

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY RENAULT

## Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 27, n° 2 (1973-1974), exp. n° 17, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1973-1974\\_\\_27\\_2\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A7_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANNEAUX BIRÉGULIERS AUTO-INJECTIFS À DROITE

par Guy RENAULT

## Introduction.

On dit qu'un anneau  $A$  est birégulier si, pour tout élément  $x$  de  $A$ , l'idéal bilatère  $(x)$  est engendré par un idempotent central. Les anneaux biréguliers commutatifs sont les anneaux réguliers de von Neumann, le centre d'un anneau birégulier est un anneau régulier ; tout anneau birégulier est à idéaux singuliers à droite et à gauche nuls ; par suite, un anneau birégulier auto-injectif à droite est régulier.

Sauf mention expresse du contraire, les modules considérés seront des modules à droite sur un anneau unitaire. Pour la théorie des modules injectifs, on pourra se reporter à [5], pour la classification des anneaux réguliers auto-injectifs à droite, on pourra consulter [7] et [12]. Rappelons simplement qu'un anneau de Baer  $A$  est de type I, s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type II, s'il existe un idempotent fini et fidèle et si  $A$  ne contient pas d'idempotents abéliens  $\neq 0$ , de type III, s'il ne contient pas d'idempotents finis  $\neq 0$ . On dira qu'un anneau  $A$  est quasi-simple, si  $(0)$  et  $A$  sont les seuls idéaux bilatères de  $A$ . Le but de cet article est de déterminer les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite ; une partie des résultats obtenus a été présentée dans [11].

## 1. Anneaux biréguliers.

PROPOSITION 1.1. - Soit  $A$  un anneau semi-premier dont le centre  $Z$  est un anneau régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1°  $A$  est un anneau birégulier.

2° Les idéaux premiers de  $A$  sont engendrés par les idéaux maximaux de  $Z$ .

1°  $\Rightarrow$  2° : Soit  $P$  un idéal premier de  $A$  ;  $m = P \cap Z$  est un idéal premier, donc maximal de  $Z$ . Comme l'anneau quotient  $A/A_m$  est quasi simple, on a nécessairement  $P = A_m$ .

2°  $\Rightarrow$  1° :  $A$  étant semi-premier, pour tout élément  $x$  de  $A$ , on a

$$(x) \cap \ell[(x)] = (0),$$

où  $\ell(.)$  désigne l'annulateur à gauche. Supposons  $I = (x) \oplus \ell[(x)] \neq A$ . Il existe alors un idéal maximal  $m$  de  $Z$  tel que l'on ait  $I \subset A_m$ , et l'on peut trouver  $s \in Z - m$  tel que  $sx = 0$ . On en déduit que  $s \in \ell[(x)]$ , donc  $s \in m$ , et il y a contradiction.

COROLLAIRE 1.2. - Soit  $A$  un anneau semi-premier dont le centre  $Z$  est un anneau régulier et qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1°  $A$  est une  $Z$ -algèbre de type fini,
- 2° Pour tout idéal maximal  $m$  de  $Z$ ,  $A/m$  est un anneau birégulier. Alors  $A$  est un anneau birégulier.

L'anneau quotient  $A/m$  est isomorphe à l'anneau localisé  $A_m$ , et comme  $A$  est une  $Z$ -algèbre de type fini, il en résulte que le centre de  $A_m$  est isomorphe à  $Z_m$  qui est un corps ; d'après la condition 2°,  $A_m$  est un idéal maximal de  $A$ , et  $A$  est birégulier (prop. 1.1).

Rappelons qu'un groupe  $G$  est dit localement normal si tout sous-groupe de type fini est contenu dans un sous-groupe normal fini de  $G$ . On a la propriété suivante :

PROPOSITION 1.3 [1]. - Si l'anneau de groupe  $A[G]$  est birégulier, alors :

- 1°  $A$  est un anneau birégulier,
- 2°  $G$  est un groupe localement normal tel que l'ordre de tout élément  $\neq 1$  de  $G$  soit inversible dans  $A$ .

On trouvera une démonstration de cette proposition dans [11]. Réciproquement, on a le lemme suivant.

LEMME 1.4. - Soit  $G$  un groupe localement normal ; si pour tout sous-groupe normal fini  $H$  de  $G$ , l'anneau de groupe  $A[H]$  est birégulier, alors  $A[G]$  est un anneau birégulier.

Soit  $e$  un idempotent central de  $A[H]$  ; nous allons montrer que  $A[G]e$  est engendré par un idempotent central de  $A[G]$ . On désigne par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  les conjugués distincts de  $e$  dans  $A[G]$ . Les  $e_i$  sont des idempotents centraux de  $A[H]$ , et il existe par hypothèse un idempotent central  $f$  de  $A[H]$  tel que

$$A[H]f = \sum_{i=1}^n A[H]e_i.$$

On en déduit la relation  $(e) = A[G]f$ .  $(e)$  est un facteur direct bilatère de l'anneau semi-premier  $A[G]$ , il est donc engendré par un idempotent central.

Les résultats de A. BOVDI et S. V. MIHOVSKI [1] peuvent être complétés de la façon suivante :

PROPOSITION 1.5. - Soient  $A$  un anneau birégulier,  $G$  un groupe localement normal, tel que l'ordre de tout élément  $\neq 1$  de  $G$  soit inversible dans  $A$ . Alors  $A[G]$  est birégulier dans chacun des cas suivants :

- 1°  $A$  est une algèbre de type fini sur son centre,
- 2°  $A$  est auto-injectif à droite.

D'après le lemme 1.4, on peut supposer que  $G$  est un groupe fini dont l'ordre  $n$  est inversible dans  $A$ .

1° Soit  $Z$  le centre de  $A$ ;  $Z[G]$  est un anneau régulier [8], le centre  $K$  de  $A[G]$  est donc un anneau régulier. Soit  $M$  un idéal maximal de  $K$ ;  $M \cap Z = m$  est un idéal maximal de  $Z$ , et l'anneau  $B = A[G]/A[G]M$  qui est un anneau quotient de l'anneau birégulier  $A/Am[G]$  [1], est birégulier. L'assertion résulte alors du corollaire 1.2.

2° Soit  $M$  un idéal maximal du centre  $K$  de l'anneau auto-injectif à droite  $A[G]$  [4].  $M \cap Z = m$  est un idéal maximal du centre  $Z$  de  $A$ . Comme précédemment on voit que  $B = A[G]/A[G]M$  est un anneau birégulier. D'après [12] (prop. 2.9),  $MA[G]$  est un idéal bilatère maximal de  $A[G]$ , et l'assertion résulte de la proposition 1.1.

Remarque. - On peut conjecturer que les conditions 1° et 2° de la proposition 1.3 caractérisent les anneaux de groupe biréguliers; d'après le lemme 1.4, il suffit de résoudre le problème pour les groupes finis.

PROPOSITION 1.6. - Pour un anneau régulier  $A$ , auto-injectif à droite, les conditions suivantes sont équivalentes :

1°  $A$  est un anneau birégulier,

2° Tout idéal premier de  $A$  est maximal.

1°  $\Rightarrow$  2° : C'est évident.

2°  $\Rightarrow$  1° : Soit  $m$  un idéal maximal du centre de  $A$ ; d'après [12] (prop. 2.9),  $Am$  est un idéal premier de  $A$ , donc maximal; l'assertion résulte alors de la proposition 1.1.

Comme un anneau régulier premier, à identité polynomiale, est un anneau simple, il en résulte qu'un anneau régulier auto-injectif à droite à identité polynomiale est birégulier ([9], [10]).

## 2. Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type I ou II.

LEMME 2.1. - Un anneau birégulier  $A$  auto-injectif à droite, qui contient un idempotent fini et fidèle, est un anneau fini.

Soit  $e$  un idempotent fini et fidèle de  $A$ ; il existe un idempotent central  $h$  de  $A$  tel que  $(e) = Ah$ . Comme  $e$  est fidèle, on a  $h = 1$ , ce qui implique une relation de la forme

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i e y_i.$$

Les idéaux à droite  $x_i e y_i A$  sont isomorphes à des facteurs directs de  $eA$ , et par suite  $h$  peut se mettre sous la forme  $h = \sum_{i=1}^k f_i$ , où les  $f_i$  sont des idempotents orthogonaux et finis de  $A$ ; il résulte de [12] (prop. 5.1) que  $A$  est

un anneau fini (i. e.  $(xy = 1) \Rightarrow (yx = 1)$ ).

**LEMME 2.2.** - Soient  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , une suite infinie strictement croissante d'entiers  $(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , une suite d'anneaux réguliers auto-injectifs à droite et finis.  
Alors l'anneau  $A = \prod_{i \in \mathbb{N}} M_{n_i}(A_i)$  n'est pas un anneau birégulier.

Soit  $h_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , l'idempotent central associé au facteur  $M_{n_i}(A_i)$ . On a alors

$$h_i = e_1^i + \dots + e_{k_i}^i,$$

où les  $e_s^i$ ,  $1 \leq s \leq k_i$ , sont des idempotents orthogonaux finis, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et tels que les anneaux  $A_i$  et  $e_s^i M_{n_i}(A_i) e_s^i$  soient isomorphes. Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $e_1^i = e_i$ , et on considère l'élément  $e = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $A$ . L'idéal bilatère  $(e)$ , engendré par  $e$ , contient tous les idempotents  $h_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , et si l'anneau  $A$  est birégulier, alors  $(e) = A$ . Nous allons montrer que c'est impossible. Sinon, il existe une relation de la forme :

$$1 = \sum_{s=1}^p x^s e y^s; \quad x^s = (x_i^s)_{i \in \mathbb{N}}; \quad y^s = (y_i^s)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Soit  $n_k > p$ ; on a  $h_k = \sum_{s=1}^p x_k^s e_1^k y_k^s$ , on en déduit une relation de la forme

$$h_k = \sum_{t=1}^q f_i, \quad f_i = f_i^2,$$

où  $f_i M_{n_k}(A_k)$  est isomorphe à un facteur direct de  $e_1^k M_{n_k}(A_k)$ , avec  $q < n$ . Cela contredit le fait que  $M_{n_k}(A_k)$  est un anneau fini ([12], cor. 5.2).

### THEOREME 2.3.

1° Les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type I sont des produits finis d'anneaux de matrices à coefficients dans des anneaux réduits auto-injectifs.

2° Les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type II sont les produits finis de facteurs de type II<sub>fin</sub>.

La propriété 1° est une conséquence du lemme 2.1 et de [12] (th. 3.7).

Soit  $A$  un anneau birégulier, auto-injectif à droite de type II; d'après le lemme 2.1, c'est un anneau fini et, quel que soit l'entier  $n \geq 1$ , il existe des idempotents orthogonaux  $e_i$  qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et qui vérifient

$$1 = \sum_{i=1}^{2^n} e_i \quad ([12], \text{ lemme 3.11}).$$

Soit  $(h_i)_{i \in I}$  une famille maximale d'idempotents centraux et orthogonaux de  $A$ ;  $A$  est isomorphe à l'anneau produit des anneaux  $Ah_i$ . D'après ce qui précède,  $Ah_i$  est isomorphe à un anneau de la forme  $M_{n_i}(B_i)$ , le lemme 2.2 prouve que  $I$  est un ensemble fini et le centre de  $A$  est un produit fini de corps. D'après [12] (prop. 2.7),  $A$  est un produit fini d'anneaux quasi-simples.

### 3. Anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type III.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont réguliers auto-injectifs à droite de type III. Si  $M$  est un  $A$ -module,  $E(M)$  désigne l'enveloppe injective de  $M$  et, pour tout cardinal  $\alpha$ , on note  $\alpha M$  la somme directe de  $\alpha$  copies de  $M$ . Soit  $b \neq 0$  un élément de  $A$ ; comme  $A$  ne contient pas d'idempotent fini  $\neq 0$ , on a  $eA = E(k_0 e A)$  ([12], prop. 4.2), on désigne par  $\alpha_b$  le plus petit ordinal  $\alpha$  tel que  $bA \neq E(\alpha bA)$  [6], et on a  $k_0 < \alpha_b < 2^{\text{card } A}$ .

**LEMME 3.1.** - Soit  $A$  un anneau auto-injectif à droite de type III, tel qu'il existe un cardinal  $\alpha$ , avec  $\alpha_b = \alpha$ , pour tout  $b \neq 0$ , élément de  $A$ . Alors  $A$  est un anneau birégulier.

Soit  $x \neq 0$ , un élément de  $A$ ; il existe un idempotent central  $h \neq 0$ , et un cardinal  $\beta$ ,  $\beta < \alpha$  tel que  $Ah = E(\beta xhA)$  ([12], lemme 4.1). La relation  $\alpha_h = \alpha_{xh}$  implique que les  $A$ -modules  $xhA$  et  $Ah$  sont isomorphes.

En considérant une famille maximale  $(k_j)_{j \in J}$  d'idempotents centraux orthogonaux de  $Ac(x)$ , où  $c(x)$  désigne la couverture centrale de  $x$ , telle que  $k_j A$  soit isomorphe à  $k_j xA$ , on déduit facilement de ce qui précède que  $A c(x) = (x)$ , donc  $A$  est birégulier.

On dira qu'un anneau régulier auto-injectif à droite est de type  $\text{III}_\alpha$ , s'il existe un cardinal  $\alpha$  tel que  $\alpha_b = \alpha$  pour tout élément  $b \neq 0$  de  $A$ .

**THÉOREME 3.2.** - Soit  $A$  un anneau régulier auto-injectif à droite de type  $\text{III}$ . Alors  $A$  est isomorphe à un produit d'anneaux  $A_j$ ,  $j \in J$ , où  $A_j$  est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre  $D_j^{(I)}$  sur un anneau birégulier  $D_j$  de type  $\text{III}_{\alpha_j}$ .

Soit  $f \neq 0$  un idempotent de  $A$  tel que  $\alpha_f$  soit le plus petit élément de l'ensemble des  $\alpha_b$ ,  $b \neq 0$ ,  $b \in A$ . Nous allons montrer qu'il existe un idempotent central  $h \neq 0$  tel que l'anneau  $B = hfAf$  soit de type  $\text{III}_{\alpha_f}$ . Pour cela, on peut évidemment supposer  $f$  fidèle. Considérons une famille maximale  $(h_i)_{i \in I}$  d'idempotents centraux orthogonaux de  $A$  tels que  $\alpha_{h_i f} > \alpha_f$ , pour  $i \in I$ . Si  $(1-h)$  désigne la borne supérieure des  $h_i$ ,  $i \in I$ , on a  $1-h \neq 1$ . En effet, sinon  $hA$  serait extension essentielle de la somme directe  $\bigoplus_{i \in I} h_i fA$  et les relations  $h_i fA = E(\alpha_f h_i f(A))$  impliqueraient  $fA = E(\alpha_f fA)$  ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur  $f$ . Soit  $y \neq 0$ , un élément de  $A_h$ ; on a  $\alpha_y \geq \alpha_f$  par définition de  $f$ ; on désigne par  $\beta yhA$  une somme directe maximale de sous-modules isomorphes à  $yhA$ , contenue dans  $yhA$ , et par  $\beta yhA \oplus \gamma yhA$  une somme directe maximale de sous-modules isomorphes à  $yhA$  contenue dans  $hA$ . D'après [12] (lemme 4.1), il existe un idempotent central  $k \neq 0$  de  $A$  tel que l'on ait

$$kfA = E(\beta kyhA \oplus \gamma kyhA),$$

ce qui implique  $\beta \leq \alpha_f$ , car  $k \in hA$ ; donc  $\alpha_y = \alpha_f$ , quel que soit  $y \neq 0$ ,  $y \in fhA$ . On en déduit que, pour tout  $b \neq 0$ ,  $b \in B = fhAf$ , on a  $\alpha_b = \alpha_f$ , donc  $B$  est de type  $III_{\alpha_f}$  (lemme 3.1). En utilisant alors les techniques de [12] (cor. 3.4, prop. 4.3), on obtient le théorème.

**LEMME 3.3.** - Pour un idempotent  $e \neq 0$  d'un anneau  $A$  régulier auto-injectif à droite de type III, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1° L'idéal bilatère  $(e)$  est facteur direct de  $A$ ,
- 2° Il existe des éléments  $u, v$  de  $A$  et un idempotent central  $h$  qui vérifient  $uv = h$ ,  $vu = e$ .

Pour que l'idéal  $(e)$  soit facteur direct de  $A$ , il faut, et il suffit, qu'il existe un idempotent central  $h$  qui vérifie les relations :

$$h = \sum_{i=1}^n a_i e b_i ; \quad e = he .$$

Comme  $e$  n'est pas un idempotent fini, cela revient à dire que  $hA$  est isomorphe à un facteur direct de  $eA$ , ou encore que  $hA$  est isomorphe à  $eA$  [2], c'est ce qui est exprimé par la propriété 2°.

**THÉORÈME 3.4.**

1° Tout produit d'anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type III est un anneau birégulier.

2° Tout anneau birégulier auto-injectif à droite de type III est un produit d'anneaux  $A_j$ ,  $j \in J$ , où  $A_j$  est de type  $III_{\alpha_j}$ .

La propriété 1° est une conséquence immédiate du lemme 3.3. Démontrons la propriété 2°. Soient  $f \neq 0$  un idempotent de  $A$ ,  $h$  sa couverture centrale; d'après le lemme 3.3, on a  $\alpha_f = \alpha_h$ . La première partie de la démonstration du théorème 3.2 montre qu'il existe un idempotent central  $k \neq 0$ , tel que  $Ak$  soit de type  $III_{\alpha}$ , le théorème s'en déduit facilement.

**Remarque 1.** - Soient  $\alpha \geq 1$  un cardinal,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $\alpha$  sur un corps  $k$ . L'algèbre tensorielle  $T(E)$  est de dimension  $\aleph_0$  si  $\alpha \leq \aleph_0$ , de dimension  $\alpha$  si  $\alpha > \aleph_0$ . L'enveloppe injective  $A$  de  $T(E)$  est de type  $III_{\alpha}$ : on sait, en effet, que  $A$  est de type III [3], et il suffit de remarquer que l'on a  $\alpha_x = \alpha_1 = \alpha$ , pour tout  $x \neq 0$ . De plus, comme  $A$  est un anneau intègre,  $A$  est un facteur de type III.

**Remarque 2.** - L'enveloppe injective d'un anneau birégulier n'est pas nécessairement un anneau birégulier. Soient  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de facteurs de type  $I_{fin}$  (resp.  $II_{fin}$ ) admettant pour centre un même corps  $K$ . On considère le sous-anneau  $B$  de l'anneau produit  $A = \prod_n A_n$ , constitué des éléments  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , où  $x_i = a$ ,  $a \in K$ , pour  $i$  suffisamment grand.  $B$  est un anneau birégulier d'enveloppe injective  $A$ . Si  $A_n = M_n(K)$  ou si les  $A_n$  sont de type II,  $A$  n'est pas birégu-

lier (théorème 2.3).

LEMME 3.5. - Soit A un anneau à idéal singulier à droite nul dont l'enveloppe injective  $\hat{A}$  admet une composante de type III  $\hat{A}h$  non nulle. Alors si  $e \neq 0$  est un idempotent de  $\hat{A}$ , il existe des idempotents centraux et orthogonaux  $h_i$ ,  $i \in I$ , de  $\hat{A}h$ , des cardinaux infinis  $\alpha_i$  des éléments  $x_i$  de A, tels que  $e\hat{A} = E(\bigoplus_{i \in I} \alpha_i(h_i x_i A))$ ;  $h_i$  est la couverture centrale de  $h_i x_i$ ,  $k = \sup_{i \in I} h_i$  est la couverture centrale de  $e$ . De plus, si pour tout  $i \in I$ , on a

$$\hat{A}h_i x_i \hat{A} = h_i \hat{A},$$

alors  $\hat{A}e\hat{A} = \hat{A}k$ .

La première partie du lemme est une conséquence facile de [12] (lemme 4.1). On a les isomorphismes suivants :

$$k\hat{A} \simeq \prod_{i \in I} h_i \hat{A}; \quad e\hat{A} \simeq \prod_{i \in I} e h_i \hat{A}.$$

On a de plus,  $\hat{A}\alpha_i(h_i x_i A) \hat{A} = \hat{A}h_i x_i \hat{A}$ , et, comme  $\hat{A}$  est de type III, l'hypothèse implique que  $h_i \hat{A}$  et  $eh_i \hat{A}$  sont isomorphes (lemme 3.3), donc  $k\hat{A}$  et  $e\hat{A}$  sont isomorphes, ce qui entraîne la relation  $k\hat{A} = \hat{A}e\hat{A}$ .

PROPOSITION 3.6. - Soit A un anneau birégulier dont l'enveloppe injective  $\hat{A}$  est de type III; alors  $\hat{A}$  est un anneau birégulier.

Nous reprenons les notations du lemme 3.5. On pose  $Ax_i A = Ak_i$ , où  $k_i$  est un idempotent central de A, donc  $\hat{A}x_i \hat{A} = \hat{A}k_i$ . On en déduit alors les relations :  $\hat{A}h_i x_i \hat{A} = \hat{A}h_i k_i = \hat{A}h_i$ ; d'après le lemme 3.5,  $\hat{A}$  est birégulier. Nous allons compléter les résultats de [3].

PROPOSITION 3.7. - L'enveloppe injective d'un anneau réduit A est un anneau birégulier.

D'après les résultats de [3], il suffit de prouver que la composante  $\hat{A}h$  de type III de  $\hat{A}$ , enveloppe injective de A, est un anneau birégulier.

Soit  $e \neq 0$  un idempotent de  $\hat{A}h$ ; d'après le lemme 3.5, il suffit de considérer la situation  $\hat{A}h_i \supset eh_i \hat{A} = E(\alpha_i h_i x_i A)$ , où  $x_i \in \hat{A}h \cap A$ , et où  $h_i$  désigne la couverture centrale de  $h_i x_i$ . L'annulateur à droite  $r_{\hat{A}h_i}(h_i x_i)$  de  $h_i x_i$  dans  $\hat{A}h_i$  est nul. En effet, l'idéal à droite  $J = r_{\hat{A}h_i}(h_i x_i) \cap (\hat{A}h_i \cap A)$  est un idéal bilatère de l'anneau réduit A, on a alors  $J(\hat{A}h_i x_i) = (0)$ , donc  $J = (0)$ , ce qui prouve que  $r_{\hat{A}h_i}(h_i x_i) = (0)$ . On en déduit que  $h_i x_i \hat{A}$  est isomorphe à  $h_i \hat{A}$  et, par suite,  $\hat{A}(\alpha_i h_i x_i A) \hat{A} = \hat{A}h_i x_i \hat{A} = \hat{A}h_i$ , et la proposition résulte du lemme 3.5.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOVDI (A.) and MIHOVSKI (S. V.). - Idempotents in crossed products, Soviet Math. Dokl., t. 11, 1970, p. 1439-1441; [en russe] Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 195, 1970, p. 263-265.



- [2] BUMBY (R. T.). - Modules which are isomorphic to submodules of each other, Archiv der Math., Basel, t. 16, 1965, p. 184-185.
- [3] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). - Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 133-141.
- [4] CONNELL (I. G.). - On the group ring, Canad. math. J., t. 15, 1963, p. 650-685.
- [5] FAITH (C.). - Lectures on injective modules and quotient rings. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lectures Notes in Mathematics, 49).
- [6] GOODEARL (K. R.). - Prime ideals in regular self-injective rings, Canad. J. Math., t. 25, 1973, p. 829-839.
- [7] KAPLANSKY (I.). - Rings of operators. - New York, W. A. Benjamin, 1968 (Mathematics Lecture Note Series).
- [8] LAMBECK (J.). - Lectures on rings and modules. - New York, Blaisdell, 1966 (A Blaisdell Book in pure and applied Mathematics).
- [9] PAGE (A.). - Une caractérisation des anneaux réguliers à identité polynomiale, Séminaire d'algèbre non commutative, 1972/73. - Orsay, UER Mathématique (Publications mathématiques d'Orsay) (à paraître).
- [10] PAGE (A.). - Généralisation aux anneaux à identité polynomiale d'un théorème de I. Kaplansky, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 233-235.
- [11] RENAULT (G.). - Anneaux de groupes biréguliers, Séminaire d'algèbre non commutative, 1973/74. - Orsay, UER Mathématique (Publications mathématiques d'Orsay) (à paraître).
- [12] RENAULT (G.). - Anneaux réguliers auto-injectifs à droite, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 237-254.

(Texte reçu le 5 juin 1974)

Guy RENAULT  
 Université de Poitiers  
 Mathématiques  
 40 avenue du Recteur Pineau  
 86022 POITIERS

---