphi(z)| |v(x+tz)| dz \\ &= C t \operatorname{Log} \frac{1}{t} (\check{\varphi}_t * |v|)(x) . \end{aligned}$$

D'où  $\|L_t v\|_0 \leq C t \log \frac{1}{t} \|v\|_0$ .

En itérant la formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} L_t &= L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{t} [L_t + \psi_t^*] \\ &\quad - 2 \log \frac{1}{t} [L_t + \psi_t^*] \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \\ &= L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \log \frac{1}{t} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} L_t - 2 \log \frac{1}{t} L_t \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) + 2 \log \frac{1}{t} M_t, \end{aligned}$$

avec  $M_t = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} \psi_t^* + \psi_t^* \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} \right)$ ,

et en tenant compte des inégalités faciles  $\|M_t v\|_s \leq C t \|v\|_s$ , on obtient pour  $s$  entier positif l'inégalité

$$\|L_t v\|_s \leq C t \left( \log \frac{1}{t} \right)^{|s|+1} \|v\|_s.$$

Cette inégalité reste valable pour  $s$  entier négatif étant donné que

$L_t^* = -[t^{2\sigma(x)} \varphi_t^*(t^{-2\sigma(x)}) - \varphi_t^*]$ , donc pour tout  $s$  réel par interpolation.

On peut alors écrire

$$\|L_t v\|_{-\rho_0+a} \leq \|L_t v\|_{-\rho_0+a} \leq C t^{1-\varepsilon} \|v\|_{-\rho_0+a},$$

et il ne reste plus qu'à établir l'inégalité

$$t^{1-\varepsilon} \|t^{-2\sigma(x)} (\varphi_t^* u)\|_{-\rho_0+a} \leq C t^\varepsilon \|u\|_{\rho_0-a},$$

ou encore

$$\|t^{-2\sigma(x)+2\varepsilon} t^{-2\rho_0+1-4\varepsilon} \varphi_t^* u\|_{-\rho_0+a} \leq C \|u\|_{\rho_0-a}.$$

Comme  $\inf(-2\sigma(x) + 2\varepsilon) > 0$ , l'opérateur de multiplication par  $t^{-2\sigma(x)+2\varepsilon}$  a une norme, en tant qu'opérateur de  $H^s(X)$  dans  $H^s(X)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) bornée indépendamment de  $t$  : cela est évident pour  $s=0$ , puis pour  $s$  entier positif,

d'où l'on conclut par dualité et interpolation. Pour finir, on écrit

$$\|t^{-2\rho_0+1-4\varepsilon} \varphi_t * u\|_{-\rho_0+a}^2 = \int (1+|\xi|^2)^{\rho_0-a} |\hat{u}(\xi)|^2 \beta(t, \xi) d\xi, \quad ,$$

avec  $\beta(t, \xi) = (1+|\xi|^2)^{-2\rho_0+2a} t^{-4\rho_0+2-8\varepsilon} |\hat{\phi}(t\xi)|^2$ , et on utilise l'inégalité  $|\hat{\phi}(t\xi)| \leq C t^{\frac{2(\rho_0-a)}{2(\rho_0-a)}} |\xi|^{2(\rho_0-a)}$  pour  $|\xi| \geq 1$ .

Ceci termine la preuve du théorème (II.1).

### § 3. APPLICATION : INEGALITES $L^2$ ET REGULARITE.

Théorème (III.1) : Soient  $P(D)$  et  $Q(D)$  deux opérateurs différentiels sur  $X$  à coefficients constants,  $\Omega$  un ouvert de  $X$ ,  $\rho$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , à valeurs réelles, et  $m$  un nombre réel.

Supposons que pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $\tau_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout nombre réel  $\tau \geq \tau_0$  et toute fonction  $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ , on ait l'inégalité

$$\int e^{2\tau\rho(x)} |Q(D)u(x)|^2 dx \leq \frac{C}{\tau^m} \int e^{2\tau\sigma(x)} |P(D)u(x)|^2 dx \quad .$$

Alors pour toute distribution  $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$  et tout nombre réel  $k$  tels que  $P(D)u \in H_{\text{comp}}^{\sigma, k}(\Omega)$ ,  $Q(D)u$  appartient à  $H_{\text{comp}}^{\rho, k+\frac{m}{2}}(\Omega)$ .

Soit en effet  $L$  un compact de  $\Omega$  ; soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $d(L, \partial\Omega) > \varepsilon$  et soit  $K$  l'ensemble compact des points  $x$  de  $X$  satisfaisant  $d(x, L) \leq \varepsilon$ .

Choisissons  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$  vérifiant les conditions du théorème (II.1) et l'estimation  $\hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{-2M})$  quand  $|\xi| \rightarrow 0$ , avec  $M > \max(\sup_L \rho, \sup_L \sigma)$ .

Soit  $u \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ .

En posant  $t = e^{-\tau}$  et en appliquant l'inégalité  $L^2$  à la fonction  $v = \varphi_t * u$ , on obtient

$$\int t^{-2\rho(x)} |Q(D)(\varphi_t * u)(x)|^2 dx \leq C (\text{Log } \frac{1}{t})^{-m} \int t^{-2\sigma(x)} |P(D)(\varphi_t * u)(x)|^2 dx$$

pour  $0 < t < e^{-\tau_0}$ .

En commutant  $\varphi_t^*$  avec chacun des opérateurs à coefficients constants  $P(D)$  et  $Q(D)$ , et en intégrant par rapport à la mesure  $(\text{Log } \frac{1}{t})^{2k+m} \frac{dt}{t}$ , on obtient, compte tenu du théorème (II.1) :  
quel que soit  $N$  réel, il existe  $C_1 > 0$  tel que, pour toute fonction  $u \in \mathcal{D}'_L(\Omega)$ , on ait

$$\|Q(D)u\|_{\sigma, k + \frac{m}{2}}^2 - C_1 \|Q(D)u\|_{-N}^2 \leq C \|P(D)u\|_{\sigma, k}^2.$$

On en déduit le théorème (III.1) par régularisation.

Remarque : Plaçons-nous dans le cas fréquent où  $\rho = \sigma$  et  $Q = 1$ . Si  $\Omega$  est  $P(-D)$ -convexe (i.e.  $P(-D)\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ ), on voit par dualité que pour toute distribution  $f \in H_{\text{loc}}^{-\rho, -k - \frac{m}{2}}(\Omega)$  il existe  $g \in H_{\text{loc}}^{-\rho, -k}(\Omega)$  telle que  $P(-D)g = f$ . On trouvera de nombreuses inégalités  $L^2$  de ce genre dans le livre de F. Trèves : Linear Partial Differential Equations, publié chez Gordon and Breach.

Le cas le plus intéressant (toujours dans le cas de la remarque) est celui où toute fonction réelle continue dans  $\Omega$  est majorée par une fonction  $u$  pour laquelle l'inégalité  $L^2$  est valable : car dans ce cas on en conclut que  $P(-D)\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$ , autrement dit que  $\Omega$  est fortement  $P(-D)$ -convexe.