

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. CHAZARAIN

Problèmes mixtes hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 13,
p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A13_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 0 - 1 9 7 1

PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES

par J. CHAZARAIN

On se propose dans ces deux exposés^(*) d'expliquer la méthode utilisée par R. Sakamoto (née Arima) [6] pour démontrer l'inégalité d'énergie associée à un problème mixte hyperbolique.

Pour séparer les difficultés on commencera par traiter le cas particulier classique du problème de Cauchy.

§ 1. PROBLEME DE CAUCHY.

Soit $A(t, x, D_t, D_x)$ un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m , ce qui signifie que l'équation en τ

$$A_m(t, x, \tau, \xi) = 0 \quad (D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$$

admet m racines réelles et distinctes pour $(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}_x \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$.

On suppose que A est à coefficients C^∞ et constants en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le problème de Cauchy consiste en étant donnée $f(t, x)$ trouver $u(t, x)$ telle que

$$A u = f$$

$$D_t^k u(0, x) = 0 \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Le point crucial dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution u consiste à établir une inégalité a priori dite "inégalité d'énergie" :

Théorème 1 : Il existe des constantes γ_0 et C telles que

$$\gamma \|u\|_{m-1, \gamma}^2 \leq C \|A u\|_{0, \gamma}^2$$

pour $\gamma \geq \gamma_0$ et $u \in e^{\gamma t} H^m(\mathbb{R}^{n+1})$,

(*) Le 2ème exposé a eu lieu le 15/1/71 dans le cadre du Séminaire Brezi Lions.

où les normes $\|\cdot\|_{k,\gamma}$ dépendantes du paramètre γ sont définies par

$$\|u\|_{k,\gamma}^2 = \sum_{j+|\alpha|=k} \int |e^{-\gamma t} \zeta^j D^\alpha u|^2 dx dt.$$

Remarque : Pour la démonstration d'une telle inégalité on peut se permettre de calculer modulo des erreurs de l'ordre de $\|u\|_{m-1,\gamma}^2$ car on pourra toujours les absorber au premier membre en choisissant γ_0 assez grand. En particulier, on peut, sans diminuer la généralité, supposer dans tout ce qui suivra que A est homogène d'ordre m .

Esquissons une méthode de démonstration de ce théorème. L'idée (due à Leray [5] à l'origine, puis simplifiée par Gårding [4]) consiste à trouver un opérateur Q d'ordre $m-1$ de façon à avoir une inégalité du type :

$$-im \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\gamma t} Au \cdot \overline{Qu} dx dt \geq C_\gamma \|u\|_{m-1,\gamma}^2 \quad \text{pour } \gamma \geq \gamma_1$$

d'où l'on déduit l'inégalité d'énergie en utilisant l'inégalité de Schwarz.

Pour formaliser les intégrations par parties, il est commode d'associer à une expression

$$Pu \cdot \overline{Qu} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta u}$$

un polynôme en $\zeta = (\tau, \xi)$ et $\overline{\zeta} = (\overline{\tau}, \overline{\xi})$ défini par

$$F(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \overline{\zeta}^\beta = P(\zeta) \overline{Q}(\overline{\zeta})$$

(voir Hörmander [4] chap. 8). On pose aussi

$$G^{P,Q}(\zeta, \overline{\zeta}) = P(\zeta) \overline{Q}(\overline{\zeta}) - \overline{P}(\overline{\zeta}) Q(\zeta)$$

et avec ces notations, on obtient facilement la proposition suivante :

Proposition 1 : Si on peut écrire

$$G^{P,Q}(\zeta, \bar{\zeta}) \Big|_{\xi=\bar{\xi}} = G_t(\zeta, \bar{\zeta})(\tau - \bar{\tau})$$

alors on a

$$-im \int e^{-2\gamma t} P u \cdot \overline{Q u} \, dx \, dt = \gamma \int e^{-2\gamma t} G_t u \bar{u} \, dx \, dt + R(u)$$

où $|R(u)| \leq C |u|_{m-1, \gamma}^2$ et degré $P = m$, degré $Q \leq m-1$.

C'est simplement une intégration par parties en t

$$\int e^{-2\gamma t} D_t u \bar{v} - \int e^{-2\gamma t} u \overline{D_t v} = -2i\gamma \int e^{-2\gamma t} u \bar{u}$$

et on remarque que les erreurs sont au plus d'ordre $|u|_{m-1, \gamma}^2$.

Appliquons ce résultat avec $P = A$, $Q = \frac{\partial A}{\partial \tau}$, on trouve

$$G^{P,Q}(\tau, \bar{\tau}) = (\tau - \bar{\tau}) G_t(\tau, \bar{\tau})$$

avec

$$G_t(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{j=1}^m \prod_{k \neq j} (\tau - \tau_k(\xi)) (\bar{\tau} - \tau_k(\bar{\xi})) .$$

Les racines $\tau_k(\xi)$ étant réelles et distinctes, le symbole de G_t ne s'annule pas sur la sphère $|\xi|^2 + |\tau|^2 = 1$, d'où par homogénéité

$$|G_t(\tau, \bar{\tau}, \xi)| \geq C (|\tau|^2 + |\xi|^2)^{m-1}$$

$$(\tau, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n .$$

Par un argument du type inégalité de Gårding on en déduit

$$\int e^{-2\gamma t} G_t u \bar{u} \, dx \, dt \geq C |u|_{m-1, \gamma}^2 - C' |u|_{m-2, \gamma}^2 ,$$

d'où découle, compte-tenu de la proposition précédente, l'inégalité cherchée en prenant γ assez grand.

§ 2. PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES.

Il est commode de modifier un peu les notations. On prend $(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, et on note (τ, ξ, η) les variables duales.

On suppose en plus que l'hyperplan $x=0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur strictement hyperbolique $A(t, x, y, D_t, D_x, D_y)$.

Le problème mixte consiste, étant données $f(t, x, y)$ et des $\varphi_j(t, y)$, à trouver $u(t, x, y)$ vérifiant

$$Au = f \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1} = \{(t, x, y) \text{ avec } x \geq 0\}$$

$$D_t^k u \Big|_{t=0} = 0 \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$B_j(t, y, D_t, D_x, D_y)u \Big|_{x=0} = \varphi_j(t, y) \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Indiquons maintenant les hypothèses sur les opérateurs B_j . On sait que pour $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ et $\text{im } \tau < 0$ l'équation en ξ

$$A(\tau, \xi, \eta) = 0$$

n'a pas de racines réelles; notons $\xi_1^+, \dots, \xi_\mu^+$ et $\xi_{\mu+1}^-, \dots, \xi_m^-$ celles qui sont respectivement à partie imaginaire strictement positive et à partie imaginaire strictement négative. On montre facilement que l'entier μ est indépendant de (t, x, y, τ, η) et on prend précisément μ conditions au bord B_j . Pour $\text{im } \tau < 0$ on définit le polynôme en ξ

$$A_+(\tau, \xi, \eta) = \prod_{j=1}^{\mu} (\xi - \xi_j^+)$$

et on montrera que A_+ se prolonge par continuité à $\text{im } \tau \leq 0$. On est maintenant en mesure d'énoncer l'hypothèse sur les B_j (cette hypothèse a d'abord été introduite par Agmon [1]).

(H) Les polynômes $B_j(\xi)$ sont de degré $\tau_j \leq m-1$, il y en a μ et pour tout $(t, 0, y, \tau, \eta)$ fixé avec $\text{im } \tau \leq 0$, ces polynômes sont indépendants modulo $A_+(\xi)$.

C'est une condition du type Lopatinski uniforme en τ car l'hypothèse analogue en considérant seulement $\text{im } \tau < 0$ n'est pas suffisante en général. Il faut noter cependant que cette condition pour $\text{im } \tau \leq 0$ exclue le cas du problème de Neumann pour l'équation des ondes et a fortiori le cas de la condition avec dérivée oblique [2].

Sous ces hypothèses Sakamoto démontre le

Théorème 2 : Il existe des constantes C et γ_0 telles que

$$\gamma |u|_{m-1, \gamma}^2 + \sum \langle D_x^j u \rangle_{m-1-j, \gamma}^2 \leq C (|Au|_{0, \gamma}^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \langle B_j u \rangle_{m-1-\tau_j, \gamma}^2)$$

pour $\gamma \geq \gamma_0$ et $u \in e^{\gamma t} H^m(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$,

où les normes $|\cdot|$ désignent les normes dans $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ et les $\langle \cdot \rangle$ désignent les normes analogues sur l'hyperplan $x=0$.

Commençons par indiquer la méthode utilisée. Pour le problème de Cauchy la quantité $I = -\text{im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\gamma t} Au \frac{\partial \overline{A}}{\partial \tau} u$ majorait les termes d'ordres $\gamma |u|_{m-1, \gamma}^2$; ici on veut majorer aussi les termes sur le bord $x=0$, pour cela on procèdera à une intégration par parties en x dans une intégrale de la forme $J = -\text{im} \int_{\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}} e^{-2\gamma t} Au \cdot \overline{Su}$, l'opérateur S étant choisi de façon à ce que l'intégrale J permette de majorer les normes $\langle \cdot \rangle$ modulo des normes du type $|Au|$, $\langle B_j u \rangle$. Pour construire S on a besoin de considérer des opérateurs qui sont pseudo-différentiels en (t, y) et différentiels en x . Ces opérateurs P ont des symboles de la forme suivante

$$P(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = \sum_{j=0}^p a_j(t, x, y, \tau, \eta) \Lambda^{p-j} \tau_j$$

XIII.6

où $\Lambda = (|\tau|^2 + |\eta|^2)^{1/2}$, (on pose $\tau = \sigma - i\gamma$) et Q_j est un symbole de degré 0. On dit que $Q(t, x, y, \sigma, \gamma, \tau)$ est un symbole de degré 0 si Q est C^∞ pour $\gamma > 0$, constante pour (t, x, y) en dehors d'un compact, homogène de degré 0 en (σ, γ, τ) pour $\gamma > 0$ et vérifie des inégalités du type

$$|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \quad |D^\alpha Q(\cdot)| \leq C_\alpha \quad \gamma > 0$$

où D est une dérivation en n'importe quelle variable.

L'opérateur associé à Q est défini par

$$Q(t, x, y, D_t - i\gamma, D_y)u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\tau + iy \cdot \eta} Q(t, x, y, \tau, \eta) \hat{u}(\tau, \eta) d\tau d\eta$$

avec

$$\hat{u}(\tau, \eta) = \int e^{-it\tau - iy \cdot \eta} u(t, y) dt dy \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}.$$

Pour ces opérateurs dépendants du paramètre γ on a un calcul symbolique et les théorèmes que l'on espère, par exemple

$$\langle Q(D_t - i\gamma, D_y)u \rangle_{s, \gamma} \leq C_s \langle u \rangle_{s, \gamma};$$

le point important est que C_s est indépendante de γ pour γ assez grand.

Pour faciliter les intégrations par parties en x , on généralise à ces opérateurs le formalisme des formes différentielles quadratiques. Ainsi à une expression de la forme

$$Gu\tilde{u} = \sum b_{ij}(t, x, y, D_t - i\gamma, D_y) \Lambda^{p-i} D_x^i u \cdot \overline{\Lambda^{p-j} D_x^j u}$$

on associe le polynôme en $\xi, \bar{\xi}$

$$G(\xi, \bar{\xi}) = \sum b_{ij}(t, x, y, \tau, \eta) \Lambda^{2p-i-j} \xi^i \bar{\xi}^j.$$

Avec ces notations, on montre facilement la proposition suivante :

Proposition 2 : On suppose que les symboles P et Q sont réels pour $\gamma = 0$; alors il existe des formes quadratiques différentielles G_t et G_x telles que

$$G^{P,Q}(\xi, \bar{\xi}) = -2i \gamma G_t^{P,Q}(\xi, \bar{\xi}) + (\xi - \bar{\xi}) G_x^{P,Q}(\xi, \bar{\xi}) .$$

En utilisant les théorèmes sur l'adjoint et le commutateur pour cette classe d'opérateur pseudo-différentiel on en déduit l'analogue de la proposition 1 :

Proposition 3 : On se donne des opérateurs P et Q respectivement d'ordre m et $m-1$ et à coefficients réels pour $\gamma = 0$. Alors on a

$$- \operatorname{im} \int_{x \geq 0} e^{-2\gamma t} P u \overline{Q u} dt dx dy = \gamma (G_t^{P,Q} u \bar{u})_{0,\gamma} + \langle G_x^{P,Q} u \bar{u} \rangle_{0,\gamma} + R(u)$$

où $R(u)$ désigne des termes que l'on peut majorer par $|u|_{m-1,\gamma}^2$ et $|\Lambda^{-1} u|_{m,\gamma}^2$.

(On a posé $(G_t^{P,Q} u \bar{u})_{0,\gamma} = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-2\gamma t} G_t u \bar{u}$ et $\langle G_x^{P,Q} u \bar{u} \rangle_{0,\gamma} = \int_{x=0} e^{-2\gamma t} G_x u \bar{u}$).

Avant d'indiquer la construction du symbole de S , on a besoin d'introduire certains polynômes en ξ .

Pour abréger, on pose $X = (t, x, y, \sigma, \gamma, \eta) \in K \times S_n$ où K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ en dehors duquel les coefficients sont constants et $S_n = \{(\sigma, \gamma, \eta) ; \sigma^2 + \gamma^2 + |\eta|^2 = 1 \text{ et } \gamma \geq 0\}$. La construction du symbole se fera localement et par raison d'homogénéité il suffit de se restreindre à S_n . Il faut distinguer les points X pour lesquels $\gamma > 0$ de ceux notés X_0 pour lesquels $\gamma = 0$. Commençons par nous placer en un point X_0 , on peut toujours écrire la factorisation de $A(X_0, \xi)$ sous la forme

$$A(X_0, \xi) = \prod_{j=1}^{\ell} (\xi - \xi_j^0)^{m_j} \prod_{j=1}^s (\xi - \xi_j^+) \prod_{j=1}^s (\xi - \xi_j^-)$$

↑

↑

(racines réelles) (racines imaginaires et leurs conjuguées)

avec $m_1 + \dots + m_\ell + 2s = m$. Ce que l'on écrit avec des notations évidentes

$$\Lambda(X_0, \xi) = \prod_{j=1}^{\ell} \Lambda_j(X_0, \xi) \Lambda_0^+(X_0, \xi) \Lambda_0^-(X_0, \xi),$$

les racines de Λ_j étant différentes de celles de Λ_k pour $k \neq j$; on aura donc dans un voisinage $U(X_0)$ de X_0 une factorisation encore de la forme

$$\Lambda(X, \xi) = \prod_{j=1}^{\ell} \Lambda_j(X, \xi) \Lambda_0^+(X, \xi) \Lambda_0^-(X, \xi)$$

où $\Lambda_j(X, \xi)$ est un polynôme de degré m_j qui peut toujours se mettre sous la forme

$$\Lambda_j(X, \xi) = (\xi - \xi_j(X))^{m_j} + a_2^j(X) (\xi - \xi_j(X))^{m_j-1} + \dots + a_{m_j}^j(X) \quad (\diamond)$$

en posant $\xi_j(X) = (-1)^{m_j}$ la moyenne de racines réelles; notons m_j^+ (respec. m_j^-) le nombre de racines à partie imaginaire positive (respec. négative); on vérifie alors que le polynôme $\Lambda_+(X, \xi)$ défini seulement pour $\gamma > 0$ se prolonge par continuité à $\gamma = 0$ où il vaut à la limite

$$\Lambda_+(X_0, \xi) = \prod_{j=1}^{\ell} (\xi - \xi_j^0)^{m_j^+} \Lambda_0^+(X_0, \xi).$$

Introduisons les polynômes suivants

$$F_{jk}(X_0, \xi) = (\xi - \xi_j^0)^{m_j - k} \frac{\Lambda}{\Lambda_j}(X_0, \xi) \quad k = 1, \dots, m_j^-; \quad j = 1, \dots, \ell$$

$$E_h(X, \xi) = \xi^{s-h} \frac{\Lambda}{\Lambda_0^-}(X, \xi) \quad h = 1, \dots, s.$$

On a le

Lemme 1 : Les polynômes en ξ (F_{jk}, E_h, B_j) forment une base des polynômes de degré $\leq m-1$.

En effet, les $B_j(\xi)$ sont indépendants mod. $\Lambda_+(X_0, \xi)$ par hypothèse et d'autre part les polynômes F_{jk}, E_h sont divisibles par Λ_+ , enfin

(♦) Pour $\gamma > 0$, $\Lambda(X, \xi)$ n'a pas de racines réelles

on constate que ces derniers sont indépendants et en nombre $m - \mu$.

On déduit de ce lemme l'inégalité suivante

$$(1) \quad |z|^2 \leq C \sum |F_{jk}(X_o, z)|^2 + |E_h(X_o, z)|^2 + |B_j(X_o, z)|^2$$

où l'on a remplacé partout ξ^i par $z_i \in \mathbb{C}$ et posé $z = (z_o, \dots, z_{m-1})$. Les termes en $|E_h|^2$ seront faciles à majorer, par contre c'est pour se débarrasser des termes en $|F_{jk}|^2$ que l'on va utiliser une intégrale du type J . Indiquons maintenant la construction du symbole S qui sera donc construit de façon à ce que $G_x^{A, S}(X_o, z, \bar{z})$ permette d'obtenir une majoration des termes $|F_{jk}|^2$. On prend $S(X, \xi)$ de la forme $\sum A'_j \frac{A}{A_j}(X, \xi)$ où le symbole A'_j est défini ci-après. Notons auparavant que

$$G^{A, S} = \sum G^{A, A'_j} \frac{A}{A_j} = \sum G^{A_j \cdot \frac{A}{A_j}, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}$$

d'où l'on déduit facilement que

$$G^{A, S}(X, \xi, \bar{\xi}) = \sum G^{A_j \cdot \frac{A}{A_j}, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}(X, \xi, \bar{\xi}) \frac{A}{A_j}(\xi) \cdot \overline{\left(\frac{A}{A_j}\right)(\bar{\xi})},$$

ce qui montre qu'il suffira de considérer $G^{A_j \cdot \frac{A}{A_j}, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}$.

Sakamoto pose

$$A'_j(X, \xi) = \lambda^{-2m_j^-} \left[\sum_{k=1}^{m_j^-} C_k \lambda^{2k} Q_k(X, \xi) - C_o \lambda^{2-\alpha_j} Q_o(X, \xi) \right]$$

où λ est un paramètre > 0 , $\alpha_j = 2[m_j(2m_j-3) - (m_j-2)(m_j-1)]$ (je n'ai pas compris la raison de ce choix, en dehors du fait que cela marche !) et C_k des constantes > 0 déterminées par la suite, et enfin

$$Q_k(X, \xi) = (\xi - \xi_j(X))^{m_j - (2k-1)} \quad k = 1, \dots, m_j^-$$

$$Q_o(X, \xi) = (\tau - \sigma_o)(\xi - \xi_j(X))^{m_j - 2}.$$

En calculant explicitement les expressions $G_x^{A_j \cdot \frac{A}{A_j}, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}$ et $G_t^{A_j \cdot \frac{A}{A_j}, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}$ on constate

que l'on peut déterminer des constantes C_k de façon à avoir

$$\begin{cases} G_x^{A_j, A'_j}(X_0, z, \bar{z}) \geq |z_{m_j-1}|^2 + \dots + |z_{m_j-m_j-1}|^2 - C \lambda^2 (|z_{m_j-m_j-1}|^2 + \dots + |z_0|^2) \\ G_t^{A_j, A'_j}(X_0, \xi, \xi) \leq C \lambda^2 \end{cases}$$

où z_k est à la place du monôme $(\xi - \xi_j^0)^k$ $k = 0, \dots, m_j-1$;

d'où l'on déduit d'après la définition des F_{jk}

$$\begin{cases} G_x^{A, S}(X_0, z, \bar{z}) \geq \sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^{m_j} |F_{jk}(z)|^2 - C \lambda^2 |z|^2 \\ G_t^{A, S}(X_0, \xi, \xi) \leq C \lambda^2 (\xi^2 + 1)^{m-1} \end{cases}$$

où cette fois z_k est à la place du monôme ξ^k $k = 0, \dots, m-1$.

Enfin, pour contrôler les termes dans $\bar{R}_+^{n+1}$ on ajoute $\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}$, soit finalement

$$A' = S \cdot \lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}$$

et l'on fixe maintenant $\lambda > 0$ assez petit de façon à avoir

$$(2) \quad \begin{cases} G_x^{A, A'}(X_0, z, \bar{z}) \geq \sum \sum |F_{jk}|^2 - C \lambda |z|^2 \\ - G_t^{A, A'}(X_0, \xi, \xi) \geq C \lambda (\xi^2 + 1)^{m-1} \end{cases}$$

En combinant (1) et (2) en X_0 , puis en utilisant un argument de continuité, on obtient, pour X dans un voisinage $U(X_0)$,

$$\begin{cases} C |z|^2 \leq G_x^{A, A'}(X, z, \bar{z}) + \sum |E_j(X, z)|^2 + \sum |B_j(X, z)|^2 \\ C (\xi^2 + 1)^{m-1} \leq - G_t^{A, A'}(X, \xi, \xi) \end{cases}$$

Ensuite on recolle les symboles au moyen d'une partition de l'unité dans une région de la forme $(K \times S_n) \cap (0 \leq \gamma \leq \delta)$ pour un certain $\delta > 0$. En prenant un symbole $\alpha(\sigma, \gamma, \eta)$ de degré zéro dont la restriction à S_n est nulle pour

$\gamma \geq \delta$ et identique à un pour $\gamma \leq \delta/2$ on obtient par un raisonnement du type inégalité de Gårding:

Proposition 4 : Il existe C et γ_0 telles que

$$\begin{aligned} \gamma |\alpha u|_{m-1}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \langle D_x^j \alpha u \rangle_{m-1-j, \gamma}^2 \leq C [|Au|_{0, \gamma}^2 + \sum \langle B_j u \rangle_{m-1-\tau_j, \gamma}^2 \\ + \sum \langle E_j u \rangle_{j-1, \gamma}^2 + |u|_{m-1, \gamma}^2] \end{aligned}$$

pour $\gamma \geq \gamma_0$.

Plaçons-nous maintenant dans la zone où $\gamma \geq \delta/2$ que Sakamoto appelle la "zone elliptique". En effet $A(X, \xi)$ n'a pas de racines réelles et par conséquent on a $A = A_+ \cdot A_-$. En posant $E_k(X, \xi) = \xi^{m-\mu-k} A_+$ $k = 1, \dots, m-\mu$, on vérifie que les polynômes (E_k, B_j) forment une base des polynômes en ξ de degré $\leq m-1$. On montre facilement que l'on a

$$\begin{cases} C |z|^2 \leq \sum |E_k(X, z)|^2 + \sum |B_j(X, z)|^2 \\ C(\xi^2 + 1)^m \leq |A(X, \xi)|^2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en utilisant la technique des problèmes elliptiques, la

Proposition 5 : Il existe C et γ_0 telles que

$$\begin{aligned} (4) \quad |\beta u|_{m, \gamma}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \langle D_x^j \beta u \rangle_{m-j-1/2, \gamma}^2 \leq C [|Au|_{0, \gamma}^2 + \sum \langle B_j u \rangle_{m-\tau_j-1/2, \gamma}^2 \\ + \sum \langle E_k u \rangle_{k-1/2, \gamma}^2 + |u|_{m-1, \gamma}^2] \end{aligned}$$

où $\beta = 1 - \alpha$ et $\gamma \geq \gamma_0$.

Reste enfin à majorer les termes du type $\langle E_h u \rangle_{h-1, \gamma}^2$. Pour cela on remarque que le polynôme $A_0^-(X, \xi)$ ayant ses racines à partie imaginaire strictement négative, l'inégalité suivante a lieu

$$\int_0^\infty |A_0^-(X, D_x) v(x)|^2 dx \geq C \sum_{j=0}^s \int_0^\infty |D_x^j v(x)|^2 dx \quad \text{pour } u \in H^s(\overline{\mathbb{R}^+})$$

et en appliquant ceci à $v(x) = E_h(X, D_x)u = D_x^{s-h} \frac{A}{A_0^+}(X, D_x)$, on trouve, compte-tenu du théorème des traces

$$(5) \quad \langle E_h u \rangle_{h-1, \gamma}^2 \leq C (|A u|_{0, \gamma}^2 + |u|_{m-1, \gamma}^2) \quad k = 1, \dots, s.$$

On fait un raisonnement analogue pour majorer les termes

$$(5)' \quad \langle E_k u \rangle_{k-1/2, \gamma}^2 \leq C (|A u|_{0, \gamma}^2 + |u|_{m-1, \gamma}^2) \quad k = 1, \dots, m-\mu.$$

D'où finalement, en combinant les inégalités (3), (4), (5), (5)', on trouve l'inégalité du théorème 2.

Signalons pour terminer que Sakamoto démontre dans [7] un théorème d'existence en utilisant un problème transposé mais en se plaçant toujours dans un demi-espace $x \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon : Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloque sur les équations aux dérivées partielles, CNRS (1962).
- [2] J. Chazarain : Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes, J. of Funct. Anal. (1971).
- [3] L. Gårding : Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Proc. Coll. Inter. du CNRS Nancy (1956).
- [4] L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer (1963).
- [5] J. Leray : Hyperbolic Differential Equations, Inst. for Adv. Study, Princeton (1952).
- [6] R. Sakamoto : Mixed Problems for Hyperbolic Equations (I), J. of Math. Kyoto Univ. vol. 10 n°2 (1970).
- [7] R. Sakamoto : Id. (II), J. of Math. Kyoto Univ. Vol. 10 n°3 (1970).

Exposé XIII

E R R A T A

<u>Pages</u>	<u>Au lieu de :</u>	<u>Lire :</u>
XIII.1 Ligne 10	$(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} (\mathbb{R}^n -)$	$(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} (\mathbb{R}^n - \{0\})$
XIII.1 Ligne 2 du bas	Brezi	Brezis-
XIII.5 Ligne 1	$\tau_j \leq m-1$	$r_j \leq m-1$
XIII.5 Ligne 11	$\gamma u _{m-1, \gamma}^2 + \sum \langle D_x^j u \rangle_{m-i-j, \gamma}^2 \leq C (Au _0^2, \gamma + \sum_{j=1}^{\mu} \langle B_j u \rangle_{m-1-\tau_j, \gamma}^2)$	$\gamma u _{m-1, \gamma}^2 + \sum \langle D_x^j u \rangle_{m-1-j, \gamma}^2 \leq C (Au _0^2, \gamma + \sum_{j=1}^{\mu} \langle B_j u \rangle_{m-1-r_j, \gamma}^2)$
	lire	
XIII.6 Ligne 2	$Q(t, x, y, \sigma, \gamma, \tau)$	$Q(t, x, y, \sigma, \gamma, \eta)$
XIII.6 Ligne 4	(σ, γ, r)	(σ, γ, η)
XIII.8 Ligne 8	$+a_2^j(X) (\xi - \xi_j(X))^{m_j}$	$+a_2^j(X) (\xi - \xi_j(X))^{m_j-2}$
XIII.8 Ligne 9	racines réelles ; ($\diamond$)	racines ($\diamond$). Notons
XIII.9 Ligne 6 du bas	$2[m_j(2m_j-3)]$	$2[m_j^-(2m_j-3)]$
XIII.10 Ligne 6	$\sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^{m_j}$	$\sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^{m_j^-}$

.../...

Errata Séminaire Goualouic-Schwartz, N° XIII (suite)

<u>Pages</u>	<u>Au lieu de :</u>	<u>lire :</u>
XIII.11 Ligne 4	$+ \sum \langle B_j^u \rangle_{m-1-\tau_j, \gamma}^2$	$+ \sum \langle B_j^u \rangle_{m-1-r_j, \gamma}^2$
XIII.11 Ligne 8	aps	pas
XIII.11 Ligne 6 du bas	$+ \sum \langle B_j^u \rangle_{m-\tau_j-1/2, \gamma}^2$	$+ \sum \langle B_j^u \rangle_{m-r_j-1/2, \gamma}^2$
