Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Glaeser

Problèmes généraux de prolongement des fonctions dérivables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 15, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

PROBLEMES GENERAUX DE PROLONGEMENT DES FONCTIONS DERIVABLES.

par G. GLAESER

Exposé N° 15 — 27 Janvier 1971

L'objet de cet exposé ♦ est d'analyser une famille de problèmes de prolongement dont trois cas particuliers sont actuellement connus : le théorème du prolongement de Whitney ([6],[2] ou [4]; le théorème de prolongement d'une fonction dérivable d'une seule variable (connaissant sa restriction à un fermé) ([7] ou [5]) : le prolongement d'une fonction dont on ne connait que la différentielle en restriction sur un fermé [3].

La formulation de ces problèmes dans le langage de l'analyse fonctionnelle met en évidence les phénomènes, encore inexpliqués, qui ont permis le succès dans les trois cas précédents. Il apparaît que la démonstration de théorèmes plus généraux reposera sur la résolution préalable de quelques problèmes extrêmaux concernant les distributions à support fini.

L'exposé suivant présentera une généralisation d'un théorème de Peano : c'est l'outil qui nous a permis de résoudre quelques uns de ces problèmes extrêmaux.

§ 1. NOTATIONS

Soit $\mathcal{C}^r$ (plus précisément $\mathcal{C}^r(\mathbb{K})$) l'espace de Banach des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^r$, définies sur un pavé compact $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, muni d'une des normes usuelles. Si ω est un module de continuité concave $\mathcal{C}^{r+\omega}$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ dont la dérivée $r^{\underline{\text{ième}}}$ est lipschitzienne pour la distance $(A,B) \to \omega(\|AB\|)$.

$\mathcal{C}^{-r}$ est l'espace des distributions d'ordre $\leq r$, à support dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{C}_f^{-r}$ son sous-espace des distributions à <u>support fini</u>.

♦ Les travaux relatés ici ont été partiellement poursuivis lors d'un séjour au Symposium sur les singularités des applications différentiables (Liverpool 1969-1970). L'auteur y a bénéficié du soutien financier du C.N.R.S et de S.R.C.

Sur diverses parties de $\mathcal{C}^{-r}$, on utilisera les métriques induites par les normes $\|\cdot\|_{-r}$, $\|\cdot\|_{-(r+1)}$, $\|\cdot\|_{-(r+\omega)}$ définies par les duals forts de $\mathcal{C}^{r}, \mathcal{C}^{r+1}, \mathcal{C}^{r+\omega}$. Les normes initiales peuvent être choisies en sorte que $\|\cdot\|_{-(r+1)}$ soit inférieure à $\|\cdot\|_{-r}$.

Lorsqu'il sera question de <u>topologie faible</u> ce sera toujours la topologie induite par $\sigma(\mathcal{C}^{-r}, \mathcal{C}^{r})$. Les métriques $\|\cdot\|_{-(r+1)}$ et $\|\cdot\|_{-(r+\omega)}$ induisent la topologie faible sur la boule unité

$$\mathfrak{B} = \{T \in \mathcal{C}^{-r} : \|T\|_{-r} \leq 1\}, \text{ qui est faiblement compacte.}$$

<u>Définition</u> : On dira qu'un sous-espace $\mathfrak{J} \subset \mathcal{C}^{r}$ est de <u>synthèse spectrale</u> s'il est l'orthogonal d'une famille de distributions à support ponctuel $\subset \mathcal{C}^{-r}$. Alors, pour tout $A \in \mathbb{K}$, on désigne par $\mathfrak{J}_A^{\perp}$ le sous-espace des distributions à support ponctuel $\{A\}$, orthogonales à $\mathfrak{J}$, et $\mathfrak{J}_A \subset \mathcal{C}^{r}$ l'orthogonal de $\mathfrak{J}_A^{\perp}$. Ainsi $\mathfrak{J} = \bigcap_{A \in \mathbb{K}} \mathfrak{J}_A$ et $\mathfrak{J}^{\perp}$ est l'adhérence faible de $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$ engendré linéairement par $\bigcup_{A \in \mathbb{K}} \mathfrak{J}_A^{\perp}$.

<u>Définition</u> : $\mathfrak{J}$ est <u>strictement de synthèse spectrale</u> si tout $T \in \mathfrak{J}^{\perp}$ est limite faible d'une <u>suite</u> de distributions de $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$. Autrement dit $\mathfrak{J}^{\perp}$ est la réunion des adhérences faibles des parties bornées de $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$.

<u>Exemples</u> : Tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{C}^{r}$ est de synthèse spectrale (Whitney. [8] ou [4]). Si $\mathbb{F}$ est un compact de $\mathbb{K}$, l'idéal $\mathfrak{J}(\mathbb{F})$ des fonctions plates sur $\mathbb{F}$ est <u>strictement</u> de synthèse spectrale. ([2] p. 67 proposition III).

§ 2. LE PROBLEME GENERAL

Soit $\mathfrak{J}$ un sous-espace de synthèse spectrale.

<u>Définition</u> : Un $\mathfrak{J}$-champ $\dot{\varphi}$ est défini par la donnée, en chaque point $A \in \mathbb{K}$, d'une forme linéaire $\dot{\varphi}_A$ sur $\mathfrak{J}_A^{\perp}$.

Exemple : Un $\mathcal{J}$ (IF)-champ est un champ de polynômes de degré $\leq r$ dont les cœfficients s'appellent les "candidates-dérivées partielles de $\dot{\varphi}$". Dans le cas général un $\mathfrak{J}$-champ ne fournit qu'une partie des informations précédentes.

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^r$ induit trivialement un $\mathfrak{J}$-champ. Inversement, on dira qu'un $\mathfrak{J}$-champ $\dot{\varphi}$ est taylorien, s'il existe $f \in \mathcal{C}^r$ qui l'induit. Un $\mathfrak{J}$-champ taylorien s'identifie à un élément de $\mathcal{C}^r/\mathfrak{J}$.

Le problème général du prolongement consiste à caractériser les $\mathfrak{J}$-champs tayloriens. Si $\dot{\varphi} \in \mathcal{C}^r/\mathfrak{J}$, il existe un $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^r$ appartenant à la classe d'équivalence $\dot{\varphi}$. On dit que $\hat{\varphi}$ est un prolongement de $\dot{\varphi}$.

Si $\dot{\varphi}$ est un $\mathfrak{J}$-champ, on connait sa valeur $< \dot{\varphi}, T >$ pour tout $T \in \mathfrak{J}_A^{\perp}$, et par linéarité pour tout $T \in \mathcal{C}_f^{-r} \cap \mathfrak{J}^{\perp}$. En particulier $< \dot{\varphi}, T >$ est comme sur $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$.

§ 3. UN THEOREME GENERAL

Théorème 1 : Si $\mathfrak{J}$ est de synthèse spectrale, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) Un condition nécessaire et suffisante pour qu'un $\mathfrak{J}$-champ $\dot{\varphi}$ soit taylorien est qu'il existe un module de continuité concave ω, tel que pour tout $T \in \mathcal{C}_f^{-r} \cap \mathfrak{J}^{\perp}$ on ait

$$(1) \qquad \left| < \dot{\varphi}, T > \right| \leq \| T \|_{-r} \times \omega \left(\frac{\| T \|_{-(r+1)}}{\| T \|_{-r}} \right).$$

De plus $\dot{\varphi}$ admet un prolongement $\hat{\varphi}$ tel que $\| \hat{\varphi} \|^r \leq \omega(1)$.

b) $\mathfrak{J}$ est strictement de synthèse spectrale

Nous n'insistons pas sur l'implication a) $\Rightarrow$ b) qui se démontre comme la proposition III p. 67 de [2].

Pour prouver b) ⇒ a) vérifions d'abord que la condition (1) est nécessaire, (sans supposer b) vérifiée) car si $\dot{T}$ est induit par $\dot{\Phi} \in \mathcal{C}^r$, l'application $T \to < \dot{\varphi}.T > = < \dot{\Phi}, T >$ est faiblement continue sur $\tilde{\mathfrak{B}}$, et en particulier à l'origine : cela implique l'existence d'un module de continuité ω, (que l'on peut supposer concave) tel que pour tout $S \in \tilde{\mathfrak{B}}$ on ait

$$(2) \qquad | < \dot{\varphi}, S > | \leq \omega \left(\| S \|_{-(r+1)} \right).$$

La condition (1) n'est que la restriction de (2) à l'ensemble des S de la forme $T / \| T \|_{-r}$.

Montrons, réciproquement que si (1) est satisfaite, le champ $\dot{\varphi}$ induit sur $\tilde{\mathfrak{B}}$ une fonction uniformément continue pour la métrique $\| \cdot \|_{-(r+1)}$.

En effet, si T_1 et T_2 appartiennent à $\mathfrak{B}$, il en est de même pour $\frac{1}{2}(T_1 - T_2)$. Or la concavité de ω implique que pour $\lambda > 1$ $\omega(\lambda x) \leq \lambda\, \omega(x)$ et par suite

$$\omega \left(\frac{1/2 \, \| T_1 - T_2 \|_{-(r+1)}}{1/2 \, \| T_1 - T_2 \|_{-r}} \right) \leq \frac{2}{\| T_1 - T_2 \|_{-r}} \; \omega \left(\frac{\| T_1 - T_2 \|_{-(r+1)}}{2} \right).$$

En remplaçant T par $T_1 - T_2$ dans (1), on en déduit

$$< \dot{\varphi}, T_1 - T_2 > \leq 2 \; \omega \left(\frac{\| T_1 - T_2 \|_{-(r+1)}}{2} \right)$$

ce qui traduit la continuité uniforme annoncée.

Pour montrer que b) ⇒ a), supposons $\mathfrak{J}$ strictement de synthèse spectrale. La fonction $\dot{\varphi}$ définie sur $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$ peut alors se prolonger par continuité, à son adhérence stricte, c'est-à-dire à $\mathfrak{J}^{\perp}$.

On obtient ainsi une forme linéaire sur $\mathfrak{J}^{\perp}$, encore désignée par $\dot{\varphi}$, dont la restriction à $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathfrak{B}$ est faiblement continue.

Un théorème classique de Banach (cf. [1] chap. IV th IV) assure alors que $\dot{\varphi}$ est une forme linéaire faiblement continue sur $\mathfrak{J}^{\perp}$.

D'autre part, la propriété $\| T \|_{-(r+1)} \leq \| T \|_{-r}$, la croissance (resp. décroissance) de $h \to \omega(h)$ (resp. $h \to \omega(h)/h$) implique que

$$(3) \quad \| T \|_{-(r+1)}\, \omega(1) \leq \| T \|_{-r}\, \omega\left(\frac{\| T \|_{-(r+1)}}{\| T \|_{-r}} \right) \leq \| T \|_{-r}\, \omega(1)$$

Le théorème de Hahn-Banach permet donc de trouver $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^r$ qui prolonge $\dot{\varphi}$ et satisfait à $\| \tilde{\varphi} \|^r \leq \omega(1)$.

§ 4. DISTRIBUTIONS EXTREMALES

Dans l'analyse du théorème du prolongement de Whitney, on observe le phénomène suivant : Pour un choix convenable de la norme, l'ensemble $E \times \mathfrak{B}$ des points extrêmaux de $\mathfrak{B}$ est formé de distributions à support ponctuel ou biponctuel. L'enveloppe convexe faiblement fermée de $E \times \mathfrak{B} \cap \mathcal{J}(\mathbb{F})^{\perp}$ est un tonneau de $\mathcal{J}(\mathbb{F})^{\perp}$, en général strictement plus petit que $\mathfrak{B} \cap \mathcal{J}(\mathbb{F})^{\perp}$. Il existe alors une constante $\Gamma > 0$ (indépendante de $\mathbb{F}$) telle que cette enveloppe convexe faiblement fermée contienne l'homothétique $\Gamma\, (\mathfrak{B} \cap \mathcal{J}(\mathbb{F})^{\perp})$.

Dans le cas général, où $\mathfrak{J}$ est strictement de synthèse spectrale, cette situation suggère le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : Supposons qu'il existe une constante Γ et un ensemble $\mathfrak{a} \subset \mathcal{C}_{\Gamma}^{-r} \cap \mathfrak{J}^{\perp}$ tel que tout $T \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{-r} \cap \mathfrak{J}^{\perp}$ admette une décomposition finie $T = \Sigma\, S_k$ avec $S_k \in \mathfrak{a}$ satisfaisant à

(4) $$\Sigma \| S_k \|_{-(r+1)} \leq \Gamma \| T \|_{-(r+1)} .$$

Alors pour que le $\mathfrak{J}$-champ $\dot{\varphi}$ soit taylorien, il faut et il suffit qu'il existe un module de continuité concave ω, tel que pour tout $S \in \mathfrak{A}$

$$< \dot{\varphi}, S > \leq \| S \|_{-r} \, \omega \left(\frac{\| S \|_{-(r+1)}}{\| S \|_{-r}} \right)$$

Il suffit de prouver que (4) implique (1).

Lemme : Etant donnés un nombre fini de couples de nombres réels $(a_k . A_k)$ strictement positifs, et un module de continuité concave ω, on a

$$\Sigma A_k \, \omega \left(\frac{a_k}{A_k} \right) \leq (\Sigma A_k) \times \omega \left(\frac{\Sigma a_k}{\Sigma A_k} \right).$$

Cela résulte de l'inégalité de concavité

$\Sigma \lambda_i \, \omega (x_i) \quad \leq \quad \omega (\Sigma \lambda_i x_i)$, valable pour des $\lambda_i \geq o$ satisfaisant à $\Sigma \lambda_i = 1$. Il suffit de remplacer λ_i par $A_i / \Sigma A_k$ et x_i par a_i / A_i.

Soit alors $T = \Sigma S_k$ une décomposition de T conforme à l'hypothèse.

Alors $\left| < \dot{\varphi}, T > \right| = \left| \Sigma < \dot{\varphi}, S_k > \right| \leq \Sigma \| S_k \|_{-r} \, \omega \left(\frac{\| S_k \|_{-(r+1)}}{\| S_k \|_{-r}} \right)$

Utilisant (6),(5) et la croissance de ω :

$$\left| < \dot{\varphi}, T > \right| \leq \left(\Sigma \| S_k \|_{-r} \right) \omega \left(\frac{\Gamma \| T \|_{-(r+1)}}{\Sigma \| S_k \|_{-r}} \right).$$

Mais comme $\| T \|_{-r} \leq \Sigma \| S_k \|_{-r}$, et que $\Gamma \geq 1$, en utilisant le fait que $h \to \omega(h)/h$ est décroissante, on trouve que

$$| < \dot{\varphi}, T > | \leq \| T \|_{-r} \times \Gamma \times \omega \left(\frac{\| T \|_{-(r+1)}}{\| T \|_{-r}} \right),$$

ce qui est la condition (1), où ω a été remplacé par $\Gamma\,\omega$.

Exemple : Désignons par $\Delta^k(A,B)$ les distributions "fondamentales" d'ordre r, définies par

$$< f, \Delta^k(A,B) > = D^k f(A) - \sum_{l \leq r-k} D^{k+l} f(B) \left(\frac{(A-B)^l}{l!} \right)$$

On trouve, à des constantes numériques près qui dépendent du choix précis des normes sur $\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^{r+1}$ que

$$(7) \quad \| \Delta^k(A,B) \|_{-r} = \| \vec{AB} \|^{r-k} \quad \text{et} \quad \| \Delta^k(A,B) \|_{-(r+1)} = \| \vec{AB} \|^{r-k+1}$$

Dans le cas du théorème du prolongement de Whitney, l'ensemble Ω est formé des distributions fondamentales dont le support est dans $\mathbb{F}$ et la formule (4) se réduit aux inégalités de Whitney

$$| < f, \Delta^k(A,B) > | \leq \| AB \|^{r-k} \omega(\| AB \|).$$

§ 5. AUTRE VARIANTE

Définition : Une prénorme α sur un espace normé $(E, \| . \|)$ est une fonction numérique satisfaisant pour tout $\vec{V} \in E$ et tout scalaire λ à $\alpha(\lambda \vec{V}) = |\lambda| \alpha(\vec{V})$ et à $\| \vec{V} \| \leq \alpha(\vec{V})$.

Plus généralement, une prenorme α peut n'être définie que sur une partie de Ω de E, stable par homothétie et engendrant une partie dense de E.

<u>Proposition</u> : A toute prénorme α sur $(E, \|.\|)$ correspond une norme $\|\cdot\|_\alpha$ caractérisée par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° $\|.\|_\alpha$ est la plus grande des normes satisfaisant à $\|\vec{V}\|_\alpha \leq \alpha(\vec{V})$

2° $\|\vec{V}\|_\alpha = \operatorname{Inf} \Sigma\, \alpha\, (\vec{V}_k)$ où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des décompositions $\vec{V} = \Sigma\, \vec{V}_k$ où $V_k \in \mathfrak{A}$.

Vérification immédiate. L'expression $\operatorname{Inf} \Sigma\, \alpha\, (V_k)$ satisfait trivialement à l'égalité du triangle, alors qu'il n'en est généralement pas ainsi pour α. D'autre part $\Sigma\, \alpha\, (\vec{V}_k) \geq \Sigma \|V_k\| \geq \| V \|$, ce qui prouve que $\| V \|_\alpha$ ne s'annulle que si V est nul.

Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de E.

La proposition précédente associe à une prénorme α définie sur E deux normes, généralement distinctes, sur F.

La plus petite - la <u>norme externe associée à α -</u> est donnée, pour $T \in F$ par

$$\| T \|_{\alpha, E} = \operatorname{Inf} \Sigma\, \alpha\, (T_k) \text{ où } T_k \in E.$$

Alors que la plus grande - la <u>norme interne</u> - $\| T \|_{\alpha, F}$ ne fait intervenir que des décompositions $T = \Sigma\, S_h$ où les $S_h \in F$.

Ces deux normes interviennent dans le théorème qui suit, où l'on prend $\alpha_\omega(T) = \| T \|_{-r}\, \omega\left(\dfrac{\| T \|_{-(r+1)}}{\| T \|_{-r}}\right)$.

C'est bien une prénorme, compte tenu de (3).

<u>Théorème 3</u> : Soient $\mathfrak{J}$ un espace de synthèse spectrale et $\dot{\varphi}$ un $\mathfrak{J}$-champ satisfaisant, pour tout $T \in \mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$, à $|< \dot{\varphi}, T >| \leq \alpha_\omega(T)$ pour un module de continuité concave ω donné.

Supposons que les normes internes et externes définies sur $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}_f^{-r}$ à l'aide de la prénorme $\alpha_\omega(T)$ soient équivalentes. Alors $\dot{\varphi}$ admet un prolongement $\hat{\varphi}$ appartenant à $\mathcal{C}^{r+\omega}$. En effet, si $\mathbb{A}$ est une partie finie de $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}^{-r}(\mathbb{A})$ l'espace (de dimension fini) des distributions d'ordre $\leq r$, à support dans $\mathbb{A}$. Alors φ définit, par restriction, une forme linéaire $\dot{\varphi}_A$ sur $\mathcal{C}^{-r} \cap \mathfrak{J}^{\perp}$. Soit $T \in \mathcal{C}^{-r}(A) \cap \mathfrak{J}^{\perp}$ et $T = \Sigma\, S_k$ une décomposition, où les $S_k \in \mathfrak{J}^{\perp}$. On a

$$| < \dot{\varphi}_{\mathbb{A}} , T > | = | \Sigma < \dot{\varphi}, S_k > | \leq \Sigma\, \alpha_\omega(S_k).$$

Passant à la borne inférieure, et utilisant l'hypothèse d'équivalence. on trouve

$$| < \dot{\varphi}_{\mathbb{A}}, T > | \leq \| T \|_{F.\omega} \leq \Gamma . \| T \|_{E,\omega}.$$

Le théorème de Hahu-Banach, prouve alors qu'il existe une forme linéaire $\hat{\varphi}_{\mathbb{A}}$ sur $\mathcal{C}_f^{-r}$ prolongeant $\dot{\varphi}_{\mathbb{A}}$ qui satisfait, pour tout $S \in \mathcal{C}_f^{-r}$ à

$$| < \dot{\varphi}_{\mathbb{A}} . S > | \leq \Gamma \| S \|_{E,\omega}.$$

En appliquant ceci à $S = \Delta^k(A,B)$ on en déduit que $\varphi_{\mathbb{A}} \in \mathcal{C}^{r+\omega}$. (On remarque d'abord que le dual algèbrique de $\mathcal{C}_f^{-r}$ s'identifie à l'espace des champs de polynômes, de degré $\leq r$ sur $\mathbb{K}$.

En particulier $\|D^r\hat{\varphi}_{\mathbb{A}}(A) - D^r\hat{\varphi}_{\mathbb{A}}(B)\| \leq \Gamma_\omega(\|AB\|)$

Soit maintenant $\mathbb{A}_j$ une suite de parties finies de $\mathbb{K}$ dont la réunion est dense dans $\mathbb{K}$.

La famille des $\hat{\varphi}_{\mathbb{A}_j}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^r$, d'après le théorème d'Ascoli et admet par conséquent une valeur d'adhérence $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^{r+\omega}$.

Mais, par construction la suite d'applications $T \to \langle \hat{\varphi}_{/A_j}, T \rangle$ converge simplement vers $T \to \langle \dot{\varphi}, T \rangle$ sur $\mathfrak{J}^{\perp} \cap \mathcal{C}^{-r}$.

Donc $\hat{\varphi}$ est bien un prolongement de $\dot{\varphi}$, ce que l'on voulait obtenir.

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques

[2] G. GLAESER : Etude de quelques algèbres tayloriennes (journal d'analyse mathématiques - 1958 - p. 125)

[3] G. GLAESER : Cobords différentiables définis sur un ensemble fermé. (Topology - Vol 2 - 1962 - p. 61-67)

[4] B. MALGRANGE : Ideals of differentiable functions (Tata Institute - oxford University Press 1966)

[5] J. MERRIEN : Prolongateurs de fonctions différentiables d'une variable réelle. J. Math Pure et Appl. p - 45 (1966) 291-309

[6] H. WHITNEY : Analytic extention of differentiable functions defined on closed sets. (Trans. Am. Math soc. vol 36 - 1934 p 1.

[7] H. WHITNEY : Differentiable functions defined on closed sets I Transac. Vol 36 - 1934 p. 369 - 387.

[8] H. WHITNEY : On ideals of differentiable functions Am. journ. of Math. t 70 (1948)

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-