Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gérard Viennot

Une théorie algébrique des bases et familles basiques des algèbres de Lie libres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 1 (1973-1974), exp. nº 5, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_1_A5_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 5, 17 p.

4 et 18 mars 1974

UNE THÉORIE ALGÉBRIQUE DES BASES ET FAMILLES BASIQUES DES ALGÈBRES DE LIE LIBRES

par Gérard VIENNOT

I. Bases des algèbres de Lie libres

Introduction.

Le but de ce chapitre est de construire et étudier une famille de bases des algèbres de Lie libres, comprenant des bases classiques de LYNDON-ŠIRŠOV [3], [16] et de HALL [5]. Ces bases correspondent à la généralisation maximum possible du "collecting process" des commutateurs basiques de P. HALL [6]. Nous donnons de multiples procédés de définition de ces bases. Toute cette étude repose, en fait, sur la notion de factorisation complète du monoïde libre.

Certains résultats ont été annoncés, dans des notes aux Comptes Rendus [20], et il est envisagé que le présent texte soit l'un des articles qui constitueront la thèse de l'auteur [19]. Ces bases étaient connues de ŠIRŠOV [17], et viennent d'être retrouvées par J. MICHEL [9].

Dans tout cet exposé, X est supposé fini. Il n'est pas difficile de généraliser tous les théorèmes pour X quelconque.

1. Rappels et notations.

Soit X un ensemble non vide. Nous désignons par $M(X)$ (resp. X^+, resp. X^*) le magma libre (resp. demi-groupe libre, resp. monoïde libre) engendré par X.

En fait, $X^* = X^+ \cup \{e\}$, où e est le mot unité de longueur nulle. Le magma $M(X)$ est aussi l'ensemble des mots "parenthésés", et $\delta^* : M(X) \longrightarrow X^*$ désigne l'application canonique de "déparenthésage".

Exemple : Pour $u = (x , (x , y)) \in M(x , y)$, $\delta^* u = x^2 y$. La longueur d'un élément u de X^* (resp. $M(X)$) sera notée $|u|$. L'ensemble des mots de X^* de longueur n (resp. de longueur $\leqslant n$) est noté X^n (resp. $\overline{X^n}$).

Soit $\underset{\sim}{K}$ un anneau commutatif unitaire. L'algèbre associative libre engendrée par X, à coefficients dans $\underset{\sim}{K}$ (ou algèbre des polynômes en variables non commutatives), sera notée $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$. Soit λ l'application $M(X) \longrightarrow \underset{\sim}{K}\langle X\rangle$ consistant à "remplacer" les parenthèses par le crochet de Lie $[u , v] = uv - vu$.

Exemple : $\lambda(x(x , y)) = [x , [x , y]] = x^2 y - 2xyx + yx^2$. L'algèbre de Lie libre $L(X)$, engendrée par X sur $\underset{\sim}{K}$, peut être identifiée en tant que module au sous-module de $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$ formé des polynômes de Lie, c'est-à-dire des combinaisons li-

néaires d'éléments (ou alternants) de $\lambda(M(X))$. La multiplication de $L(X)$ est alors le crochet de Lie, $[u , v] = uv - vu$ (qui est un polynôme de Lie lorsque u et v le sont). L'algèbre enveloppante de $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$ est $L(X)$. Si $\mathcal{L}$ est une sous-algèbre de Lie libre de $L(X)$, une famille basique de $\mathcal{L}$ est une famille d'éléments de $L(X)$ engendrant librement $\mathcal{L}$ (en tant qu'algèbre de Lie).

En tant que module, $L(X)$ est un module libre. Nous rappelons les deux procédés classiques de construction de bases de $L(X)$.

Bases de Hall [5], [6] (voir aussi [1] et [11]). - Soit H une partie totalement ordonnée de $M(X)$ vérifiant les trois conditions :

(Ha_1) $X \subseteq H$;

(Ha_2) $\forall\ h = (u,v) \in M(X) \setminus X$, $(h \in H) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in H , \quad v \in H , \\ u < v , \\ v \in X \quad \text{ou} \quad v = (v',v'') \quad \text{avec} \quad v' \leq u ; \end{cases}$

(HO) $\forall\ u \in H$, $\forall\ v \in H$, $(|u| < |v|) \Longrightarrow (u < v)$.

Alors λH est une base de $L(X)$ appelée base de Hall de $L(X)$.

Bases de Lyndon-Širšov [8], [3], [16]. - Supposons X totalement ordonné, et X^+ ordonné par l'ordre lexicographique correspondant. Soit F l'ensemble des mots lexicographiques standards :

$$F = \{u \in X^+ , \ \forall\ f \in X^+ , \ \forall\ g \in X^+ , \ (u = fg) \Longrightarrow (u < gf)\} .$$

Tout $u \in F$ admet des facteurs gauches dans F (car $X \subseteq F$) . Pour $u \in F \setminus X$, notons alors $u = u'\ u''$, avec u' le plus long facteur gauche de u appartenant à F et distinct de u . Alors $u'' \in F$, et on peut ainsi définir une application $\mu : F \longrightarrow L(X)$ par récurrence sur la longueur des mots :

$$\begin{cases} \forall\ x \in X , \quad \mu x = x \\ \forall\ u = u'\ u'' \in F \setminus X , \quad \mu u = [\mu u' , \mu u''] . \end{cases}$$

Alors μF est une base de $L(X)$ appelée base de Lyndon-Širšov (Širšov l'avait définie différemment, mais elle se ramène à celle de Lyndon par des symétries sur les ordres).

Exemple : Soit $X = \{x , y\}$ ordonné par $x < y$. Alors

$$u = x^2\ yxy \in F \quad \text{et} \quad \mu u = [[x , [x , y]] , [x , y]] .$$

2. Factorisations de Lazard.

Nous introduisons la notion de factorisation de Lazard afin de pouvoir démontrer, grâce au théorème d'élimination de M. LAZARD [7], que les familles d'alternants définies dans les paragraphes suivants sont effectivement des bases de $L(X)$. De plus, ces factorisations donnent un moyen simple de construire tous les alternants de ces bases, de degré inférieur à un degré donné.

Nous rappelons d'abord le théorème de M. LAZARD [7], [1].

THEORÈME d'élimination. - Soient X de cardinal ≥ 2 , $x \in X$, et $Y = X \setminus \{x\}$ l'ensemble X privé de la lettre x . L'algèbre de Lie libre $L(X)$ est somme directe du sous-module libre $\underset{\sim}{K}.x$ et de la sous-algèbre de Lie admettant comme famille basique la famille des $(\mathrm{ad}\ x)^n.y$ pour $n \geq 0$ et $y \in Y$.

(Rappelons que $\mathrm{ad}\ x$ est l'application $u \longmapsto [x , u]$.)

DÉFINITION 1. - Une factorisation de Lazard est un ensemble F totalement ordonné de mots de X^+ tel que, pour tout entier n , l'ensemble (fini)

$$F \cap \overline{X^n} = \{u_1 , \dots , u_{k+1}\}$$

des mots de F de longueur $\leq n$, ordonné par l'ordre induit $u_1 < u_2 < \dots < u_{k+1}$, puisse être obtenu par la suite "d'éliminations" suivantes :

$$\begin{cases} u_1 \in X , \quad Y_1 = u_1^*(X \setminus \{u_1\}) = \bigcup_{i \geq 0} u_1^i(X \setminus \{u_1\}) \\ u_2 \in Y_1 , \quad Y_2 = u_2^*(Y_1 \setminus \{u_2\}) \\ \dots \\ u_k \in Y_{k-1} , \quad Y_k = u_k^*(Y_{k-1} \setminus \{u_k\}) \\ u_{k+1} \in Y_k . \end{cases}$$

Remarque. - En effectuant a priori une telle suite $u_1, Y_1, u_2, Y_2, \dots, u_k, Y_k, u_{k+1}$, les éléments $u_1 , \dots , u_{k+1}$ seront tous distincts.

Exemple : L'ensemble F des mots lexicographiques standards, ordonné par l'ordre lexicographique, est une factorisation de Lazard (voir §4). Vérifions-le pour les mots de longueur ≤ 4 .

$$F \cap \overline{X^4} = \{x , x^3 y , x^2 y , x^2 y^2 , xy , xy^2 , xy^3 , y\}$$

(les éléments étant rangés dans l'ordre). Il vient :

$u_1 = x$, $Y_1 = \{y , xy , x^2 y , x^3 y , \dots\}$

$u_2 = x^3 y$, $Y_2 = \{y , xy , x^2 y , \dots\}$

$u_3 = x^2 y$, $Y_3 = \{y , xy , x^2 y^2 , \dots\}$

$u_4 = x^2 y^2$, $Y_4 = \{y , xy , \dots\}$

$u_5 = xy$, $Y_5 = \{y , xy^2 , \dots\}$

$u_6 = xy^2$, $Y_6 = \{y , xy^3 , \dots\}$

$u_7 = xy^3$, $Y_7 = \{y , \dots\}$

$u_8 = y$.

Dans chaque Y_i , on a négligé les mots de longueur ≥ 5 . Soit F une factorisation de Lazard. Supposons n fixé dans la définition 1. Nous définissons une application $\pi_n : F \cap \overline{X^n} \longrightarrow M(X)$ par la récurrence :

pour $x \in X$, $\pi_n(x) = x$,

pour $u = u_1^i y$, avec $y \in X \setminus \{u_1\}$, $i \geq 1$, $\pi_n u = (u_1 , \pi_n u_1^{i-1} y)$

...

pour $u = u_k^i y$ avec $y \in Y_{k-1} \setminus \{u_k\}$, $i \geq 1$, $\pi_n u = (\pi_n u_k , \pi_n u_k^{i-1} y)$.

Le lecteur vérifiera qu'il existe une, et une seule, application $\pi : F \longrightarrow M(X)$ coïncidant avec π_n sur $F \cap \overline{X^n}$ pour tout n .

DÉFINITION 2. - Soit F une factorisation de Lazard. L'application π précédemment définie est appelée parenthésage de F .

En appliquant le théorème d'élimination dans chacune des éliminations (u_i , Y_i) de la définition 1, il est immédiat de prouver le résultat suivant.

PROPOSITION 1. - Soient F une factorisation de Lazard de X^* , et π son parenthésage. La famille $\{\lambda.\pi(u) ; u \in F\}$ est une base de l'algèbre de Lie libre $L(X)$.

3. Ensembles de Hall.

Soit H une partie du magma libre $M(X)$ vérifiant les conditions (Ha_1) et (Ha_2) du "collecting process" de Hall (voir §1). Si l'on supprime la condition (HO) sur les longueurs, alors la famille $\{\lambda h ; h \in H\}$ n'est plus forcément une base de $L(X)$. Divers auteurs ont donné des conditions suffisantes pour avoir une base [12], [15], [17]. Nous montrons que la condition (Ha_3) de ŠIRŠOV [17] est une condition nécessaire et suffisante pour avoir une base ; de plus, les ensembles H ainsi définis correspondent exactement aux factorisations de Lazard. La condition (Ha_3) vient également d'être retrouvée par J. MICHEL [9].

PROPOSITION 2. - Soit H une partie totalement ordonnée du magma libre $M(X)$ vérifiant les deux conditions (Ha_1) et (Ha_2) du §1. Alors la famille $\{\lambda h ; h \in H\}$ est une base de l'algèbre de Lie libre $L(X)$ si, et seulement si, on a :

(Ha_3) $\qquad \forall u \in H , \forall v \in H , ((u , v) \in H) \Longrightarrow (u < (u , v))$.

Démonstration de la condition nécessaire. - Nous prouvons les lemmes suivants :

LEMME 3.1. - Soit $H \subseteq M(X)$ vérifiant (Ha_1) et (Ha_2). Alors tout $f \in X^+$ peut s'écrire sous la forme :

$$f = f_1 \dots f_p , \quad f_i = \delta^* h_i , \quad h_i \in H , \quad h_1 > \dots \geq h_p .$$

De plus, pour tout $g \in X^*$, fg peut s'écrire :

$$fg = f'_1 \dots f'_q , \quad f'_i = \delta^* h'_i , \quad h'_i \in H , \quad h'_1 > \dots \geq h'_q \quad \text{et} \quad |f_1| \leq |f'_1| .$$

Soit $f \in X^n$ vérifiant la première condition du lemme. Pour tout $x \in X$, le lecteur vérifiera aisément, avec les conditions (Ha_1) et (Ha_2), que fx vérifie

encore cette première condition, et que l'on a la deuxième condition avec $g = x$. Une récurrence sur $|f|$, puis une récurrence sur $|g|$ prouvent alors le lemme.

LEMME 3.2. - Soit $H \subseteq M(X)$ vérifiant (Ha_1), (Ha_2) et telle que $\{\lambda h \; ; \; h \in H\}$ soit une base de $L(X)$. On a alors la propriété d'unique factorisabilité :

(UF) Pour tout $f \in X^+$, il existe un unique p-uple $(h_1, \dots h_p)$ tel que

$$f = f_1 \dots f_p \;,\quad f_i = \delta^* h_i \;,\quad h_i \in H \;,\quad h_1 > \dots \geqslant h_p \;.$$

D'après les formules de Witt, le nombre d'éléments de H de longueur n est en fait :

$$\ell_q(n) = \Sigma_{d|n}\, \mu(d)\, q^{n/d}$$

(avec μ la fonction de Moebius habituelle, et q le cardinal de X).

Par un argument combinatoire sur les nombres $\ell_q(n)$, on peut alors prouver que si $F = \delta^* H$ vérifie la première condition du lemme 3.1, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$(\mathrm{Card}(F \cap X^n) \leqslant \ell_q(n)) \iff (\mathrm{Card}(F \cap X^n) = \ell_q(n)) \iff (\mathrm{UF})$$

(voir aussi [14]). Ainsi, d'après le lemme 3.1, la restriction de δ^* à H est bijective, et F vérifie (UF).

LEMME 3.3. - Soit H vérifiant (Ha_1), (Ha_2) et tel que $F = \delta^* H$ vérifie (UF). Alors H vérifie (Ha_3).

(α) : Soient x et y éléments de X avec $x < y$.

Supposons $(x, y) < x$. Alors $h = ((x, y), x) \in H$.

(α_1) Si $h \geqslant y$, $f = xy\,xy$ se factorise sous les deux formes :

$$f = f_1 f_2 \;,\quad f_1 = xy \;,\quad f_2 = xy \;,\quad f_1 \;, f_2 \in \delta^* H$$

$$f = f_3 f_4 \;,\quad f_3 = xyx \;,\quad f_4 = y \;,\quad f_3 \;, f_4 \in \delta^* H \;,\quad f_3 \geqslant f_4 \;.$$

(α_2) Si $h < y$, alors $(h, y) \in H$, et $f = xyxy$ admet encore deux factorisations distinctes sous la forme de (UF).

Ainsi dans les deux cas il y a contradiction avec (UF).

(β) : Supposons que H vérifie la condition :

$(Ha_{3,n})$ $\quad \forall\, u \in H \;,\; \forall\, v \in H \;,\; |u|+|v| \leqslant n \;,\; ((u,v) \in H) \Longrightarrow (u < (u,v))$.

Soit alors $h = (u, v) \in H$, $|h| = n + 1$. Supposons $h < u$. Nous notons $u_0 = u = (u_1, v_1), \dots, u_i = (u_{i+1}, v_{i+1})$ jusqu'à $u_{p-1} = (u_p, v_p)$ avec $u_p \in X$.

Si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant p$, $h < u_i$, alors $(h, u_p) \in H$. Sinon, il existe m, plus petit entier de $[1, p]$ tel que $u_m \leqslant h$. Alors $h < u_{m-1}$ et, d'après (Ha_2), on a $(h, u_{m-1}) \in H$. En notant $f = \delta^* h$, nous venons de prouver l'exis-

tence de deux factorisations distinctes de ff selon la forme de (UF). Ceci est contradictoire, et donc $u < h$.

Par récurrence sur n , on prouve alors le lemme. Les lemmes 3.1 et 3.2 prouvent la condition nécessaire de la proposition 2.

C. Q. F. D.

Démonstration de la condition suffisante. - La condition suffisante de la proposition 2 n'est qu'une conséquence de la proposition 1 et de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Soit H une partie totalement ordonnée de $M(X)$ vérifiant les conditions (Ha_1), (Ha_2) et (Ha_3) . La restriction de δ^* à H est bijective, et $F = \delta^* H$, ordonné par l'ordre correspondant de H , est une factorisation de Lazard. De plus, son parenthésage associé $\pi : F \longrightarrow M(X)$ est la bijection réciproque de la restriction de δ^* à H .

Démonstration. - Soient H une partie totalement ordonnée de $M(X)$ vérifiant (Ha_1), (Ha_2) et (Ha_3), $F = \delta^* H$, et $n \in \underset{\sim}{N}$. Soit $\{h_1, \ldots, h_{k+1}\}$ l'ensemble des éléments de H de degré $\leq n$ ordonné par l'ordre induit de H :

$$h_1 < h_2 < \ldots < h_{k+1} .$$

D'après (Ha_2) et (Ha_3), on a $h_1 \in X$. Notons :

$$u_1 = h_1 \quad \text{et} \quad Y_1 = u_1^*(X \setminus \{u_1\}) .$$

Soit $\pi_1 : \{u_1\} \cup Y_1 \longrightarrow M(X)$ défini par récurrence :

$$\begin{cases} \forall\, x \in X , \quad \pi_1\, x = x ; \\ \text{pour } u = u_1^i\, y \text{ avec } y \in X \setminus \{u_1\} , \quad i \geq 1 , \quad \pi_1\, u = (u_1 , \pi_1\, u_1^{i-1}\, y) . \end{cases}$$

Une récurrence sur les degrés prouve alors, avec (Ha_1), (Ha_2) et (Ha_3), les deux conditions :

(R_1') $\pi_1(Y_1) \subseteq H$,

(R_1'') $(\forall\, h = (h_1, h'') \in M(X) , \quad h \in H) \Longrightarrow (\delta^* h \in Y_1 \quad \text{et} \quad h = \pi_1(\delta^* h))$.

Soit p entier, $1 \leq p < k$, et supposons vérifiées les trois conditions suivantes (R_p), (R_p') et (R_p'') :

(R_p) $u_1 = \delta^* h_1 , \ldots , u_p = \delta^* h_p$ sont tous des éléments distincts tels que l'on puisse écrire :

$$u_2 \in Y_1 , \quad u_3 \in Y_2 = u_2^*(Y_1 \setminus \{u_1\}) , \ldots , u_p \in Y_{p-1} = u_{p-1}^*(Y_{p-2} \setminus \{u_{p-1}\}) .$$

Notons $Y_p = u_p^*(Y_{p-1} \setminus \{u_p\})$. Comme pour la définition 2 du parenthésage associé à une factorisation de Lazard, on peut alors définir par récurrence une application $\pi_p : \{u_1\} \cup \ldots \cup \{u_p\} \cup Y_p \longrightarrow M(X)$, qui coïncide avec π_{p-1} sur

$$\{u_1\} \cup \ldots \cup \{u_{p-1}\} \cup Y_{p-1}$$

et telle que, pour $u = u_p^i\, y$ avec $y \in Y_{p-1} \quad \{u_p\}$, $i \geq 1$,

$$\pi_p\, u = (\pi_p\, u_p\ ,\ \pi_p\, u_p^{i-1}\, y)\ .$$

Les deux autres conditions (R'_p) et (R''_p) sont alors :

(R'_p) $\pi_p(u_1) = h_1\ ,\ \ldots\ ,\ \pi_p(u_p) = h_p\ ,\ \pi_p(Y_p) \subseteq H$

(R''_p) $(\forall_i \in [1,p]\ ,\ \forall\ h = (h_i, h'') \in M(X)\ ,\ h \in H) \Longrightarrow$

$$(\delta^*\, h \in \{u_{i+1}\} \cup \ldots \cup \{u_p\} \cup Y_p \quad \text{et} \quad h = \pi_p(\delta^*\, h))\ .$$

Si $h_{p+1} \in X$, alors (R_p) prouve que $h_{p+1} \in Y_p$. Sinon on peut écrire

$$h_{p+1} = (h'\ ,\ h'') \quad \text{avec} \quad h' \quad \text{et} \quad h'' \in H\ .$$

D'après (Ha_3), $h' = h_i$ avec $i \in [1\ ,\ p]$. Alors (R'_p) et (R''_p) impliquent

$$\delta^*\, h_{p+1} = u_{p+1} \in Y_p \quad \text{et} \quad h_{p+1} = \pi_p(u_{p+1})\ .$$

Soient

$$Y_{p+1} = u^*_{p+1}(Y_p \setminus \{u_{p+1}\})$$

et

$$\pi_{p+1} : \{u_1\} \cup \ldots \cup \{u_{p+1}\} \cup Y_{p+1} \longrightarrow M(X)$$

défini de la même façon que π_p . On a bien $\pi_{p+1}(u_{p+1}) = h_{p+1}$. Les conditions (R_p) et (Ha_2) prouvent, grâce à une récurrence sur les longueurs, que

$$\pi_{p+1}(Y_{p+1}) \subseteq H\ .$$

On a donc (R'_{p+1}) .

D'autre part, soit $i \in [1\ ,\ p+1]$ et $h = (h_i\ ,\ h'') \in H$.

Si $i \leq p$, alors d'après (R''_p), h vérifie (R'_{p+1}) .

Si $i = p+1$, une récurrence sur $|h''|$ prouve, avec les conditions (Ha_1), (Ha_2), (Ha_3), (R'_p) et (R''_p), que $\delta^*\, h \in \{u_{p+1}\} \cup Y_{p+1}$ et $h = \pi_{p+1}(\delta^*\, h)$.

Ainsi les 3 conditions (R_{p+1}) , (R'_{p+1}) et (R''_{p+1}) sont vérifiées. Une récurrence sur p finit la preuve.

C. Q. F. D.

Par commodité, nous posons maintenant la définition suivante.

DÉFINITION 3. - <u>Une partie totalement ordonnée</u> H <u>du magma libre</u> $M(X)$, <u>vérifiant les trois conditions</u> (Ha_1), (Ha_2) <u>et</u> (Ha_3), <u>est appelée un ensemble de Hall</u>.

<u>Remarque</u>. - Si H est un ensemble de Hall, on peut démontrer qu'il existe une seule relation d'ordre total telle que H vérifie (Ha_1), (Ha_2) et (Ha_3).

Nous terminons ce paragraphe en énonçant l'équivalence des factorisations de Lazard et des ensembles de Hall :

PROPOSITION 4. - Il existe une bijection Φ entre les ensembles de Hall de $M(X)$ et les factorisations de Lazard de X^*.

Si H est un ensemble de Hall, alors $\Phi(H) = \delta^* H$ ordonné par l'ordre correspondant de H (la restriction de δ^* est bijective).

Si F est une factorisation de Lazard, $\Phi^{-1}(F) = \pi F$, où π est le parenthésage de F et où πF est ordonné par l'ordre correspondant de F.

Grâce à la proposition 3, il suffit de prouver que pour toute factorisation de Lazard F, l'ensemble πF est un ensemble de Hall.

4. Autres caractérisations.

Les bases de $L(X)$ que nous venons de construire peuvent être définies à partir des ensembles de Hall ou des factorisations de Lazard. Nous donnons ici de multiples autres constructions équivalentes, et en particulier nous retrouvons la factorisation de Lyndon-Širšov. Pour ceci, nous rappelons la notion de factorisation complète d'un monoïde libre de [14] qui joue un rôle central dans tout cet exposé.

DÉFINITION 4. - Une factorisation complète de X^* est une partie totalement ordonnée F de X^+ telle que :

(UF) Tout $f \in X^+$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f = f_1 \dots f_p \ , \quad p \geq 1 \ , \quad f_i \in F \ , \quad f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_p \ .$$

Exemple 1. - Il est aisé de vérifier directement, à partir de la définition, qu'une factorisation de Lazard est une factorisation complète.

Exemple 2. - Soit F l'ensemble des mots lexicographiques standards de X^+, ordonné par l'ordre lexicographique. Alors F est une factorisation complète de X^*, appelée factorisation de Lyndon-Širšov [8], [16].

Remarque. - Pour les factorisations complètes F, étudiées dans cet exposé, on peut en fait affirmer qu'il existe au plus une relation d'ordre total sur F telle que l'on ait (UF).

Nous énonçons maintenant sans démonstration les propositions suivantes, qui contiennent en partie des résultats du paragraphe précédent.

Notations. - Si F est une factorisation complète de X^*, et $f \in X^+$, nous noterons $F(f)$ l'unique p-uple $(f_1 , \dots , f_p)$ tel que :

$$f = f_1 \dots f_p \ , \quad p > 1 \ , \quad f_i \in F \ , \quad f_1 \geq \dots \geq f_p \ .$$

PROPOSITION 5. - Soit F une factorisation complète du monoïde libre X^*. Les 9 conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est une factorisation de Lazard ;

(ii) Il existe une partie H de $M(X)$ vérifiant (Ha_1), (Ha_2) et telle que $F = \delta^* H$;

(ii') Il existe un ensemble de Hall H de $M(X)$ tel que $F = \delta^* H$;

(iii) (resp. iii')) Pour toute décomposition en somme ordinale $F = F' + F''$, l'ensemble des mots $f \in X^*$ tels que :

$$f = e \text{ ou } F(f) = (f_1 , \dots , f_p) \text{ avec } f_i \in F'' ,$$

est un sous-monoïde de X^* (resp. sous-monoïde libre) ;

(iv) $\forall f \in X^+$, $\forall g \in X^*$, on a

$$F(f) = (f_1 , \dots , f_p) , F(fg) = (f'_1 , \dots , f'_q) \text{ avec } |f_1| \leq |f'_1| ;$$

(iv') $(\forall f \in F , \forall g \in F , f < g) \Longrightarrow (F(fg) = (f'_1 , \dots , f'_q)$ avec $|f| < |f'_1|$;

(v) $\forall f \in X^+$, $\forall g \in X^*$, on a

$$F(f) = (f_1 , \dots , f_p) , F(fg) = (f'_1 , \dots , f'_q) \text{ avec } f_1 \leq f'_1 ;$$

(v') $(\forall f \in F , \forall g \in F , fg \in F) \Longrightarrow (f < fg)$.

Le paragraphe précédent prouve que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii') $\Longrightarrow$ (iv). Il est aisé de prouver les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & (iii') \arrow[r, Rightarrow] & (iii) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(ii') \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (iv) \arrow[r, Rightarrow] & (iv') \arrow[r, Rightarrow] & (v') \\
(ii) \arrow[u, Rightarrow] & (v) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

La démonstration de la proposition se fait en prouvant (v') $\Longrightarrow$ (i).

Remarquons que J. MICHEL [9] a retrouvé aussi la condition (v').

Nous connaissons deux moyens équivalents de construire des bases de $L(X)$ avec une factorisation complète vérifiant l'une des conditions de la proposition 5. On peut revenir à la définition du parenthésage associé à F comme factorisation de Lazard, ou aussi revenir à l'ensemble de Hall associé à F. Nous donnons trois autres procédés équivalents.

PROPOSITION 6. - Soit F une factorisation vérifiant l'une des conditions de la proposition 5, et notons $\pi : F \longrightarrow M(X)$ son parenthésage associé. Soit $f \in F - X$, et notons

$$f = f' f'' \text{ avec } \pi f = (h' , h'') , \delta^* h' = f' \in F , \delta^* h'' = f'' \in F .$$

On a alors les trois conditions suivantes :

(i) (resp. (ii)) f' est le plus long (resp. plus grand) facteur gauche de f qui soit dans F et distinct de f .

(iii) On peut écrire $f = gx$, $g \in X^+$, $x \in X$ et $F(g) = (f' , g_2 , \ldots , g_q)$.

Exemple. - La factorisation de Lyndon-Širšov [8], [3], [16] vérifie la condition (v'). La condition (i) permet de retrouver la base de Lyndon, la condition (iii) retrouve celle de Širšov, qui sont ainsi les mêmes bases.

On pourrait définir toutes les conditions duales de la proposition 5, ce qui introduit la classe remarquable des factorisations complètes régulières vérifiant les conditions de la proposition 5, ainsi que leur duales.

DÉFINITION 5. - Une factorisation complète F du monoïde libre X^* est dite régulière lorsqu'elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) $(\forall f \in F , \forall g \in F , f < g) \Longrightarrow (fg \in F)$.

(ii) $(\forall f \in F , \forall g \in F , fg \in F) \Longrightarrow (f < fg < g)$.

En effet la condition (i) (resp. (ii)) est la conjonction de la condition (iv') (resp. (v')) de la proposition 5 et de sa duale.

Exemple. - La factorisation de Lyndon-Širšov est régulière.

Les bases (à droite ou à gauche) associées aux factorisations régulières jouissent de propriétés remarquables et sont particulièrement commodes, comme celle de Lyndon-Širšov pour les calculs sur ordinateur (voir [9] et l'exposé de J. MICHEL à ce même séminaire [10]).

On pourrait donner une construction générale des factorisations complètes régulières. Elle repose sur la proposition suivante :

PROPOSITION 7. - Une partie totalement ordonnée F du demi-groupe libre X^+ est une factorisation complète régulière de X^* si, et seulement si, elle vérifie les trois conditions :

(i) $X \subseteq F$;

(ii) $\forall f \in F - X , \exists u \in F , \exists v \in F$ tels que $u < v$ et $f = uv$;

(iii) $(\forall u \in F , \forall v \in F , u < v) \Longrightarrow (uv \in F$ et $u < uv < v)$.

Enfin, les factorisations complètes régulières jouent un rôle important dans des problèmes combinatoires de réarrangement de suites : ce sont des factorisations spéciales au sens de D. FOATA [4] (voir aussi [2]).

II. Familles basiques dans les algèbres de Lie libres

Introduction.

Ce chapitre est une généralisation du chapitre précédent. Nous construisons des familles basiques de sous-algèbres de Lie libres de $L(X)$ dont la somme directe

est $L(X)$. Dans le cas où chacune de ces familles basiques n'a qu'un seul élément, nous retrouvons une base de $L(X)$.

L'outil essentiel de cette étude est la notion de factorisation du monoïde libre X^* . Nous énonçons sans démonstration une succession de propositions, qui deviennent toutes celles du chapitre précédent dans le cas où les factorisations sont complètes. C'est par souci de clarté pour l'exposition que nous avons été amenés à commettre ce crime de lèse-Bourbaki.

Certaines démonstrations se transposent sans difficultés. Par contre, le théorème d'élimination de LAZARD est remplacé par les notions de bissection et de bascule. La démonstration de la proposition 3 devient nettement plus compliquée.

Enfin, nous montrons que nos méthodes permettent de construire aisément des familles basiques de quelques sous-algèbres de Lie remarquables de $L(X)$.

Nous reprenons les notations du chapitre précédent, et ne supposons plus que X est fini.

Les démonstrations se trouveront dans l'ensemble de la thèse de l'auteur [19].

1. Factorisations des monoïdes libres.

Nous reprenons la définition de M. P. SCHÜTZENBERGER [14] :

DÉFINITION 1. - Une factorisation du monoïde libre X^* est une famille

$$\mathfrak{F} = (Y_j \ , \ j \in J)$$

de parties non vides de X^+ indexée par un ensemble totalement ordonné J et telle que tout $f \in X^+$ admet une écriture unique sous la forme :

$$f = f_1 \dots f_p \ , \ p \geq 1 \ , \ f_i \in Y_{j_i} \ , \ j_1 \geq \dots \geq j_p \ .$$

Exemple 1. - Si chaque Y_j n'a qu'un seul élément, nous retrouvons les factorisations complètes du chapitre I.

Exemple 2. - Soient X de cardinal ≥ 2 , $x \in X$ et $Y = X \setminus \{x\}$. Posons $J = [1 \ , \ 2]$, $Y_1 = \{x\}$ et $Y_2 = x^* Y$. Alors il est évident que $\{Y_j \ , \ j \in J\}$ est une factorisation de X^* .

Exemple 3. - Soit σ un morphisme de X^* dans le monoïde des réels additifs (ce qui revient à se donner les valeurs de σ sur les lettres de X). Pour $r \in \underset{\sim}{R}$, soit

$$Y_r = \{f \in X^+ \ , \ \frac{\sigma f}{|f|} = r \ \text{ et } \ \forall \ u \ , \ v \in X^+ \ , \ f = uv \Longrightarrow \frac{\sigma u}{|u|} < r\} \ .$$

Soit $J = \{r \in \underset{\sim}{R} \ , \ Y_r \neq \emptyset\}$, ordonné par l'ordre induit de $\underset{\sim}{R}$. Alors

$$\mathfrak{F} = (Y_j \ ; \ j \in J)$$

est une factorisation de X^* (voir [18], [14], [4]) appelée factorisation de Spitzer.

Le lecteur s'en convaincra aisément par une interprétation graphique évidente. A tout mot $f = x_1 \dots x_n \in X^n$, on associe une ligne brisée dans le plan $\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R}$ en joignant les points $(i , \sigma(x_1 \dots x_i))$, $i \in [0 , n]$. L'unique factorisation de f sous la forme $f = f_1 \dots f_p$ de la définition 1 est donnée par les intersections de la brisée associée au mot f avec l'enveloppe convexe de la partie située sous la ligne brisée.

Notations. - Soit $\mathfrak{F} = (Y_j \; ; \; j \in J)$ une factorisation de X^*. Chaque Y_j est un code de X^*, c'est-à-dire une partie de X^+ engendrant librement le sous-monoïde Y_j^* qu'il engendre (voir [13]). Ces codes Y_j forment une partition de $\bigcup_j Y_j = \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$, appelé contenu de $\mathfrak{F}$. Le support de $\mathfrak{F}$ est J, et noté $\mathrm{Supp}(\mathfrak{F})$. L'unique factorisation de $f \in X^+$ selon la définition 1 est notée $\mathfrak{F}(f) = (f_1 , \dots , f_p)$. Enfin $f \longmapsto \overline{f}$ désigne l'application $\mathrm{Cont}\,\mathfrak{F} \longrightarrow \mathrm{Supp}\,\mathfrak{F}$ définie par $f \in Y_{\overline{f}}$.

2. Bissections des monoïdes libres.

DÉFINITION 2. - Une bissection du monoïde libre X^* est une factorisation

$$\mathfrak{F} = (Y_j \; ; \; j \in [1 , 2]) .$$

En notant $Y_1 = B$, $Y_2 = A$, cela revient aussi à écrire $X^* = A^* B^*$ avec unicité de la décomposition. Nous noterons aussi $\mathfrak{F} = (A , B)$.

Nous donnons une construction générale des bissections de X^*, simplifiant celle donnée en [14] :

PROPOSITION 1. - Soient (A_i) et (B_i) deux suites de parties de X^+ telles que :

- (A_1 , B_1) est une partition de X en parties non vides,
- $\forall\, n \geq 1$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$,
- $\forall\, n \geq 1$, $(A_{n+1} \setminus A_n , B_{n+1} \setminus B_n)$ est une partition de $B_n A_n \setminus (A_n \cup B_n)$.

Alors, en notant $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$, (A , B) est une bissection de X^*. De plus, toute bissection de X^* est obtenue par cette construction.

Exemple. - Nous donnons les cinq premiers termes A_n et B_n d'une construction possible avec $X = \{a , b\}$

	B	A	
B_1	b	a	A_1
B_2	ba		A_2
B_3		baa	A_3
B_4	bbaa	**ba**baa	
B_5	bbaabaa bbabaa bababaa	bbaaa bbaababaa	A_5

La notion de parenthésage associé à une bissection est fondamentale pour la suite. Pour ceci, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1. - Soit (A , B) une bissection de X^*. Tout mot f de $(A \cup B) \setminus X$ se factorise de manière unique $f = ba$ avec $b \in B$, $a \in A$. De plus, $BA \subseteq A \cup B$.

Nous pouvons donc définir une application $\pi : A \cup B \longrightarrow M(X)$ par la récurrence :

$$\begin{cases} \forall\, x \in X , & \pi x = x , \\ \forall\, a \in A , \ \forall\, b \in B , & \pi(ba) = (\pi b , \pi a) . \end{cases}$$

DEFINITION 3. - L'application π ainsi définie est appelée le parenthésage de la bissection (A , B).

Son intérêt provient de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soient (A , B) une bissection de X^*, et π son parenthésage associé. Notons $[A] = \lambda \circ \pi(A)$ et $[B] = \lambda \circ \pi(B)$.

L'application $\lambda \circ \pi$ est injective.

Les sous-algèbres de Lie (libres) de $L(X)$, engendrées par $[A]$ et $[B]$, admettent respectivement comme familles basiques $[A]$ et $[B]$. Le module $L(X)$ s'identifie à la somme directe des modules $L([A]) \oplus L([B])$.

Dans l'algèbre $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$, les sous-algèbres associatives engendrées par $[A]$ et $[B]$ sont libres et admettent comme familles basiques respectives $[A]$ et $[B]$. Le module $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$ s'identifie au produit tensoriel des modules $\underset{\sim}{K}\langle A\rangle \oplus \underset{\sim}{K}\langle B\rangle$.

La démonstration de cette proposition nécessite l'introduction de la notion de bascule, généralisant celle de bissection (voir un exposé précédent à ce même séminaire [21] ou plus précisément [19]).

Dans le cas où (A , B) est la bissection de l'exemple 2, §1, nous retrouvons le théorème d'élimination de LAZARD [7].

3. Factorisations régulières gauches des monoïdes libres.

PROPOSITION 3. - Soient H une partie de $M(X)$, J un ensemble totalement ordonné, et $\sigma : H \longrightarrow J$ vérifiant les deux conditions :

(Ha_1) $X \subseteq H$,

(Ha_2) $\forall\, h = (u,v) \in M(X)$, $h \in H \iff \begin{cases} u , v \in H \\ \sigma u < \sigma v \\ v \in X \text{ ou } v = (v',v'') \text{ avec } \sigma v' \leq \sigma u . \end{cases}$

Alors $\mathfrak{F}(H) = (\delta^*(\sigma^{-1}(j)) ; j \in J)$ est une factorisation de X^* si, et seulement si, on a

(Ha_3) $\quad (\forall\, u \in H\,,\ \forall\, v \in H\,,\ (u\,,v) \in H) \Longrightarrow (\sigma u \leqslant \sigma(u\,,v))$.

DEFINITION 4. - Une factorisation $\mathfrak{F}$ de X^* est dite régulière gauche si, et seulement si, il existe $H \subseteq M(X)$ vérifiant (Ha_1), (Ha_2) et (Ha_3), et telle que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(H)$.

Remarque. - Une telle partie H est alors unique. L'ensemble J et l'application $\sigma : H \longrightarrow J$ sont aussi uniquement déterminés.

DÉFINITION 5. - Soit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(H)$ une factorisation régulière gauche. La restriction de δ^* à H est bijective. L'application réciproque $\pi : \mathrm{Cont}(\mathfrak{F}) \longrightarrow H$ est appelée le parenthésage de $\mathfrak{F}$.

Exemple. - Les factorisations de Lazard du chapitre I sont exactement les factorisations régulières gauches complètes. Les bissections et les factorisations de Spitzer du §1 sont des factorisations régulières gauches (et dualement à droite aussi). Pour une bissection, les définitions 3 et 5 sont équivalentes.

La proposition 2 se généralise comme suit.

THÉORÈME 1. - Soit $\mathfrak{F} = (Y_j\ ;\ j \in J)$ une factorisation régulière gauche de parenthésage π et, pour $j \in J$, soit $[Y_j] = \lambda \circ \pi(Y_j)$.

(i) L'application $\lambda \circ \pi : \mathrm{Cont}(\mathfrak{F}) \longrightarrow L(X)$ est injective ;

(ii) Pour tout $j \in J$, la sous-algèbre de Lie $\mathcal{L}_j$ de $L(X)$ engendrée par $[Y_j]$ est librement engendrée par $[Y_j]$;

(iii) $L(X)$ est la somme directe (en tant que module)

$$\bigoplus_{j\in J} \mathcal{L}_j \simeq \bigoplus_{j\in J} L([Y_j])\ ;$$

(iv) La sous-algèbre associative $\mathfrak{A}_j$ de $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$, engendrée par $[Y_j]$, est libre et librement engendrée par $[Y_j]$;

(v) L'algèbre associative $\underset{\sim}{K}\langle X\rangle$ est isomorphe (en tant que module) au produit tensoriel :

$$\bigotimes_{j\in J} \mathfrak{A}_j \simeq \bigotimes_{j\in J} \underset{\sim}{K}\langle [Y_j]\rangle\ .$$

Remarque. - Lorsque $\mathfrak{F}$ est complète, (iii) redonne les bases de I, (v) est alors le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour $L(X)$.

La preuve du théorème 1 se fait en définissant l'analogue des factorisations de Lazard comme à la définition 1 de I, avec des bissection, puis en généralisant la notion de parenthésage (définition 2 de I) pour ces factorisations ainsi que la proposition 2. La preuve se termine en prouvant l'équivalence de ces définitions avec les définitions 4 et 5, ce qui est l'analogue des propositions 3 et 4 du chapitre I (voir [19]).

Nous donnons des moyens plus commodes de caractériser les factorisations régu-

lières gauches et leurs parenthésages, par exemple dans la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - Une factorisation $\mathfrak{F}$ de X^* est régulière gauche si, et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

(i) $\forall f \in X^+$, $\forall g \in X^*$, on a : $\mathfrak{F}(f) = (f_1 , \dots , f_p)$, $\mathfrak{F}(fg)=(f'_1 ,\dots, f'_q)$ avec $|f_1| \leq |f'_1|$.

(ii) $(\forall f \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$, $\forall g \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$, $fg \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})) \Longrightarrow (\overline{f} \leq \overline{fg})$.

PROPOSITION 5. - Soit $\mathfrak{F}$ une factorisation régulière gauche de X^* de parenthésage π , et soit $f \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F}) \setminus X$. Notons $\pi f = (h' , h'')$ avec $f = f' f''$, $f' = \delta^* h'$, $f'' = \delta^* h''$. Alors f' est le plus long facteur gauche de f appartenant à $\mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$ et distinct de f .

En particulier, une factorisation est dite régulière si elle est régulière droite et régulière gauche, c'est-à-dire si, et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

(Re1) $\qquad \forall f , g \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$, $\overline{f} < \overline{g} \Longrightarrow fg \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$.

(Re2) $\qquad \forall f , g \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F})$, $fg \in \mathrm{Cont}(\mathfrak{F}) \Longrightarrow \overline{f} < \overline{fg} \leq \overline{g}$.

Il est ainsi clair que les factorisations de Spitzer sont régulières. Nous terminons cet exposé en explicitant le théorème 1 dans le cas d'une factorisation de Spitzer sur un alphabet à deux lettres.

4. Exemple : familles basiques et factorisation de Spitzer.

Soit $X = \{x , y\}$. Il est aisé de voir que toutes les factorisations de Spitzer telles que $\overline{x} < \overline{y}$ sont les mêmes. Nous notons $Sp = (Y_j \; ; \; j \in J)$ cette factorisation canonique de X^* . Elle peut se définir par :

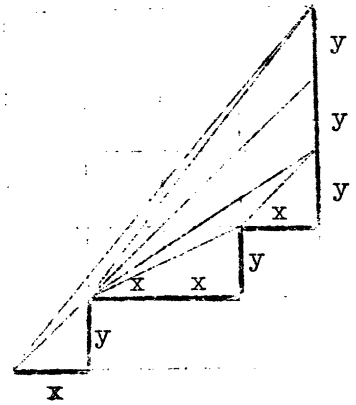
- J est l'ensemble des couples (p , q) de nombres premiers entre eux, augmenté de 0 , et ordonné par :

$$((p , q) \leq (p' , q')) \Longleftrightarrow (\frac{q}{p} \leq \frac{q'}{p'}) \quad \text{et} \quad 0<(p , q) ,$$

- $Y_0 = x$,
- $Y_{(p,q)} = \{f \in X^+ , \frac{|f|_y}{|f|_x} = \frac{q}{p} , \forall u , v \in X^+ , f = uv \Longrightarrow \frac{|u|_y}{|u|_x} < \frac{q}{p}\}$,

en notant $|f|_y$ (resp. $|f|_x$) le nombre d'occurences de y (resp. x) dans f .

On peut traduire ceci géométriquement en associant à tout mot de X^+ un "chemin minimal" de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$: chaque occurence de x (resp. y) correspond à un "pas" horizontal (resp. vertical) (voir figure ci-après). Le chemin minimal correspondant à $f = xyxxyxyyy$ est le suivant.



Les mots de Cont(Sp) sont les mots dont le chemin minimal est situé strictement (sauf aux extrémités) en dessous de la droite joignant leur extrémités.

Par exemple avec $f = xyx^2\, yxy^3$, $f \in Y_{(4,5)}$. Les conditions (Re_1) et (Re_2) du §3 correspondent à la construction des <u>suites de Farey</u> sur $\mathbb{Q}$. Pour p et q premiers entre eux, soit $L_{(p,q)}$ la sous-algèbre de Lie de $L(X)$ formée par les combinaisons linéaires d'alternants dont le degré en x (resp. en y) est mp (resp. mq) avec $m \geq 1$. Soit π le parenthésage de Sp (en tant que factorisation régulière gauche). Le théorème 1 prouve alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - $\lambda \circ \pi(Y_{(p,q)})$ <u>est une famille basique de</u> $L_{(p,q)}$.

Par exemple, pour $f = xyx^2\, yxy^3$, la proposition 5 permet de calculer aisément $\lambda \circ \pi(f)$ qui se lit sur la figure :

$$\lambda \circ \pi(f) = [[x , y] , [[[[x , [x , y]] , [x , y]] , y] , y]] .$$

On pourrait aussi appliquer le théorème 1 pour associer des bases à la factorisation spéciale de Spitzer introduite par FOATA en [4], ou aussi pour expliciter des familles basiques des sous-algèbres de Lie de la série centrale descendante et de la série dérivée de $L(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 2, Algèbres de Lie libres. - Paris, Hermann, 1972 (Act. scient. et ind., 1349 ; Bourbaki, 37).

[2] CARTIER (P.) et FOATA (D.). - Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 85).

[3] CHEN (K. T.), FOX (R. H.) and LYNDON (R. C.). - Free differential calculus, IV, The quotient groups of the lower central series, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 81-95.

[4] FOATA (D.). - Etude algébrique de certains problèmes d'analyse combinatoire et du calcul des probabilités, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, t. 14, 1965, p. 81-241 (Thèse Sc. math., Paris, 1965).

[5] HALL (M. Jr.). - A basis for free Lie rings and higher commutations in free groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 575-581.

[6] HALL (P.). - A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London, math. Soc., 2nd Series, t. 36, 1933, p. 29-95.

[7] LAZARD (M.). - Groupes, anneaux de Lie et problème de Burnside, Centro Internazionale Matematico Estivo : "Gruppi, anelli di Lie e teoria della coomologia" [Saltino di Vallombrosa 1959], 60 p. - Roma, Istituto matematico dell'Università, 1960.

[8] LYNDON (R. C.). - On Burnside's problem, Trans. Amer. math. Soc., t. 77, 1954, p. 202-215.

[9] MICHEL (J.). - Bases des algèbres de Lie libres. Etude des coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff, Thèse 3e cycle, Math., Orsay, 1974.

[10] MICHEL (J.). - Bases des algèbres de Lie et série de Hausdorff, Séminaire Dubreil : Algèbre, 27e année, 1973/74, n° 6, 9 p.

[11] MAGNUS (W.), KARRASS (A.) and SOLITAR (D.). - Combinatorial group theory. - New York, London, Sydney, Interscience Publishers, 1966 (Pure and applied Mathematics. Interscience Publishers, 13).

[12] MEIER-WUNDERLI (H.). - Note on a basis of P. Hall for the higher commutation in free groups, Comment. Math. Helvet., t. 26, 1952, p. 1-5.

[13] NIVAT (M.). - Eléments de la théorie générale des codes,(Mathématiques à l'usage du Calculateur. Techniques non numériques, 5).

[14] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a factorisation of free monoïdes, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 21-24.

[15] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Sur les bases de Hall des algèbres de Lie libres, 1971 (manuscrit).

[16] ŠIRŠOV (A. I.). - On free Lie rings, Mat. Sbornik, N. S., 87 (45), 1958, p. 113-122.

[17] ŠIRŠOV (A. I.). - On bases for free Lie algebra, Algebra i Logika Sém., t. 1, 1962, p. 14-19.

[18] SPITZER (F.). - A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 323-339.

[19] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes libres et algèbres de Lie libres, Thèse Sc. math., Paris-VII, 1974 (à paraître).

[20] VIENNOT (G.). - Factorisations dichotomiques des monoïdes libres et algèbres de Lie libres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, série A, p. 511-514 ; Une généralisation des ensembles de Hall, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, série A, p. 599-602 ; Factorisations régulières des monoïdes libres et algèbres de Lie libres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973, série A, p. 493-496.

[21] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes libres, bascules et algèbres de Lie libres, Séminaire Dubreil, 25e année, 1971/72, fasc. 2 : Anneaux et demi-groupes, n° J5, 8 p.

(Texte reçu le 1er juillet 1974)

Gérard VIENNOT
UER de Mathématiques
Université Paris VII
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05