Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Klaus Keimel

Représentation des algèbres universelles par des faisceaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 2 (1973-1974), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 12, 9 p.

4 mars 1974

REPRÉSENTATION DES ALGÈBRES UNIVERSELLES PAR DES FAISCEAUX

par Klaus KEIMEL

En algèbre universelle, on utilise couramment des représentations sous-directes dans le but d'obtenir des renseignements sur une algèbre universelle A en connaissant bien les facteurs d'une représentation sous-directe. Si l'on peut représenter une algèbre universelle A comme l'algèbre de toutes les sections globales d'un faisceau, alors A est un produit sous-direct des fibres du faisceau, mais un produit sous-direct d'une nature bien particulière. Une telle représentation par un faisceau peut donc apporter beaucoup plus de renseignements sur A qu'une simple représentation sous-directe.

Dans la théorie des anneaux, l'utilisation des faisceaux est devenue une méthode standard. On consultera le mémoire de K. H. HOFMANN [9] à ce sujet. Mais la méthode de représentation par faisceaux a pu être appliquée à d'autres structures algébriques (cf. COMER [3], KEIMEL [10], [11], KEIMEL et WERNER [12]) de manière qu'on a été amené à étudier la question des représentations par faisceaux dans le cadre général de l'algèbre universelle (cf. COMER [4], DAVEY [7], KEIMEL [11], WOLF [19], [20]). Récemment, on a procédé à l'utilisation des représentations par faisceaux comme méthode dans la théorie des modèles (cf. COMER [5], CARSON [2], ELLERMANN [21], MACINTYRE [16].)

Dans cet exposé, nous voulons présenter quelques aspects clefs de la théorie que nous venons de décrire.

1. Préliminaires.

1.1. Algèbres. - Soient I un ensemble, et $\tau = (n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels. On appelle algèbre du type τ tout ensemble A accompagné d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'opérations

$$f_i : A^{n_i} \to A .$$

Homomorphismes, produits directs, sous-algèbres et congruences d'algèbres du type τ sont définis de la manière habituelle (On pourra consulter le livre de GRÄTZER [8] à ce sujet). Pour une algèbre A, on désignera par $\mathcal{C}(A)$ le treillis des congruences de A. On notera $\omega = A \times A$ la congruence universelle, et Δ la congruence identique (= la diagonale de $A \times A$). Si θ et ψ sont des congruences, $\theta \circ \psi$ désigne le produit relationnel de θ et ψ, et $\theta \vee \psi$ la borne supérieure de θ et ψ dans le treillis $\mathcal{C}(A)$. On dira que θ et ψ sont permutables si $\theta \circ \psi = \psi \circ \theta$, ce qui revient à dire que $\theta \circ \psi = \theta \vee \psi$.

1.2. Préfaisceaux d'algèbres. - Soit X un espace topologique. Si, pour chaque ouvert $\mathcal{U} \subset X$, on se donne une algèbre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ du type τ et, pour tout ouvert

$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, un homomorphisme $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, on a un <u>préfaisceau</u> $\mathcal{P}$ <u>d'algèbres du type</u> τ pourvu que, pour tout ouvert $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}$. L'application $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$ est aussi appelée restriction de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$, et, pour $s \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, on écrit aussi $s|\mathcal{V}$ à la place de $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(s)$.

1.3. <u>Faisceaux d'algèbres</u>. – Si F et X sont des espaces topologiques, et si $\eta : F \to X$ est un homéomorphisme local, le triple $\mathfrak{F} = (F , \eta , X)$ est appelé <u>faisceau d'ensembles sur</u> X .

Soit $\mathfrak{F} = (F , \eta , X)$ un faisceau d'ensembles. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $F_x = \eta^{-1}(x)$ est la <u>fibre</u> de $\mathfrak{F}$ sur x . Pour tout entier naturel n , on définit le faisceau $\mathfrak{F}^{(n)} = (F^{(n)} , \eta^{(n)} , X)$ de la manière suivante :

$$F^{(n)} = \bigcup_{x \in X} (F_x)^n \subset F^n$$

muni de la topologie induite de la topologie produit sur F^n ; et

$$\eta^{(n)} : F^{(n)} \to X$$

est l'application $(F_x)^n \to x$.

Un <u>faisceau d'algèbres du type</u> τ est un faisceau d'ensembles $\mathfrak{F} = (F , \eta , X)$ dont chaque fibre F_x , $x \in X$, est une algèbre du type τ telle que, pour tout $i \in I$, l'application

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_{n_i}) \longmapsto f_i(x_1 , x_2 , \ldots , x_{n_i}) : F^{(n_i)} \to F$$

soit continue.

1.4. <u>Sections</u>. – Soit $\mathfrak{F} = (F , \eta , X)$ un faisceau d'algèbres. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X . Toute application continue $\sigma : \mathcal{U} \to F$ telle que $\eta \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ est appelée <u>section de</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> $\mathcal{U}$. On désigne par $\Gamma(\mathcal{U} , \mathfrak{F})$ l'ensemble de ces sections. On vérifie facilement que $\Gamma(\mathcal{U} , \mathfrak{F})$ est une sous-algèbre du produit direct des fibres F_x , $x \in \mathcal{U}$.

1.5. <u>Faisceau associé à un préfaisceau</u>. – Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau d'algèbres du type τ sur un espace topologique X . Pour tout $x \in X$, soit $\mathfrak{U}_x$ un système fondamental de voisinages ouverts de x . Définissons l'algèbre

$$F_x = \varinjlim_{\mathfrak{U}_x} \mathcal{P}(\mathcal{U}) .$$

Soient F la réunion <u>disjointe</u> des algèbres F_x , $x \in X$, et $\eta : F \to X$ l'application évidente $F_x \to x$. Pour tout $s \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, on obtient une application $\hat{s} : \mathcal{U} \to F$ en définissant $\hat{s}(x)$ comme l'image canonique de s dans

$$\mathcal{P}_x = \varinjlim \mathcal{P}(\mathcal{U}) .$$

Les ensembles de la forme $\hat{s}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ ouvert de X et $s \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, forment une base d'une topologie sur F telle que $\mathfrak{F} = (F , \eta , X)$ soit un faisceau d'algèbres ; de plus, $s \longmapsto \hat{s}$ est un homomorphisme de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ dans l'algèbre $\Gamma(\mathcal{U} , \mathfrak{F})$ des sections sur $\mathcal{U}$.

CRITÈRE. - $s \longmapsto \hat{s} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ <u>est un isomorphisme si, et seulement si, pour tout recouvrement ouvert</u> $(\mathcal{U}_j)_j$ <u>de</u> $\mathcal{U}$, <u>la condition suivante est vérifiée</u> : <u>Pour toute famille</u> $(s_j)_j$ <u>d'éléments</u> $s_j \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_j)$ <u>telle que</u>

$$s_j|\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k = s_k|\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$$

<u>quels que soient</u> j , k , <u>il existe un unique élément</u> $s \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ <u>tel que</u> $s|\mathcal{U}_j = s_j$ <u>pour tout</u> j . <u>Si</u> $\mathcal{U}$ <u>est quasi-compact, il suffit de considérer les recouvrements ouverts finis</u>.

1.6. <u>Remarque</u>. - On trouvera une étude détaillée et plus complète sur les notions de préfaisceaux et faisceaux d'algèbres universelles dans un mémoire de DAVEY [7].

2. Théorèmes de représentation.

Soit A une algèbre du type τ .

2.1. <u>Treillis de congruences adaptés</u>. - Soit $\mathfrak{L}$ un sous-treillis du treillis $\mathcal{C}(A)$ des congruences de A . On dira que $\mathfrak{L}$ est <u>adapté</u> si les conditions suivantes sont vérifiées :

(2.a) $\Delta \in \mathfrak{L}$, $\omega \in \mathfrak{L}$;

(2.b) Quels que soient a , $b \in A$, on a $\bigcap\{\theta \in \mathfrak{L} ; (a , b) \in \theta\} \in \mathfrak{L}$;

(2.c) Quels que soient θ , φ , $\psi \in \mathcal{C}(A)$, on a que $\theta \cap \varphi = \Delta$, et $\theta \cap \psi = \Delta$ impliquent $\theta \cap (\varphi \vee \psi) = \Delta$.

2.2. <u>Le spectre de</u> $\mathfrak{L}$. - Soit $\mathfrak{L}$ un sous-treillis adapté de $\mathcal{C}(A)$. On désigne par $\operatorname{Spec} \mathfrak{L}$ l'ensemble des idéaux premiers p du treillis $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire l'ensemble des parties non vides $p \subset \mathfrak{L}$ telles que, quels que soient θ , $\psi \in \mathfrak{L}$, on ait :

(2.d) $\theta \in p$, $\psi \in p$ impliquent $\theta \vee \psi \in p$;

(2.e) $\theta \subset \psi \in p$ implique $\theta \in p$;

(2.f) $\theta \cap \psi \in p$ implique $\theta \in p$ ou $\psi \in p$.

Si, pour tout $\theta \in \mathfrak{L}$, on note

$$S(\theta) = \{p \in \operatorname{Spec} \mathfrak{L} ; \theta \notin p\} ,$$

on a les propriétés suivantes :

(2.g) $S(\omega) = \operatorname{Spec} \mathfrak{L}$, $S(\Delta) = \emptyset$;

(2.h) $S(\theta) \cup S(\psi) = S(\theta \vee \psi)$ quels que soient θ , $\psi \in \mathfrak{L}$;

(2.i) $S(\theta) \cap S(\psi) = S(\theta \cap \psi)$ quels que soient θ , $\psi \in \mathfrak{L}$.

Cela montre que la famille $\mathfrak{B} = \{S(\theta) ; \theta \in \mathfrak{L}\}$ est la base d'une topologie sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{L}$ que nous appellerons <u>topologie spectrale</u>. Nous munissons $\operatorname{Spec} \mathfrak{L}$ de cette topologie. Puisque $\omega \in \mathfrak{L}$ d'après (2.a), on démontre facilement que $\operatorname{Spec} \mathfrak{L}$ <u>est quasi-compact</u>.

2.3. <u>Le préfaisceau</u> $\mathcal{P}(A , \mathcal{L})$ <u>et le faisceau</u> $\mathcal{F}(A , \mathcal{L})$. - Soient A une algèbre, et $\mathcal{L}$ un sous-treillis adapté du treillis des congruences de A . Pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \operatorname{Spec} \mathcal{L}$, posons

$$\theta_{\mathcal{U}} = \bigcup \{\theta \ ; \ \theta \in p \ \text{ pour tout } p \in \mathcal{U}\}$$

$\theta_{\mathcal{U}}$ est une congruence. Posons :

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = A/\theta_{\mathcal{U}} \ .$$

Si $\mathcal{V}$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{U}$, alors $\theta_{\mathcal{U}}$ est contenu dans $\theta_{\mathcal{V}}$. On a donc un homomorphisme surjectif $\mathcal{P}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : A/\theta_{\mathcal{U}} \to A/\theta_{\mathcal{V}}$ qui à la classe d'un élément a modulo $\theta_{\mathcal{U}}$ associe la classe de a modulo $\theta_{\mathcal{V}}$. Il est clair que $\mathcal{P}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{P}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} = \mathcal{P}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}$ si $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Ainsi, nous avons défini un préfaisceau $\mathcal{P}$ d'algèbres sur $\operatorname{Spec} \mathcal{L}$, que l'on pourra désigner par $\mathcal{P}(A , \mathcal{L})$ pour indiquer la dépendance de l'algèbre A et du treillis $\mathcal{L}$.

Au préfaisceau $\mathcal{P}(A , \mathcal{L})$ correspond un faisceau d'algèbres, suivant (1.5), que nous désignerons par $\mathcal{F}(A , \mathcal{L})$.

2.4. PROBLÈME. - <u>Sous quelles hypothèses, l'algèbre</u> A <u>est-elle isomorphe à l'algèbre de toutes les sections globales du faisceau</u> $\mathcal{F}(A , \mathcal{L})$?

Avant de donner deux conditions suffisantes, remarquons d'abord que les hypothèses (2.a, b, c) permettent de montrer le résultat suivant.

2.5. LEMME. - $\bigcap \{p \ ; \ p \in \operatorname{Spec} \mathcal{L}\} = \{\Delta\}$.

Le lemme précédent et la définition de $\theta_{\mathcal{U}}$, appliquée au cas $\mathcal{U} = S(\psi)$ impliquent le lemme ci-dessous.

2.6. LEMME. - <u>Pour tout</u> $\psi \in \mathcal{L}$, <u>on a</u> $\theta_{S(\psi)} = \psi^{\perp}$ <u>et</u> $\mathcal{P}(S(\psi)) = A/\psi^{\perp}$, <u>où</u>

$$\psi^{\perp} = \bigcup \{\theta \in \mathcal{L} \ ; \ \psi \cap \theta = \Delta\} \ .$$

Maintenant nous pouvons énoncer nos deux théorèmes de représentation.

2.7. THÉORÈME (K. H. HOFMANN [9]). - <u>Soient</u> A <u>un anneau unitaire semipremier, et</u> $\mathcal{L}$ <u>le treillis de tous les idéaux de</u> A . <u>Alors</u> A <u>est isomorphe à l'anneau de toutes les sections globales du faisceau</u> $\mathcal{F}(A , \mathcal{L})$.

Pour la démonstration, remarquons d'abord que les congruences correspondent aux idéaux de A ; ainsi $\mathcal{L} = \mathcal{C}(A)$. Les conditions (2.a) et (2.b) sont trivialement satisfaites ; et (2.c) est vérifiée puisque A est supposé semipremier. Donc $\mathcal{L}$ est adapté. Pour montrer " A est isomorphe à l'anneau des sections globales de $\mathcal{F}(A , \mathcal{L})$ ", nous appliquons le critère donné dans (1.5).

Soit donc $\mathcal{U}_1 , \dots , \mathcal{U}_n$ un recouvrement ouvert fini de $\operatorname{Spec} \mathcal{L}$, et soient $s_1 , \dots , s_n$ des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{U}_1) , \dots , \mathcal{P}(\mathcal{U}_n)$ respectivement, tels que

(C) $\qquad s_i | \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = s_j | \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ quels que soient i , j .

On peut supposer que chaque $\mathcal{U}_i$ est un ouvert de base $S(\psi_i)$ avec $\psi_i \in \mathfrak{L}$. Alors $\mathcal{P}(\mathcal{U}_i) = A/\psi_i^\perp$ d'après (2.6). On peut donc supposer que s_i est la classe d'un élément $a_i \in A$ modulo ψ_i. La condition de compatibilité (C) s'écrit alors

$$a_i \equiv a_j \quad \text{modulo } (\psi_i \cap \psi_j)^\perp .$$

De plus, on a

$$\operatorname{Spec} \mathfrak{L} = \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n = S(\psi_1) \cup \ldots \cup S(\psi_n) = S(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) = S(\psi_1 + \ldots + \psi_n) ,$$

si l'on interprète les ψ_i comme des idéaux. Cela implique $A = \psi_1 + \ldots + \psi_n$. Il y a donc des éléments $b_i \in \psi_i$, $i = 1, \ldots, n$, tels que $1 = b_1 + \ldots + b_n$. Posons $s = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Alors

$$s - a_j = \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_j b_i = \sum_{i=1}^n (a_i - a_j) b_i \in (\psi_i \cap \psi_j)^\perp \cap \psi_i \subset \psi_j^\perp .$$

Donc $s \equiv a_j$ modulo $\psi_j^\perp$ et, par suite, $s|\mathcal{U}_j = s_j$ quel que soit $j = 1, \ldots, n$. L'unicité de s résulte du fait que $s'|\mathcal{U}_j = s_j$ pour tout j implique $s \equiv s'$ modulo $\psi_j^\perp$ pour tout j, d'où

$$s \equiv s' \quad \text{modulo } \bigcap_j \psi_j^\perp = (\textstyle\sum_j \psi_j)^\perp = A^\perp = \{0\} .$$

2.8. Remarque. - Le lecteur attentif aura remarqué que le théorème (2.7) reste valable si A est un ensemble muni d'une loi de groupe $(x, y) \longmapsto x + y$ non nécessairement commutative et d'une loi de composition $(x, y) \longmapsto xy$, distributive par rapport à $+$ et admettant un élément neutre. L'associativité de la multiplication n'est pas nécessaire.

2.9. THÉORÈME (A. WOLF [20]). - *Soient A une algèbre, et $\mathfrak{L}$ un sous-treillis adapté du treillis $\mathcal{C}(A)$ des congruences de A. Si $\mathfrak{L}$ est distributif, et si les congruences appartenant à $\mathfrak{L}$ sont mutuellement permutables, alors A est isomorphe à l'algèbre de toutes les sections du faisceau $\mathfrak{F}(A, \mathfrak{L})$.*

Pour la démonstration, il suffira, comme dans la démonstration du théorème 2.7, de montrer : Si $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sont des congruences appartenant à $\mathfrak{L}$ telles que $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n = \omega$ et si $s_1, \ldots, s_n$ sont des éléments de A tels que $s_i \equiv s_j$ modulo $(\psi_i \cap \psi_j)^\perp$ quels que soient $i, j = 1, \ldots, n$, alors il existe un élément $s \in A$, et un seul, tel que $s \equiv s_j$ modulo $\psi_j^\perp$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Or, puisque $(s_i, s_k) \in (\psi_i \cap \psi_k)^\perp$, il existe $\psi_{ik} \in \mathfrak{L}$ tel que $\psi_{ik} \subset (\psi_i \cap \psi_k)^\perp$ et $(s_i, s_k) \in \psi_{ik}$ (Noter que $(\psi_i \cap \psi_k)^\perp$ n'appartient pas nécessairement à $\mathfrak{L}$). On peut supposer que $\psi_{ik} = \psi_{ki}$. Quels que soient i, j, on a alors :

$$\begin{aligned}
(s_i, s_j) \in \bigcap_{k=1}^n \psi_{ik} \circ \psi_{kj} &= \bigcap_{k=1}^n (\psi_{ik} \vee \psi_{jk}) \\
&= \bigcap_{k=1}^n [(\psi_{ik} \cap \textstyle\bigvee_{\ell=1}^n \psi_\ell) \vee (\psi_{jk} \cap \bigvee_{\ell=1}^n \psi_\ell)] \\
&= \bigcap_{k=1}^n [\textstyle\bigvee_{\ell=1}^n (\psi_{ik} \cap \psi_\ell) \vee \bigvee_{\ell=1}^n (\psi_{jk} \cap \psi_\ell)] \\
&\subset \textstyle\bigvee_{\ell=1}^n (\psi_{i\ell} \cap \psi_\ell) \vee \bigvee_{\ell=1}^n (\psi_{j\ell} \cap \psi_\ell)
\end{aligned}$$

En posant $\theta_i = \bigvee_{\ell=1}^{n} (\psi_{i\ell} \cap \psi_\ell)$, on a :

$$(s_i , s_j) \subset \theta_i \circ \theta_j \quad \text{quels que soient } i , j .$$

Puisque $\theta_i \in \mathfrak{L}$ et puisque $\mathfrak{L}$ est un treillis distributif de congruences deux à deux permutables, on peut appliquer une version du théorème chinois que l'on trouve dans GRÄTZER ([8], p. 221), et l'on obtient l'existence d'un $s \in A$ tel que $s \equiv s_j$ modulo θ_j pour tout $j = 1 , \ldots , n$. Puisque $\theta_j \subset \psi_j^{\perp}$, on a aussi $s \equiv s_j$ modulo $\psi_j^{\perp}$. L'unicité de s se démontre comme dans (2.7).

2.10. COROLLAIRE. - Soit A une algèbre arithmétique, c'est-à-dire une algèbre dont les congruences sont mutuellement permutables et forment un treillis distributif. Soit $\mathfrak{L} = \mathcal{C}(A)$ le treillis de toutes les congruences de A . Alors A est isomorphe à l'algèbre de toutes les sections globales du faisceau $\mathfrak{F}(A , \mathfrak{L})$.

Remarque. - Soit X un sous-espace de $\operatorname{Spec} \mathfrak{L}$ qui contient tous les idéaux maximaux de $\mathfrak{L}$ et qui a la propriété que $\bigcap \{p ; \ p \in X\} = \{\Delta\}$. Soit $\mathfrak{F}_X$ la restriction du faisceau $\mathfrak{F}(A , \mathfrak{L})$ à l'espace X . Sous les hypothèses des théorèmes (2.7), (2.9) ou (2.10), A est aussi isomorphe à $\Gamma(X , \mathfrak{F}_X)$.

2.11. COROLLAIRE (DAUNS et HOFMANN [6]). - Soit A un anneau commutatif régulier (au sens de von NEUMANN) unitaire. Il existe un espace compact éparpillé X et un faisceau $\mathfrak{F}$ de corps sur X tel que A soit isomorphe à l'anneau des sections globales de $\mathfrak{F}$.

2.12. COROLLAIRE (KEIMEL [10]). - Soit A un f-anneau (c'est-à-dire un anneau réticulé dans lequel $a \wedge b = 0$ implique $a \wedge bx = 0 = a \wedge xb$) commutatif unitaire, régulier (au sens de von NEUMANN). Alors, il existe un espace compact éparpillé X et un faisceau $\mathfrak{F}$ de corps totalement ordonnés sur X tel que A soit isomorphe à l'anneau réticulé de toutes les sections globales de $\mathfrak{F}$.

En effet, sous les hypothèses des deux corollaires, $\mathcal{C}(A)$ est distributif, et les congruences sont mutuellement permutables. Pour X on choisit l'espace des idéaux maximaux de A , qui, dans ce cas, est isomorphe à l'espace de Stone de l'algèbre de Boole des éléments idempotents de A .

2.13. PROBLÈME. - Donner un théorème qui contient les théorèmes (2.7) et (2.9) comme des cas particuliers.

3. Théorie des modèles.

3.1. Langages. - Considérons le langage L du premier ordre dans lequel on peut formuler la théorie des algèbres d'un type $\Delta = (n_i)_{i \in I}$: Le langage L est basé sur les symboles suivants :

les variables $x , y , z , \ldots$;

les connecteurs logiques $\vee , \wedge , \neg$ et l'égalité $=$;

les quantificateurs $\forall_x$ $\exists_y$;

les symboles opérationnels $\underset{\sim}{f}_i$ $(i \in I)$.

Par récurrence, on définit les *termes* du langage L : Les variables $x, y, z, \ldots$ sont des termes, et si $T_1 , T_2 , \ldots , T_{n_i}$ sont des termes, il en est de même de $\underset{\sim}{f}_i(T_1 , T_2 , \ldots , T_{n_i})$. Une *formule atomique* est une expression de la forme $T_1 = T_2$, où T_1 et T_2 sont des termes. Les expressions construites à partir de formules atomiques en utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs sont les *formules*. Une *formule close* est une formule sans variable libre.

3.2. *Théories et modèles*. - Tout ensemble T de formules closes est une *théorie*. Si $\mathfrak{A}$ est une classe d'algèbres du type Δ , l'ensemble $T(\mathfrak{A})$ des formules closes, qui donnent des théorèmes vrais dans chaque algèbre $A \in \mathfrak{A}$, est appelé la *théorie* de $\mathfrak{A}$. Réciproquement, si T est une théorie, toute algèbre A , dans laquelle les formules closes $\Phi \in T$ sont des assertions vraies, est un *modèle de* T .

3.3. *Théories complètes*. - Une *théorie* T est *complète* si, pour toute formule close Φ , ou bien Φ , ou bien $\neg \Phi$, est une conséquence de T . Une théorie T est *modèle-complète* si, pour tout modèle A de T , la théorie T_A est complète. (Pour obtenir la théorie T_A , on élargit d'abord le langage L en y ajoutant un symbole $\underset{\sim}{a}$ pour tout élément $a \in A$, et on ajoute à T celles des formules de la forme $\underset{\sim}{f}_i(\underset{\sim}{a}_1 , \underset{\sim}{a}_2 , \ldots , \underset{\sim}{a}_{n_i}) = \underset{\sim}{a}$ ou $\underset{\sim}{f}_i(\underset{\sim}{a}_1 , \underset{\sim}{a}_2 , \ldots , \underset{\sim}{a}_{n_i}) \neq \underset{\sim}{a}$ qui sont vraies dans A .) Dans une théorie modèle-complète, toute formule est équivalente à une formule existentielle. Une théorie T est dite *positivement modèle-complète*, si T est modèle-complète, et si toute formule existentielle est équivalente à une formule existentielle positive. Sont complètes et positivement modèle-complètes : la théorie des corps algébriquement clos d'une caractéristique p fixe (p premier ou nul) ; la théorie des corps formellement réels clos.

3.4. THEOREME (MACINTYRE [16]). - *Soit L un langage qui comprend le langage de la théorie des anneaux. Soit T une théorie qui contient les axiomes de la théorie des anneaux, l'axiome $1 \neq 0$ et l'axiome que 1 et 0 sont les seuls éléments idempotents. Considérons la classe $\mathfrak{S}$ de tous les faisceaux $\mathfrak{F} = (E , \eta , X)$ d'algèbres de type Δ , dont toutes les fibres sont des modèles de T et dont l'espace de base X est un espace de Boole sans point isolé. Soit T' la théorie des algèbres $\Gamma(X , \mathfrak{F})$ de sections globales des faisceaux $\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}$. Si T est complète et positivement modèle-complète, la théorie T' est modèle-complète. Si L est le langage de la théorie des anneaux et T seulement positivement modèle-complète, la théorie T' est aussi modèle-complète.*

3.5. *Application* A. - Considérons le langage de la théorie des anneaux. Soit T' la théorie formée des axiomes suivants :

(i) A est un anneau commutatif unitaire ;

(ii) A est régulier (au sens de von NEUMANN) ;

(iii) A est de caractéristique p ;

(iv) A est sans atome, c'est-à-dire que, pour tout élément idempotent $e \neq 0$, il existe un élément idempotent f tel que $ef = f$, $0 \neq f \neq e$;

(v) A est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme

$$p(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \dots + a_1\, x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_i \in A$$

admet une solution dans A .

En utilisant le corollaire (2.11) , on vérifie que les modèles de la théorie T sont exactement les anneaux $\Gamma\mathfrak{F}$ des sections globales de faisceaux $\mathfrak{F} = (E, \eta, X)$, dont les fibres sont des corps algébriquement clos de caractéristique p et dont l'espace de base X est un espace de Boole sans point isolé. D'après le théorème de MACINTYRE (3.4), <u>la théorie T' est donc modèle-complète</u>. Ce résultat est dû indépendemment à LIPSHITZ et SARACINO [15], ainsi qu'à A. B. CARSON [2].

3.6. <u>Application</u> B. - Soit L le langage des anneaux réticulés. Considérons la théorie T' constituée par les axiomes suivants :

(i) A est un f-anneau commutatif unitaire, c'est-à-dire un anneau réticulé commutatif unitaire vérifiant : $(a \wedge b = 0 \ ,\ x \geq 0)$ implique $(a \wedge bx = 0)$;

(ii) A est régulier au sens de von NEUMANN ;

(iii) A est sans atome ;

(iv) Tout élément positif de A admet une racine carrée ;

(v) Tout polynôme $p(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, de degré n impair, possède une racine dans A .

En utilisant le corollaire (2.12), on peut vérifier que les modèles de la théorie T' sont les f-anneaux des sections des faisceaux, dont les fibres sont des corps formellement réels clos et dont l'espace de base est un espace de Boole sans point isolé. Le théorème (3.4) permet de conclure que la <u>théorie T' est modèle-complète</u>. Ce résultat est dû à MACINTYRE [16].

3.7. <u>Remarque</u>. - Dans un travail non encore publié, V. WEISSPFENNIG [18] a démontré une généralisation du théorème (3.4) en utilisant, à la place des faisceaux sur les espaces de Boole, un langage "à deux sortes de symboles". On peut supposer que ces deux aspects peuvent se réunir si l'on considère la "logique interne" des faisceaux au sens de LAWVERE [22].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARSON (A. B.). - Representation of semi-simple algebraic algebras, J. of Algebra, t. 24, 1973, p. 245-257.

[2] CARSON (A. B.). - The model completion of the theory of commutative regular rings, J. of Algebra, t. 27, 1973, p. 136-146.

[3] COMER (S. D.). - A sheaf-theoretic duality for cylindric algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 169, 1972, p. 75-87.

[4] COMER (S. D.). - Representations by algebras of sections over Boolean spaces, Pacific J. of Math., t. 38, 1971, p. 29-38.

[5] COMER (S. D.). - Elementary properties of structures of sections (à paraître).

[6] DAUNS (J.) and HOFMANN (K. H.). - The representation of biregular rings by sheaves, Math. Z., t. 91, 1966, p. 103-123.

[7] DAVEY (B. A.). - Sheaf spaces and sheaves of universal algebras (à paraître).

[8] GRÄTZER (G.). - Universal algebra. - Princeton, Toronto, London [etc], D. van Nostrand Company, 1968 (University Series in higher Mathematics).

[9] HOFMANN (K. H.). - Representations of algebras by continuous sections, Bull. Amer. math. Soc., t. 78, 1972, p. 291-373.

[10] KEIMEL (K.). - The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves, "Lectures on the applications of sheaves in ring theory", p. 1-98. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 248).

[11] KEIMEL (K.). - Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben ; bireguläre Halbgruppen, Math. Nachr., t. 45, 1970, p. 81-96.

[12] KEIMEL (K.) and WERNER (H.). - Stone duality for varieties generated by quasi-primal algebras (à paraître dans Memoirs of the American mathematical Society).

[13] LIPSHITZ (L.). - The real closure of a commutative regular f-ring (à paraître).

[14] LIPSHITZ (L.). - Commutative regular rings with integral closure (à paraître).

[15] LIPSHITZ (L.) and SARACINO (D.). - The model companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements, Proc. Amer. math. Soc., t. 38, 1973, p. 381-387.

[16] MACINTYRE (A.). - Model-completeness for sheaves of structures, Fund. Math., Warszawa, t. 81, 1973, p. 73-89.

[17] PIERCE (R. S.). - Modules over commutative regular rings. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Memoirs of the American mathematical Society, 70).

[18] WEISSPFENNIG (V.). - Model-completness and elimination of quantifiers for subdirect products of structures (à paraître).

[19] WOLF (A.). - A category duality and a construction for representations of algebras by sheaves, THD Preprint.

[20] WOLF (A.). - Sheaf representations of arithmetical algebras (à paraître dans Memoirs of the American mathematical Society).

[21] ELLERMANN (D. P.). - Sheaves of relation structures and ultraproducts, Boston University Research Reports, 71-79, 1971, vi + 83 p.

[22] LAWVERE (F. W.). - Quantifiers and sheaves, "Actes du Congrès international des Mathematiciens [1970. Nice], Tome 1, p. 329-334. - Paris, Gauthier-Villars, 1971.

(Texte reçu le 22 avril 1974)

Klaus KEIMEL
Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule
Hochschulstrasse 1
D-61 DARMSTADT (Allemagne fédérale)