

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-ÉTIENNE BERTIN

Modules de Gorenstein et modules canoniques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 9, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES DE GORENSTEIN ET MODULES CANONIQUES

par Jean-Etienne BERTIN

Notations. - Dans tout ce qui suit, A et B désignent des anneaux commutatifs unitaires noethériens. On note $\text{Spec}(A)$ le spectre premier de A . Si M est un A -module, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A ,

$\text{pf}_A(M)$ désigne la profondeur de M sur A ,

$\text{di}_A(M)$ la dimension injective de M sur A ,

$\dim_A(M)$ la dimension de Krull de M sur A ,

$\text{Ann}_A(M)$ l'annulateur de M dans A ,

$\text{Supp}_A(M)$ le support de M dans $\text{Spec}(A)$,

$E_A(M)$ une enveloppe injective de M sur A ,

$\text{ht}(\mathfrak{a})$ la hauteur de $\mathfrak{a}$,

$\text{End}_A(M)$ la A -algèbre des endomorphismes de M sur A .

Etant donné un entier positif n , et un A -module M , on note nM le A -module M^n , et on convient que $0M = 0$.

Enfin, étant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , un A -module M , et un entier positif ou nul i , $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ désigne le i -ième invariant de Bass de M en $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la dimension sur le corps $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de l'espace vectoriel

$$\text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^i(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}).$$

Rappelons que si $0 \rightarrow M \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow \dots$ est une résolution injective minimale de M , on a

$$M_i \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mu_i(\mathfrak{p}, M) E_A(A/\mathfrak{p}).$$

Définition 1. - Soit A un anneau. Un A -module M de type fini et non nul est dit de Gorenstein s'il vérifie une des quatre conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $\text{pf}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = \text{di}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$;

(ii) les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $\text{Hom}_A(M, M)$ est un A -module projectif,

(b) pour tout entier i positif, $\text{Ext}_A^i(M, M) = 0$,

(c) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $\text{di}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) < +\infty$;

(iii) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $\mu^i(\mathfrak{m}, M) = 0$ pour tout $i \neq \text{ht}(\mathfrak{m})$;

(iv) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , $\mu^i(\mathfrak{p}, M) = 0$ pour tout $i \neq \text{ht}(\mathfrak{p})$.

L'équivalence de (i), (iii) et (iv) est démontrée par SHARP [12], et celle de (i) et (iv) par FOXBY [5].

Un anneau A est dit de Gorenstein si A est un A -module de Gorenstein.

Définition 2. - Soit A un anneau. Un A -module de Gorenstein est dit A -module canonique s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- (ii') l'homomorphisme canonique $A \rightarrow \text{Hom}_A(M, M)$ est un isomorphisme ;
- (iii') pour tout idéal maximal m de A , on a $\mu^{\text{ht}(m)}(m, M) = 1$;
- (iv') pour tout idéal premier p de A , on a $\mu^{\text{ht}(p)}(p, M) = 1$.

L'équivalence de ces conditions est démontrée par FOXBY [5].

Exemple. - Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien. Il est clair que $E_A(A/\mathfrak{m})$ vérifie les conditions (iii) et (iii') ci-dessus ; donc $E_A(A/\mathfrak{m})$ est un A -module canonique, et pour tout entier positif n , $nE_A(A/\mathfrak{m})$ est un A -module de Gorenstein. Réciproquement, tout A -module de Gorenstein est un A -module injectif de type fini et non nul, donc isomorphe à un A -module de la forme $nE_A(A/\mathfrak{m})$ [8]. Et tout A -module canonique est isomorphe à $E_A(A/\mathfrak{m})$.

Question I. - Dans l'hypothèse où un anneau A possède un A -module canonique, a-t-on unicité (à isomorphe près) du A -module canonique, et la structure de tout A -module de Gorenstein se déduit-elle simplement de celle d'un A -module canonique ?

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau à spectre premier, connexe, et M un A -module de Gorenstein. Alors :

- (v) l'annulateur de M dans A est nul ;
- (vi) un élément x de A divise 0 dans M si, et seulement si, il divise 0 dans A ;
- (vii) si x est un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible, alors M/xM est un A/xA -module de Gorenstein ; si, de plus, M est un A -module canonique, alors M/xM est un A/xA -module canonique ;
- (viii) si A est un anneau local, et si x est un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible, alors A est un anneau de Gorenstein si, et seulement si, A/xA est un anneau de Gorenstein.

Montrons (v). Pour tout $p \in \text{Supp}(M)$, on a

$$(\text{Ann}_A(M))_p = \text{Ann}_{A_p}(M_p) = \text{Ann}_{A_p}(\text{Hom}_{A_p}(M_p, M_p)) = 0$$

puisque $\text{Hom}_{A_p}(M_p, M_p)$ est un A_p -module libre. Donc

$$\text{Supp}(M) = \text{Spec}(A) - \text{Supp}(\text{Ann}_A(M)) .$$

Ainsi le support de M est ouvert et fermé dans le spectre premier de A , qui est connexe ; donc $\text{Supp}(M) = \text{Spec}(A)$ et $\text{Ann}_A(M) = 0$. Les propriétés (vi) et

(vii) sont démontrées par FOXBY [5], et (viii) par BASS [2] (2.6).

PROPOSITION 2. - Si un anneau A à spectre premier connexe possède un A -module de Gorenstein, alors A est de Cohen-Macaulay.

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , on a $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ d'après la proposition 1, donc $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module de Gorenstein. On peut donc supposer l'anneau A local.

Soit $\mathfrak{r} = (x_1, \dots, x_n)$ une A -suite maximale ; posons $A' = A/\mathfrak{r}A$ et $M' = M/\mathfrak{r}M$.

Alors M' est un A' -module de Gorenstein de profondeur nulle, donc M' est un A' -module de type fini non nul et injectif, puisque $\text{di}_{A'}(M') = \text{pf}_{A'}(M') = 0$. Donc A est un anneau artinien.

LEMME 1. - Soient A un anneau local, M et N deux A -modules de Gorenstein, et x un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible tel que M/xM et N/xN soient isomorphes. Alors M est isomorphe à N .

On a $\text{di}_A(N) < +\infty$, et $\text{pf}_A(M) = \text{pf}_A(A)$; ainsi $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$ puisque $1 > \text{pf}_A(A) - \text{pf}_A(M)$ d'après LEVIN-VASCONCELOS [6]. Soit $h : M/xM \rightarrow N/xN$ un isomorphisme, $p : M \rightarrow M/xM$ et $q : N \rightarrow N/xN$ les homomorphismes canoniques. Puisque $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$, il existe un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ tel que $f \circ q = p \circ h$. Posons $C = \text{Coker } f$ et $K = \text{Ker } f$; d'après le lemme du serpent, on obtient un diagramme commutatif où lignes et colonnes sont exactes, et où les flèches horizontales non précisées désignent la multiplication par x .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M & \xrightarrow{p} & M/xM \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N & \xrightarrow{q} & N/xN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Ainsi la multiplication par x de C dans C [resp. de K dans K] est surjective. D'après le lemme de Nakayama, on a donc $C = K = 0$.

PROPOSITION 3. - Soit A un anneau local possédant un A -module canonique Ω . Alors pour qu'un A -module M soit de Gorenstein, il faut et il suffit que M soit isomorphe à $n\Omega$, où n est un entier positif. Tout A -module canonique est isomorphe à Ω [4].

La suffisance est évidente. Soient M un A -module de Gorenstein, et

$$\mathfrak{r} = (x_1, \dots, x_n)$$

une suite maximale. Posons $M' = M/\mathfrak{r}M$, $A' = A/\mathfrak{r}A$ et $\Omega' = \Omega/\mathfrak{r}\Omega$. D'après la

proposition 2, A' est artinien ; et d'après l'exemple, il existe un entier positif n et un isomorphisme $M' \simeq n\Omega'$. D'après le lemme précédent, on en déduit que $M \simeq n\Omega$. Si M est canonique, M' est un A' -module canonique, donc $n = 1$, et $M \simeq \Omega$.

Remarque 1. - Soit A un anneau possédant un A -module canonique Ω et un A -module inversible non trivial P . Il est clair que $\Omega \otimes_A P$ est aussi un A -module canonique, et puisque, pour tout idéal maximal m de A , $P_m \simeq A_m$. Cependant $\text{Hom}_A(\Omega, \Omega) \simeq A$, et $\text{Hom}_A(\Omega \otimes_A P, \Omega) \simeq \text{Hom}_A(P, \text{Hom}_A(\Omega, \Omega)) \simeq \text{Hom}_A(P, A)$ qui est un A -module inversible non trivial par hypothèse. Donc Ω n'est pas isomorphe à $\Omega \otimes_A P$, et on a un exemple de deux A -modules canoniques non isomorphes. En fait, si A est de dimension finie, tout A -module de Gorenstein est de la forme $\Omega \otimes_A Q$, où Q est un A -module projectif de type fini non nul [14].

Question II. - A quelle condition un anneau A possède-t-il un module canonique ? On a déjà vu qu'il est nécessaire que A soit de Cohen-Macaulay.

Définition 3. - Soient A un anneau, et M un A -module ; on appelle extension triviale de A par M , et on note $A \circ M$, l'anneau dont le groupe additif est le groupe $A \times M$ muni de la multiplication $(a, m)(a', m') = (aa', am' + a'm)$ pour $a, a' \in A$ et $m, m' \in M$. Il est clair que A est le quotient de l'anneau $A \circ M$ par l'idéal $0 \times M$. Comme $0 \times M$ est un idéal de carré nul de $A \circ M$, tout idéal premier de $A \circ M$ est de la forme $p \times M$, où $p \in \text{Spec}(A)$. Donc

$$\dim(A) = \dim(A \circ M),$$

et si l'anneau A est local d'idéal maximal m , $A \circ M$ est local d'idéal maximal $m \times M$. Si $p \in \text{Spec}(A)$, on vérifie sans peine qu'on a un isomorphisme naturel que $(A \circ M)_{p \times M}$ sur $A_p \circ M_p$. Enfin, étant donné $x \in A$, x divise 0 dans A si, et seulement si, $(x, 0)$ divise 0 dans $A \circ M$.

LEMME 2. - Soient A un anneau de Cohen-Macaulay, et M un A -module canonique. Alors l'anneau $A \circ M$ est de Gorenstein [11].

On peut supposer l'anneau A local d'idéal maximal m .

Soit $r = (x_1, \dots, x_n)$ une A -suite maximale,; posons $A' = A/rA$, $M' = M/rM$, $m' = m/rm$. Alors $((x_1, 0), \dots, (x_n, 0))$ est une $A \circ M$ -suite, et on obtient aisément un isomorphisme de $A \circ M / ((x_1, 0), \dots, (x_n, 0)) A \circ M$ sur $A' \circ M'$. Puisque A est de Cohen-Macaulay, $n = \dim A = \dim(A \circ M)$, donc A' et $A' \circ M'$ sont des anneaux locaux artiniens. Or M' est un A' -module canonique, donc M' est A' -injectif. Donc $\text{Hom}_{A'}(A' \circ M', M')$ est un $A' \circ M'$ -module injectif. L'isomorphisme $A' \simeq \text{Hom}_{A'}(M', M')$ définit donc un isomorphisme de A' -modules de

$$\text{Hom}_{A'}(A' \circ M', M')$$

sur $M' \oplus A'$. Il résulte de la définition du produit sur $A' \circ M'$ que cet isomorphisme est en fait un isomorphisme de $A' \circ M'$ -modules de $\text{Hom}_{A'}(A' \circ M', M')$ sur $A' \circ M'$. L'anneau local artinien $A' \circ M'$ étant de dimension injective nulle est de

Gorenstein. Donc A_{clM} est un anneau de Gorenstein.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soit A un anneau admettant un module canonique ; alors A est quotient d'un anneau de Gorenstein de même dimension que A .

THÉORÈME 1. - Soient B un anneau de Gorenstein, et A un anneau quotient de B . Supposons que A soit un anneau de Cohen-Macaulay à spectre premier connexe, et posons $d = \text{grade}_B(A)$. Alors $\text{Ext}_B^d(A, B)$ est un A -module canonique ([13], [14]).

Supposons d'abord B local. Posons $s = \dim B = \text{pf}_B(B)$ et $n = \dim A = \text{pf}_A(A) = \text{pf}_B(A)$. Puisque $\text{di}_B(B) < +\infty$, pour tout entier $j > s - n$, on a $\text{Ext}_B^j(A, B) = 0$ d'après LEVIN-VASCONCELOS [6], mais $\text{Ext}_B^{s-n}(A, B) \neq 0$. Posons $\Omega = \text{Ext}_B^{s-n}(A, B)$. On a $\text{grade}_B(A) = n - s$ puisque B est de Cohen-Macaulay. D'après REES [10], on a donc, pour tout entier $j < n - s$, $\text{Ext}_B^j(A, B) = 0$.

Soit alors $0 \rightarrow B \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_m \rightarrow 0$ une résolution injective minimale de B ; on a $m = s$ puisque $\text{di}(B) = \dim(B)$. Alors

$$B_i = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)} \mu^i(\mathfrak{q}, B) E(B/\mathfrak{q}) = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B, \text{ ht } \mathfrak{q} = i} E_B(B/\mathfrak{q})$$

puisque $\mu^i(\mathfrak{q}, B) = \delta_{i, \text{ht}(\mathfrak{q})}$. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B de hauteur $j < s - n$, il existe $x \in \text{Ann}_B(A)$ tel que $x \notin \mathfrak{q}$, ce qui montre que

$$\text{Hom}_B(A, E(B/\mathfrak{q})) = 0.$$

Donc, pour tout $j < s - n$, $\text{Hom}_B(A, B_j) = 0$. On a donc une suite exacte :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Omega \rightarrow \text{Hom}_B(A, B_{s-n}) \rightarrow \text{Hom}_B(A, B_{s-n+1}) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_B(A, B_s) \rightarrow 0.$$

Puisque B_j est un B -module injectif, $\text{Hom}_B(A, B_j)$ est un A -module injectif pour $j \geq s - n$. Donc la suite (*) est une résolution injective de Ω . Soit alors $0 \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega_0 \rightarrow \Omega_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_n \rightarrow 0$ une résolution injective minimale de Ω ; on a alors des injections $E_j \rightarrow \text{Hom}_B(A, B_{j+s-n})$ pour $0 \leq j \leq n$. De plus, si $\mathfrak{n}$ désigne l'idéal maximal de B et $\mathfrak{m}$ celui de A , on a

$$\text{Hom}_B(A, B_s) = \text{Hom}_B(A, E_B(B/\mathfrak{n})) = E(A/\mathfrak{m})$$

d'après MATLIS [7]. Ainsi $\mu^j(\mathfrak{m}, \Omega) = 0$ si $j \neq n$ et $\mu^n(\mathfrak{m}, \Omega) \leq 1$. Puisque $\Omega \neq 0$, on a $\text{di}_A(\Omega) = \text{pf}_A(A) = n$, et $\Omega_n \neq 0$; donc $\mu^n(\mathfrak{m}, \Omega) = 1$. Donc Ω est un A -module canonique.

Revenons au cas général. Soit $\varphi : B \rightarrow A$ un homomorphisme surjectif ; soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, et posons $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, $s_{\mathfrak{p}} = \dim B_{\mathfrak{q}}$ et $n_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$, de sorte que $(\text{Ext}_B^j(A, B))_{\mathfrak{p}} = \text{Ext}_{B_{\mathfrak{q}}}^j(A_{\mathfrak{p}}, B_{\mathfrak{q}}) = 0$ pour $j \neq s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}}$ d'après ce qui précède. Soit $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(A)$ tel que $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$: alors $(\text{Ext}_B^j(A, B))_{\mathfrak{p}'}$ est un localisé de $(\text{Ext}_B^j(A, B))_{\mathfrak{p}}$; on en déduit que $s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}} = s_{\mathfrak{p}'} - n_{\mathfrak{p}'}$. Notons $\psi : \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{N}$ l'application $\mathfrak{p} \mapsto s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}}$: ainsi $\text{Im } \psi = \{\psi(\mathfrak{p}_1), \dots, \psi(\mathfrak{p}_p)\}$ où $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_p$ sont les idéaux premiers minimaux de A . Soit $d \in \text{Im } \varphi$, et posons

$$J = \{i \text{ de } 1 \text{ à } p, \psi(p_i) = d\}.$$

Alors $\psi^{-1}(d) = \{p \in \text{Spec } A, p \supset \bigcap_{i \in J} p_i\} = \overline{\bigcup_{i \in J} \{p_i\}}$. Ainsi $\psi^{-1}(d)$ est fermé, et son complémentaire, qui est réunion finie d'ensemble du même type est aussi fermé. Puisque $\text{Spec}(A)$ est connexe, on a $\psi^{-1}(d) = \text{Spec}(A)$. Alors $\text{Ext}_B^j(A, B) = 0$ si $j < d$ et $\text{Ext}_B^d(A, B) \neq 0$. Donc $d = \text{grade}_B(A)$ et $\text{Ext}_B^d(A, B)$ est un A -module canonique.

COROLLAIRE 1. - Si A est un anneau de Cohen-Macaulay quotient d'un anneau de Gorenstein, alors A possède un A -module canonique.

A est de la forme $\bigoplus_{i=1}^n A_i$, où chacun des A_i a un spectre premier connexe. Alors chacun des A_i possède un module canonique Ω_i , et il est clair que $\bigoplus_{i=1}^n \Omega_i$ est un A -module canonique.

COROLLAIRE 2. - Tout anneau local complet de Cohen-Macaulay possède un module canonique.

Un tel anneau est quotient d'un anneau local régulier, qui est un anneau de Gorenstein.

Question III. - Soit A un anneau local possédant un module de Gorenstein, l'anneau A possède-t-il un module canonique ? Tout facteur direct non nul d'un module de Gorenstein étant un module de Gorenstein, on peut supposer que A possède un module de Gorenstein indécomposable.

LEMME 3. - Soient (A, m) un anneau local, M un A -module de Gorenstein, et $r = (x_1, \dots, x_n)$ une A -suite maximale. Posons $\Lambda = \text{End}_A(M)$. Il existe un entier m positif et un isomorphisme d'algèbres de $\Lambda/r\Lambda$ sur l'algèbre $M_m(A/rA)$ des matrices carrées d'ordre m sur A/rA .

Posons $A' = A/rA$, $m' = m/rm$, $M' = M/rM$, $\Lambda' = \Lambda/r\Lambda$ et $E' = E'_A(A'/m')$. Alors il existe un entier m positif et un isomorphisme $M' \simeq E'^m$; donc

$$\Lambda' \simeq \text{End}_{A'}(E'^m) \simeq M_m(A').$$

PROPOSITION 5. - Soit (A, m) un anneau local hensélien, admettant un module de Gorenstein M . Alors A admet un module canonique [4].

On peut supposer M indécomposable. D'après le lemme, si $\Lambda = \text{End}_A(M)$, il existe un entier positif m tel que $\Lambda/m\Lambda \simeq M_m(A/m)$. Puisque A est hensélien, tout idempotent de $\Lambda/m\Lambda$ se relève en un idempotent de Λ ; donc $m = 1$, et M est un module canonique car, avec les notations du lemme,

$$\mu^{\text{ht}(m)}(m, M) = \mu^0(m', M') = m = 1.$$

PROPOSITION 6. - Soit (A, m) un anneau local possédant un module de Gorenstein indécomposable M , et posons $\Lambda = \text{End}_A(M)$. Alors il existe une sous- A -algèbre

commutative S de Λ ayant les propriétés suivantes :

- (a) S est un A-module libre de type fini ;
- (b) le spectre premier de S est connexe de dimension finie ;
- (c) S admet un module canonique ;
- (d) si Λ est considéré comme S-module à droite, le produit dans Λ induit un isomorphisme de S-algèbres $\Lambda \otimes_A S \xrightarrow{\sim} \text{End}_S(\Lambda)$ [4].

Il résulte du lemme que Λ est une A-algèbre centrale séparable, puisque Λ est un A-module fidèle de type fini, et que $\Lambda/m\Lambda$ est une A/mA -algèbre centrale séparable. D'après AUSLANDER-GOLDMAN [1], puisque A est un anneau local il existe une sous-algèbre commutative maximale S de Λ qui est séparable (ce qui implique que S vérifie la propriété (d)) et telle que Λ soit un S-module libre de type fini et que S soit un A-module libre de type fini. Puisque $S \subset \Lambda$, et que M est indécomposable, S ne contient aucun idempotent distinct de 0 ou 1, donc le spectre premier de S est connexe. Puisque S est un A-module libre de type fini, on a

$$\text{id}_S(M \otimes_A S) = \text{id}_S(\text{Hom}_A(S, M)) = \text{id}_A(M) < +\infty ;$$

pour tout entier i positif,

$$\text{Ext}_S^i(M \otimes_A S, M \otimes_A S) = \text{Ext}_A^i(M, M) \otimes_A S = 0 ;$$

de plus,

$$\text{Hom}_S^i(M \otimes_A S, M \otimes_A S) = \text{Hom}_A(M, M) \otimes_A S$$

qui est un S-module projectif puisque $\text{Hom}_A(M, M)$ est un A-module projectif. Enfin on a des isomorphismes d'algèbres

$$\text{End}_S(M \otimes_A S) \simeq \text{End}_A(M) \otimes_A S = \Lambda \otimes_A S \simeq \text{End}_S(\Lambda) \simeq M_r(\Lambda) ,$$

où r désigne le rang du S-module libre de type fini Λ . Donc $M \otimes_A S$ possède un facteur direct Ω_0 tel que $\text{End}_S(\Omega_0) \simeq S$; autrement dit, Ω_0 est un S-module canonique. Remarquons enfin que S, étant entier sur A, est un anneau semi-local, donc de dimension finie.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un anneau local A admette un module de Gorenstein, il faut et il suffit que A soit de Cohen-Macaulay, et qu'il existe une A-algèbre B fidèlement plate finie à spectre connexe qui soit quotient d'un anneau de Gorenstein de dimension finie [3].

La nécessité résulte des propositions 4 et 6. S'il existe une telle algèbre B, l'anneau B est de Cohen-Macaulay; donc B possède un module de Gorenstein M. Or $\text{pf}_B(\Omega) = \text{pf}_A(\Omega)$, et $\text{di}_B(\Omega) = \text{di}_A(\Omega)$ puisque tout B-module injectif est A-injectif. Donc Ω est aussi un A-module de Gorenstein.

LEMME 4. - Soit $\varphi : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un homomorphisme local fidèlement plat d'anneaux locaux. Un A -module M est canonique si, et seulement si, le B -module $M \otimes_A B$ est canonique. Un A -module M est de Gorenstein si, et seulement si, le B -module $M \otimes_A B$ est de Gorenstein.

C'est évident sur les conditions (iii) et (iii') des définitions 1 et 2 puisque $\text{Ext}_B^1(B/\mathfrak{n}B, M \otimes_A B) = \text{Ext}_A^1(A/\mathfrak{m}A, M) \otimes_A B$.

THÉOREME 4. - Soient A un anneau local, et A^h son hensélisé. Alors :

- (i) Si A possède un module de Gorenstein, A^h possède un module canonique ;
- (ii) Si A^h possède un module canonique, il existe une A -algèbre locale-étale qui admette un module canonique [4].

Montrons (i). Si M est un A -module de Gorenstein, $M \otimes_A A^h$ est un A^h -module de Gorenstein d'après le lemme 4, et la conclusion résulte de la proposition 5.

Montrons (ii). Soit Ω un A^h -module canonique. Comme Ω est un A^h -module de présentation finie, et que A^h est limite inductive d'une famille de A -algèbres locales-étales, il existe une A -algèbre locale-étale B et un B -module M tels que $\Omega \simeq M \otimes_B A^h$. D'après le lemme 4, M est alors un B -module canonique.

Question IV. - Tout anneau local hensélien de Cohen-Macaulay possède-t-il un module canonique ?

Contre-exemple. - FERRAND et RAYNAUD [3] ont montré l'existence d'un anneau A possédant les propriétés suivantes :

- 1° A est local intègre de dimension 1 ;
 - 2° la clôture intégrale A' de A dans son corps des fractions Q est un anneau local ;
 - 3° si $\hat{A}$ désigne le complété de A , l'anneau $Q \otimes_A \hat{A}$ n'est pas de Gorenstein.
- Notons A^h le hensélisé de A .

Alors l'anneau A^h est local intègre de dimension 1 (donc de Cohen-Macaulay) mais ne possède pas de module canonique [4].

Puisque A' est local, A^h est intègre [9]. De plus $\hat{A} \otimes_{A^h} Q = \hat{A} \otimes_A Q$, donc l'anneau $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ n'est pas de Gorenstein. Supposons que A^h possède un module canonique Ω . Alors, d'après le lemme 4, $\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}$ est un $\hat{A}$ -module canonique. De même, le localisé $(\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}) \otimes_{A^h} Q$ de $\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}$ par rapport à la partie multiplicativement stable $A^h - \{0\}$ de $\hat{A}$ est un $(\hat{A} \otimes_{A^h} Q)$ -module canonique. Enfin le localisé $\Omega \otimes_{A^h} Q$ de Ω en l'idéal nul de A^h est un Q -module canonique. Donc, puisque Q est un corps, on a $\Omega \otimes_{A^h} Q \simeq Q$ d'après l'exemple. Ainsi

$$(\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}) \otimes_{A^h} Q = (\Omega \otimes_{A^h} Q) \otimes_Q (\hat{A} \otimes_{A^h} Q) \simeq \hat{A} \otimes_{A^h} Q ;$$

donc $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ est un $(\hat{A} \otimes_{A^h} Q)$ -module canonique, ce qui signifie que l'anneau $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ est de Gorenstein contrairement à ce qu'on a vu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.) and GOLDMAN (O.). - The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 367-409.
- [2] BASS (H.). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.
- [3] FERRAND (D.) et RAYNAUD (M.). - Fibres formelles d'un anneau local noethérien, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 3, 1970, p. 295-311.
- [4] FOSSUM, GRIFFITH and REITEN. - The homological algebra of trivial extensions of abelian categories with application to ring theory (à paraître).
- [5] FOXBY (H. B.). - Gorenstein modules and related modules, Math. Scand., t. 31, 1972, p. 267-284.
- [6] LEVIN (G.) and VASCONCELOS (W. V.). - Homological dimensions and Macaulay rings, Pacific J. Math., t. 25, 1968, p. 315-323.
- [7] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
- [8] MATLIS (E.). - Modules with descending chain condition, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 495-508.
- [9] RAYNAUD (M.). - Anneaux locaux henséliens. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 169).
- [10] REES (D.). - The grade of an idéal or module, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 53, 1957, p. 28-42.
- [11] REITEN (I.). - The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. math. Soc., t. 32, 1972, p. 417-420.
- [12] SHARP (R. Y.). - Gorenstein modules, Math. Z., t. 115, 1970, p. 117-139.
- [13] SHARP (R. Y.). - On Gorenstein modules over complete Cohen-Macaulay local ring, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 22, 1971, p. 425-434.
- [14] SHARP (R. Y.). - Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, Proc. London math. Soc., t. 25, 1972, p. 303-328.

(Texte reçu le 17 février 1975)

Jean-Etienne BERTIN
16 avenue Général Malleret-Joinville
94140 ALFORTVILLE
