

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. UNTERBERGER

J. UNTERBERGER

## **Opérateurs pseudo-différentiels**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1970-1971), exp. n° 3,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1970-1971\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A3_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

-----

par A. et J. UNTERBERGER



§ 0. INTRODUCTION

Considérons un opérateur différentiel  $P(x,D)$  sur  $\mathbb{R}^n$ , d'ordre  $m$ , à coefficients  $C^\infty$  :

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha .$$

On peut écrire :

$$(1) \quad P(x,D) u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi) \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi ,$$

où  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier de la fonction  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , où  $x\xi$  dénote le produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $\xi$  de  $\mathbb{R}^n$  et où la fonction  $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ , polynôme en  $\xi$ , est appelée le symbole de l'opérateur  $P(x,D)$ .

On est alors tenté de définir par la formule (1) des opérateurs plus généraux associés à des fonctions ou "symboles"  $p(x,\xi)$  qui ne sont plus nécessairement des polynômes en  $\xi$ . Ces nouveaux opérateurs sont appelés opérateurs pseudo-différentiels.

Il est bien sûr nécessaire d'imposer certaines restrictions aux symboles  $p(x,\xi)$  pour que l'égalité de définition (1) prenne un sens.

L'ensemble des conditions imposées aux symboles est toujours en partie arbitraire, et dépend d'ailleurs des auteurs : la classe de symboles que nous allons utiliser est loin d'être la plus vaste considérée à ce jour, mais suffit pour beaucoup d'applications. D'ailleurs, à l'heure actuelle, les généralisations les plus fructueuses ne partent pas d'un affaiblissement des conditions imposées à  $p(x,\xi)$ , mais d'une correction de la formule (1) elle-même.

### III.2

Cette série d'exposés décrira la classe d'opérateurs pseudo-différentiels envisagée, montrera dans quels espaces ces derniers opèrent, comment ils se composent et comment ils se transforment par changement de coordonnées. D'autres résultats pourront y trouver place sur demande.

Notations : Nous adoptons les notations du livre de L. Schwartz pour les espaces de distributions.

Si  $\alpha$  est un multi-indice,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , nous posons

$$D_x^\alpha = \left( \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} ,$$

$$\partial_x^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} ,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n! \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n .$$

#### § 1. ESPACES DE SOBOLEV. DEFINITION D'UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO - DIFFERENTIELS.

Soient  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n$  et  $\Xi$  son dual ;  $|x|^2$  et  $dx$  désigneront une forme quadratique et une mesure de Lebesgue sur  $X$ ,  $|\xi|^2$  et  $d\xi$  la forme et la mesure associées sur  $\Xi$ .

Les dérivations  $D_x^\alpha$  et  $\partial_\xi^\beta$  seront prises par rapport à des bases duales de  $X$  et  $\Xi$ .

#### Espaces de Sobolev $H^s$ :

Soit  $s$  un nombre réel.  $H^s(X)$  est l'espace des distributions  $T \in \mathcal{D}'(X)$  dont la transformée de Fourier  $\hat{T}$  est une fonction satisfaisant

$$\int_{\Xi} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{T}(\xi)|^2 d\xi < +\infty ,$$

### III.3

Cet espace est muni de la topologie définie par la norme

$$\|T\|_s = \left\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi) \right\|_{L^2(\Xi)} ;$$

ni l'espace ni sa topologie ne dépendent du choix de la forme quadratique  $|\xi|^2$ . Si l'on fixe une forme quadratique  $|\xi|^2$ ,  $H^s(X)$  devient un espace de Hilbert, le produit scalaire étant défini par

$$(T | U)_s = \int_{\Xi} (1 + |\xi|^2)^s \hat{T}(\xi) \overline{\hat{U}(\xi)} d\xi .$$

Exemple : La transformée de Fourier de  $\delta$  étant 1,  $\delta$  appartient à  $H^s(X)$  pour tout  $s < -\frac{n}{2}$  et  $\|\delta\|_s = \left( \int_{\Xi} (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2}$ .

Il est clair que  $H^s(X) \subset H^t(X)$  si  $s \geq t$ , et l'inclusion est de norme 1 : évidemment  $H^0(X) = L^2(X)$ , et pour tout  $s$  positif on a  $H^s(X) \subset L^2(X)$ .

De plus, la forme bilinéaire

$$\int T U dx = \int \hat{T} \overline{\hat{U}} d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \overline{\hat{U}(\xi)} d\xi$$

sur  $H^s(X) \times H^{-s}(X)$  permet d'identifier  $H^{-s}(X)$  au dual de  $H^s(X)$ .

L'opérateur  $D_x^\alpha : H^s(X) \rightarrow H^{s-|\alpha|}(X)$  est continu pour tout  $s$ . En particulier, si  $T \in H^k(X)$  pour un certain entier  $k \geq 0$ , les dérivées  $D_x^\alpha T$  d'ordre  $|\alpha| \leq k$  appartiennent à  $L^2(X)$ , et cette propriété caractérise  $H^k(X)$ .

On peut aussi caractériser  $H^{-k}(X)$  comme l'espace des sommes de la forme  $\sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha T_\alpha$ , où  $T_\alpha \in L^2(X)$  pour tout  $\alpha$ .

D'autre part, la multiplication par un élément  $\phi \in \mathcal{J}(X)$  est un opérateur continu de  $H^s(X)$  dans  $H^s(X)$  pour tout  $s$  : la démonstration de ce résultat résulte de l'inégalité de Young :

$$\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2} \quad \text{si} \quad f \in L^1(X) \quad \text{et} \quad g \in L^2(X) ,$$

### III.4

et de l'inégalité de Peetre :

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{|s|} \quad \text{pour tout } s$$

que l'on obtient aisément si l'on remarque que

$$(1 + |\xi|^2) = 1 + |\eta|^2 - 2\eta(\eta - \xi) + |\eta - \xi|^2 \leq 2(1 + |\eta - \xi|^2)(1 + |\eta|^2) \quad .$$

Preuve :

$$|(\hat{\phi} * \hat{T})(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{|s|/2} \int_{\Xi} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|/2} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{s/2} |\hat{T}(\eta)| d\eta$$

et puisque  $(1 + |\xi|^2)^{1/2} \chi_{\Xi}(\xi) \in L^1(\Xi)$  on a

$$\|\phi T\|_{\mathcal{S}} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} (\hat{\phi} * \hat{T})(\xi)\|_{L^2} \leq C \|(1 + |\eta|^2)^{s/2} \hat{T}(\eta)\|_{L^2} = C \|T\|_{\mathcal{S}} \quad ,$$

où C est une constante ne dépendant que de  $\phi$  et de  $s$ .

Remarque : On déduit des deux derniers résultats que l'opérateur différentiel

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} \quad , \quad a_{\alpha} \in \mathcal{J}(X) \quad ,$$

est continu de  $H^s(X)$  dans  $H^{s-m}(X)$ .

Proposition (I.1) :  $\mathcal{J}(X)$  est dense dans  $H^s(X)$  pour tout  $s$  réel.

Preuve : Il est évident que  $\mathcal{J}(X)$  est contenu dans  $H^s(X)$  ; pour montrer qu'il y a densité, choisissons  $T \in H^s(X)$  et  $\varepsilon > 0$  :  $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi)$  appartient à  $L^2(\Xi)$  ; comme  $\mathcal{J}(X)$  est dense dans  $L^2(X)$ , on peut trouver  $\varphi \in \mathcal{J}(\Xi)$  telle que

$$\|\varphi(\xi) - (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi)\|_{L^2} < \varepsilon \quad ;$$

soit  $\Phi$  la transformée de Fourier inverse de  $(1+|\xi|^2)^{-s/2} \varphi(\xi)$ , alors

$$\|\Phi - T\|_s < \varepsilon \quad .$$

ce qui prouve la proposition.

Corollaire :  $\mathcal{D}(X)$  est dense dans chaque  $H^s(X)$ .

Ceci est évident puisque  $\mathcal{D}(X)$  est dense dans  $\mathcal{S}(X)$ .

Par exemple, si  $f \in \mathcal{D}(X)$  et  $\int_X f(x) dx = 1$ , la suite  $f_k(x) = k^n f(kx)$  converge vers  $\delta$  dans  $H^s(X)$  pour  $s < \frac{-n}{2}$ .

Proposition (I.2) : Si  $T \in H^s(X)$  avec  $s > \frac{n}{2}$ , alors  $T$  est une fonction continue et bornée.

Preuve : Il suffit de montrer que  $\hat{T}$  est intégrable.

Puisque  $T \in H^s(X)$  et  $s > \frac{n}{2}$ ,  $(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi)$  et  $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$  appartiennent à  $L^2(\Xi)$  ; en utilisant alors l'inégalité de Schwarz :

$$\int_{\Xi} |\hat{T}(\xi)| d\xi = \int_{\Xi} (1+|\xi|^2)^{-s/2} (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi) d\xi \leq C \|\delta\|_{-s} \|T\|_s < +\infty$$

(C étant une constante  $>0$ ), ce qui démontre le résultat.

Proposition (I.3) : La multiplication par un élément  $\mathcal{S}(X)$  est un opérateur compact de  $H^s(X)$  dans  $H^t(X)$  pour tout  $t < s$ .

Preuve : Soit  $\{T_k\}$  une suite bornée d'éléments de  $H^s(X)$  ; nous allons montrer qu'on peut trouver une sous-suite  $\{\varphi T_{k_1}\}$  de la suite  $\{\varphi T_k\}$  qui converge dans  $H^t(X)$ .

Posons  $f_k = \widehat{\varphi T_k}$ . En se servant d'une inégalité précédemment établie, on obtient

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} |f_k(\xi)| \leq 2^{s/2} \|\varphi\|_s \|T_k\|_s \quad ,$$



et de même

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} |D_j f_k(\xi)| \leq 2^{1/2} \|x_j \varphi\|_s \|T_k\|_s.$$

La suite  $\{f_k\}$  est donc équicontinue et il existe une sous-suite  $\{f_{k_1}\}$  qui converge vers une certaine fonction  $f$  uniformément sur tout compact.

On voit facilement que  $\tilde{f}$  appartient à  $H^s(X)$  : il suffit alors de montrer que  $\{\tilde{f}_{k_1}\}$  converge vers  $\tilde{f}$  dans  $H^t(X)$ , autrement dit que l'intégrale

$$\int (1+|\xi|^2)^t |f_{k_1}(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi$$

tend vers 0.

Le tout est de montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que, pour tout  $l$ , on ait :

$$\int_{|\xi| > A} (1+|\xi|^2)^t |f_{k_1}(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon :$$

or ceci résulte de ce que  $\int (1+|\xi|^2)^s |f_{k_1}(\xi)|^2 d\xi$  est bornée indépendamment de  $l$  et que  $s$  est supérieur à  $t$ .

Corollaire : L'injection canonique de  $H_K^s(X)$  est compacte si  $t < s$  et  $K$  est compact.

Définition d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels :

Définition (I.1) : Soit  $m$  un nombre réel.  $\mathcal{S}(X \times \Xi; m)$  désigne l'espace des fonctions  $a$  sur  $X \times \Xi$  à valeurs complexes, de classe  $C^\infty$ , telles que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^n, \quad \forall M \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0 \quad \text{telle que}$$

$$(1+|x|^2)^M |D_x^p \partial_\xi^q a(x, \xi)| \leq C (1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la forme quadratique  $|\xi|^2$  et des bases (duales) sur  $X$  et  $\Xi$ .

Il est clair que  $\mathcal{S}(X \times \Xi; m_1) \subset \mathcal{S}(X \times \Xi; m_2)$  si  $m_1 \leq m_2$ .

Définition (I.2) : Si  $a \in \mathcal{S}(X \times \Xi; m)$ ,  $Op(a)$  est l'opérateur défini sur  $\mathcal{S}(X)$  par la formule

$$[Op(a)(u)](x) = \int_{\Xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

Il est facile de montrer que  $Op(a)u \in \mathcal{S}(X)$  si  $u \in \mathcal{S}(X)$ . (Remarquons que l'intégrale ci-dessus est absolument convergente et bornée indépendamment de  $x$ ; de plus, il en est de même après un nombre quelconque de dérivations sous le signe d'intégration et de multiplications par des polynômes en  $x$ ).

Proposition (I.4) :  $Op(a)$  est un opérateur continu dans  $\mathcal{S}(X)$ .

Preuve : On peut supposer ici que l'ordre  $m$  de  $Op(a)$  est un entier positif.

On doit montrer que, pour toute semi-norme  $N_1 = \sup |(1+|x|^2)^k D_x^p \cdot|$ , on peut trouver une constante  $C$  et une semi-norme  $N_2 = \sup |(1+|x|^2)^l P(D) \cdot|$  telles que

$$N_1(Op(a)u) \leq C N_2(u) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{S}(X).$$

(Ici,  $P(D)$  est un opérateur différentiel à coefficients constants).

On peut écrire

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^k D_x^p Op(a)(u)(x) &= (1+|x|^2)^k \int_{\Xi} D_x^p (a(x, \xi) e^{2i\pi x \xi}) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{q \leq p} \frac{p!}{q! (p-q)!} \int_{\Xi} (1+|x|^2)^k D_x^q a(x, \xi) D_x^{p-q} e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{q \leq p} \frac{p!}{q! (p-q)!} A_q(u)(x), \end{aligned}$$

avec  $A_q(u)(x) = \int_{\Xi} (1+|x|^2)^k D_x^q q(x, \xi) \xi^{p-q} \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$ .

Posons

$$f(x, \xi) = (1+|\xi|^2)^{-m-n} (1+|x|^2)^k D_x^q a(x, \xi) \quad .$$

Alors  $f(x, \xi)$  est sommable par rapport à  $\xi$  et sa transformée de Fourier par rapport à  $\xi$  (notée  $\hat{f}^2(x, \cdot)$ ) est continue et bornée.

$$\begin{aligned} A_q(u)(x) &= \int_{\Xi} f(x, \xi) (1+|\xi|^2)^{m+n} \xi^{p-q} \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \\ &= \int_{\Xi} f(x, \xi) \mathfrak{F}\left[\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{m+n} D^{p-q} u\right](\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \\ &= \int_X \hat{f}^2(x, y-x) (1+|y|^2)^n \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{m+n} D^{p-q} u(y) \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} . \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$P(D) = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{m+n} D^{p-q}$$

on pose

$$\begin{aligned} \sup_x |A_q(u)(x)| &\leq \sup_{x, y} |f^2(x, y-x)| \sup_y |(1+|y|^2)^n P(D) u(y)| \int_X \frac{dz}{(1+|z|^2)^n} \\ &\leq C \sup_y |(1+|y|^2)^n P(D) u(y)| \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante, ce qui prouve la proposition.

Remarque I.1 : Calculons la transformée de Fourier de  $Op(a)(u)$  :

$$\begin{aligned} \widehat{Op(a)(u)}(\xi) &= \int_X e^{-2i\pi x \xi} \left( \int_{\Xi} a(x, \zeta) \hat{u}(\zeta) e^{2i\pi x \zeta} d\zeta \right) dx \\ &= \int_{\Xi} \hat{u}(\zeta) \left( \int_X a(x, \zeta) e^{-2i\pi x(\xi - \zeta)} dx \right) d\zeta = \int_{\Xi} \hat{a}^1(\xi - \zeta, \zeta) \hat{u}(\zeta) d\zeta , \end{aligned}$$

où  $\hat{a}^1(., \xi)$  est la transformée de Fourier de  $a(x, \xi)$  par rapport à  $x$ .

Cette formule sera très utile dans la suite.

Remarque I.2 : En écrivant

$$\begin{aligned} \text{Op}(a)(u)(x) &= \int_{\Xi} a(x, \xi) \left( \int_X u(y) e^{-2i\pi \xi(y-x)} dy \right) d\xi \\ &= \int_X \hat{a}^2(x, x-y) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

on obtient le noyau  $\hat{a}^2(x, x-y)$  de l'opérateur  $\text{Op}(a)$ .

Ce noyau est une distribution qui n'est pas une fonction en général : on verra plus loin qu'il coïncide avec une fonction  $C^\infty$  dans le complémentaire de la diagonale  $y=x$ .

Lorsque  $a(x, \xi)$  est, pour  $|\xi|$  assez grand, une fonction homogène en  $\xi$  de degré 0, on obtient essentiellement un opérateur intégral singulier "classique".

Théorème (I.1) : Si  $a \in \mathcal{A}(X \times \Xi; m)$ ,  $\text{Op}(a)$  s'étend, pour tout  $s$ , en un opérateur continu de  $H^s(X)$  dans  $H^{s-m}(X)$ .

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux lemmes qui suivent :

Lemme (I.1) : La transformation de Fourier par rapport à la première variable envoie  $\mathcal{A}(X \times \Xi; m)$  dans  $\mathcal{A}(\Xi \times \Xi; m)$ .

Preuve : En effet,  $(1+|\eta|^2)^M D_1^p \partial_2^q \hat{a}^1(\eta, \xi) = \mathcal{F}_x \left[ \left(1 - \frac{\Delta_x}{4\pi^2}\right)^M x^p \partial_2^q a(x, \xi) \right](\eta)$ , où  $D_1^p$  (resp.  $\partial_2^q$ ) est une dérivation par rapport à la 1ère (resp. seconde) variable, et puisque  $\left(1 - \frac{\Delta_x}{4\pi^2}\right)^M x^p \partial_2^q a(x, \xi) \in \mathcal{A}(X \times \Xi; m-|q|)$  :

$$(1+|x|^2)^n \left| \left(1 - \frac{\Delta_x}{4\pi^2}\right)^M x^p \partial_2^q a(x, \xi) \right| \leq C_1 (1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} ;$$

$\Delta_x$  est ici le laplacien sur  $X$  et  $C_1$  est une constante.

Finalement, on a

$$\begin{aligned} |(1+|\eta|^2)^M D_1^p \partial_2^q \hat{a}^1(\eta, \xi)| &\leq \left| \int_X \left(1 - \frac{\Delta_x}{4\pi^2}\right)^M x^p \partial_2^q a(x, \xi) (1+|x|^2)^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \right| \\ &\leq C_1 (1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} \int_X \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \leq C (1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}}, \end{aligned}$$

C étant une constante.

Lemme (I.2) : Soient m un nombre réel et F une fonction mesurable sur  $X \times \Xi$  à valeurs complexes telle que

$$\forall M \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ telle que } |F(\eta, \xi)| \leq C (1+|\eta|^2)^{-M} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$$

presque partout.

Alors l'opérateur A défini pour  $u \in \mathcal{S}(X)$  par la formule

$$\widehat{Au}(\eta) = \int_{\Xi} F(\eta - \xi, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

s'étend, pour tout s, en un opérateur continu de  $H^s(X)$  dans  $H^{s-m}(X)$ .

Preuve : En utilisant l'inégalité de Peetre, on obtient

$$(1+|\eta|^2)^{\frac{s-m}{2}} \left| \int_{\Xi} F(\eta - \xi, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \right| \leq 2^{\frac{|s-m|}{2}} \int (1+|\eta - \xi|^2)^{\frac{|s-m|}{2} - M} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(\xi)| d\xi,$$

et, grâce à l'inégalité de Young :

$$\|Au\|_{s-m} \leq 2^{\frac{|s-m|}{2}} \|(1+|\eta - \xi|^2)^{\frac{|s-m|}{2} - M}\|_{L^1(\Xi)} \|u\|_s.$$

Définition (I.3) : On appellera opérateur d'ordre  $\leq m$  tout opérateur linéaire  $A : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}'(X)$  s'étendant pour tout s en un opérateur continu de  $H^s(X)$  dans  $H^{s-m}(X)$  ; un opérateur d'ordre  $\leq m$  pour tout m réel sera appelé opérateur d'ordre  $-\infty$ .

Remarque (I.3) : Une conséquence du théorème (I.1) est que si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathcal{J}(X \times \Xi, m)$  et s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$a(x, \xi) = b(x, \xi) \quad \text{pour } |\xi| > C,$$

alors  $Op(a) - Op(b)$  est un opérateur d'ordre  $-\infty$ .

Remarque (I.4) : Les symboles  $a(x, \xi)$  que nous avons considérés jusqu'à présent possèdent par rapport à  $x$  des propriétés de décroissance qui ont facilité l'usage de la transformation de Fourier ; cependant celles-ci nous empêchent de considérer comme opérateurs pseudo-différentiels d'autres opérateurs différentiels que ceux dont les coefficients sont dans  $\mathcal{J}(X)$ . Cette restriction n'est pas bien grave vu l'usage local qu'on fait en général des opérateurs pseudo-différentiels ; il est cependant agréable de se permettre dans la théorie l'emploi des opérateurs différentiels à coefficients constants et de certains opérateurs de convolution ; cette extension est l'objet de la définition suivante :

Définition (I.4) :

1)  $\mathcal{E}(\Xi; m)$  est l'espace des fonctions  $b$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Xi$  à valeurs complexes telles que

$$\forall q \in \mathbb{N}^n, \exists C > 0 \text{ telle que } |\partial_\xi^q b(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{\frac{m - |q|}{2}}$$

2)  $S^m$  est la somme directe de  $\mathcal{J}(X \times \Xi; m)$  et de  $\mathcal{E}(\Xi; m)$ , identifiée à un espace de fonctions sur  $X \times \Xi$ .

3) Si  $a \in \mathcal{J}(X \times \Xi; m)$  et  $b \in \mathcal{E}(\Xi; m)$ , alors  $Op(a + b)$  est la somme de  $Op(a)$  et de  $Op(b)$ , où  $Op(b)$  est défini par

$$\widehat{Op(b)u}(\xi) = b(\xi) \hat{u}(\xi).$$

Le théorème (I.1) s'étend très facilement au cas où  $a(x, \xi)$  appartient à  $S^m$ .

Exemple (I.1) : L'opérateur  $\text{Op}[(1 + |\xi|^2)^{m/2}]$  définit, pour tout  $s$ , un isomorphisme de  $H^s(X)$  sur  $H^{s-m}(X)$ .

Exemple (I.2) : Si  $u \in H^{-\infty}(X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} H^t(X)$  et  $\Delta u \in H^s(X)$ , alors  $u \in H^{s+1}(X)$ .

En effet, posons  $q(\xi) = -\frac{1}{2} \alpha(\xi) |\xi|^{-2}$ , où  $\alpha$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Xi$ , égale à 0 dans un voisinage de 0 et à 1 en dehors d'un compact ( $\alpha$  est utilisée pour tuer la singularité de  $|\xi|^{-2}$ ).

Soit  $Q = \text{Op}(q)$ ; alors  $Q \Delta = \text{Op}(\alpha(\xi))$  d'après l'associativité du produit de convolution, d'où il résulte que  $Q \Delta - 1$  est d'ordre  $-\infty$ : on obtient le résultat souhaité puisque  $Q$  est un opérateur d'ordre  $-2$ .

---