Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Bernard Roux

Modules injectifs indécomposables sur les anneaux artiniens et dualité de Morita

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 10, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A9_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 10, 19 p.

26 mars 1973

MODULES INJECTIFS INDÉCOMPOSABLES SUR LES ANNEAUX ARTINIENS ET DUALITÉ DE MORITA

par Bernard ROUX

Résumé.

A chaque anneau artinien à gauche A, on peut associer une famille finie de couples (E_i, D_i), $1 \leq i \leq s$, où E_i est un anneau simple et D_i un sous-corps (non nécessairement commutatif) unitaire de E_i, et où s est la longueur bilatère du radical de Jacobson de l'anneau A.

Dans cet article, on montre comment le problème de la connaissance des A-modules à gauche, injectifs indécomposables, se ramène au problème de la connaissance des dimensions de E_i comme espace vectoriel sur D_i, $1 \leq i \leq s$.

Plus précisément, la connaissance des dimensions $[E_i : D_i]$ permet d'associer à chaque A-module à gauche simple S, une suite finie de cardinaux $c_i(S)$, $1 \leq i \leq s$. Par ailleurs, à toute extension essentielle E de S, on associe de façon naturelle une suite de cardinaux $d_i(E)$, $1 \leq i \leq s$, tels que $d_i(E) \leq c_i(S)$, pour tout i. Si les cardinaux $c_i(S)$ sont finis, on montre que le module E est enveloppe injective de S si, et seulement si, $d_i(E) = c_i(S)$. Dans ce cas, pour obtenir un module qui soit enveloppe injective de S, il suffit de connaître les nombres $c_i(S)$ (calculés à partir des dimensions $[E_i : D_i]$), et de construire (par générateurs et relations) un module E extension essentielle de S, tel que $d_i(E) = c_i(S)$. On indique des applications de cette technique.

Dans une deuxième partie, on caractérise l'anneau d'endomorphismes du module injectif indécomposable sur certains anneaux artiniens locaux A, c'est-à-dire qu'on caractérise l'anneau Morita-dual de A.

Introduction.

Première partie (Sections 1, 2, 3). - La principale source d'inspiration de cette partie vient de travaux de DLAB et RINGEL, [4], [5], [6], où sont déterminés les modules injectifs indécomposables sur certains anneaux artiniens A. Il y est utilisé la méthode naturelle suivante.

Etant donné un A-module à gauche simple S, on construit (par générateurs et relations) une extension essentielle E de S, et on cherche à quelle condition le module E est injectif. Pour cela, on cherche à quelle condition il existe pour chaque idéal à gauche I de l'anneau et chaque morphisme φ de I dans A^A, un élément x_φ de E tel que $\varphi(a) = ax_\varphi$, pour tout $a \in I$.

En fait, cette méthode est applicable lorsque le treillis des idéaux de A

A est assez simple, mais devient impraticable pour des anneaux artiniens un peu plus "gros". De plus, elle nécessite, pour chaque classe d'anneaux A , des calculs chaque fois différents.

Dans ce travail, on donne une autre méthode, à la fois simple et applicable à tout anneau artinien. Cette méthode découle d'une technique employée par ROSENBERG et ZELINSKY [11], modulo quelques compléments que nous y avons apportés en [12] et ici, en section 2.

Rappelons qu'un anneau artinien commutatif (ainsi qu'une algèbre de dimension finie sur un corps commutatif) possède la propriété suivante.

La structure des modules injectifs indécomposables est "duale" de celle des modules projectifs indécomposables (qui sont des idéaux facteurs directs de l'anneau), dans un sens précisé en section 1 ci-après.

La méthode en question ici donne en particulier une condition nécessaire et suffisante (théorème 2.7) pour qu'un anneau artinien possède la propriété ci-dessus.

Cette partie donne les preuves des sections 1, 2, 3, de [13].

Deuxième partie (Sections 4, 5, 6, 7). - Pour tout anneau A (toujours supposé unitaire), on désignera par ${}_A\mathrm{Mod}$ [resp. Mod_A] la catégorie des A-modules à gauche [resp. à droite]. Etant donnés deux anneaux A et B , une dualité de Morita entre les catégories Mod_A et ${}_B\mathrm{Mod}$ est une équivalence contravariante additive entre une sous-catégorie de Mod_A et une sous-catégorie de Mod_B , ces sous-catégories étant fermées par prise de sous-objets et objets quotients, et contenant tous les modules de type fini. On dit alors que l'anneau A [resp. B] possède une dualité à droite [resp. à gauche] .

Tout anneau ayant une dualité (à gauche ou à droite) est semi-parfait (Cf. B. OSOFSKY [10]), et une caractérisation complète des anneaux ayant une dualité est donnée par B. J. MÜLLER en [9]. Signalons aussi que, pour l'étude des dualités de Morita, il suffit de se limiter au cas où les anneaux (semi-parfaits) sont basiques (Cf. MORITA [8]).

0.1. DÉFINITION. - Soient A et B deux anneaux semi-parfaits basiques tels qu'il existe une dualité de Morita entre les catégories Mod_A et ${}_B\mathrm{Mod}$. La donnée de l'un des deux anneaux et de cette propriété caractérise l'autre anneau, à isomorphisme près. Aussi dirons nous que B est "le" dual à droite de A , et A "le" dual à gauche de B . On sait (Cf. [8] et [9]) que, si on désigne par C_A [resp. ${}_BC'$] le cogénérateur minimal de la catégorie Mod_A [resp. ${}_B\mathrm{Mod}$] , alors $B = \mathrm{End}(C_A)$, et $A = \mathrm{End}({}_BC')$.

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau (semi-parfait basique) A :

(i) L'anneau A possède un dual à droite et lui est isomorphe.

(ii) L'anneau A possède un dual à gauche et lui est isomorphe.

(l'équivalence de ces conditions résulte immédiatement des définitions).

0.2. DÉFINITION. - Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, nous dirons que l'anneau A est auto-dual.

Par exemple, les algèbres de dimension finie (sur un corps commutatif) et les anneaux artiniens commutatifs sont auto-duaux. Signalons qu'il existe des anneaux artiniens non auto-duaux (Cf. section 7, où on donne du même coup un contre-exemple à une partie du théorème 3 de [10]).

Cette partie est essentiellement consacrée à la recherche des duaux des quotients d'anneaux de polynômes tordus. Ces anneaux seront notés $K[X]_\sigma^h$, où K est un corps non nécessairement commutatif, σ un endomorphisme de K, h un entier, $h \geqslant 2$. Ils sont artiniens, de longueur h, à gauche (pour toute précision, voir en section 4). Lorsque K est commutatif, on montre que ces anneaux sont auto-duaux. Lorsque K n'est pas commutatif, on n'a pu conclure que dans certains cas (sections 4, 5, 6).

Rappel et conventions. - Rappelons le résultat fondamental suivant, qui découle immédiatement de AZUMAYA [1], MORITA [8], et B. OSOFSKY ([10], théorème 3) (on désigne par $[{}_AM]$ la longueur d'un A-module à gauche M, si elle est définie).

0.3. THÉORÈME. - Soient A un anneau parfait à gauche ou à droite, et ${}_AC$ le cogénérateur minimal de la catégorie ${}_A\mathrm{Mod}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'anneau A possède une dualité à gauche.

(ii) Les longueurs $[{}_AA]$ et $[{}_AC]$ sont finies.

Dans tout cet exposé, les anneaux sont supposés avoir un élément unité non nul, et tous les modules sont unitaires. Les corps ne sont pas supposés commutatifs, si ce n'est pas spécifié. Les anneaux simples [resp. semi-simples] sont toujours supposés artiniens.

1. Suites de composition bilatères et forte dualité de Morita.

Etant donné un idéal bilatère J d'un anneau A, on dit qu'une suite d'idéaux bilatères

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_{s-1} \subset J_s = J$$

est une suite de composition bilatère de J s'il n'existe pas d'idéaux bilatères strictement compris entre J_{i-1} et J_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Cela revient à considérer les suites de composition (ou suites de JORDAN-HÖLDER) du sous-A-bimodule J de A. Alors le résultat suivant est classique.

1.1. LEMME.

1° Soit J un idéal bilatère ayant une suite de composition. Alors, toute suite de sous-idéaux bilatères emboités de J, peut être raffinée en une suite de composition.

2° Si un idéal bilatère J possède deux suites de composition bilatères

$$0 = J_0 \subset \dots \subset J_s = J \quad \text{et} \quad 0 \subset K_0 \subset \dots \subset K_t = J ,$$

alors, $s = t$ et il existe une permutation σ de $\{1 , \dots , s\}$ telle que les A-bimodules J_i/J_{i-1} et $K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}$ soient isomorphes. On appelle alors n la longueur bilatère de J.

Il est clair que tout idéal bilatère d'un anneau artinien à gauche ou à droite possède une suite de composition bilatère.

Rappelons qu'un idempotent non nul d'un anneau est dit primitif s'il n'est pas somme de deux idempotents orthogonaux. Et un idéal à gauche [resp. à droite] est dit primitif s'il est engendré par un idempotent primitif.

Pour un module M, on désignera par $E(M)$ son enveloppe injective, et par $T(M)$ le module $M/\mathrm{Rad}(M)$, qu'on peut appeler la tête de M. Si M est un module à gauche et J un idéal à droite de l'anneau, on notera $\{x \in M , Jx = 0\} = (M : J)$, et $(M : J)$ est un sous-module de M. Enfin, si un module à gauche [resp. à droite] M, sur un anneau A, possède une longueur au sens usuel (longueur d'une suite de composition, ou suite de JORDAN-HÖLDER), on désignera cette longueur, tantôt par $[M : A]_e$ (resp. $[M : A]_r$), tantôt par ${}_A[M]$ (resp. $[M]_A$), pour des raisons de commodité technique.

Un anneau A est dit semi-primaire si l'anneau $A/\mathrm{Rad}(A)$ est semi-simple, et si l'idéal $\mathrm{Rad}(A)$ est nilpotent. Tout anneau artinien à gauche ou à droite est semi-primaire.

Rappelons quelques propriétés essentielles de tout anneau semi-primaire A :

1° Etant donnés deux idempotents primitifs e et f de A, les conditions suivantes (i), (ii), (iii), (iv), sont équivalentes

(i) $Ae \simeq Af$;

(ii) $eA \simeq fA$;

(iii) $T(Ae) \simeq T(Af)$;

(iv) $T(eA) \simeq T(fA)$.

2° Pour tout A-module à gauche simple S, il existe un idempotent primitif e de A tel que $S \simeq T(Ae)$.

3° Pour tout A-module à gauche projectif indécomposable P, il existe un idempotent primitif e de A tel que $P \simeq Ae$.

4° Tout A-module à gauche injectif indécomposable est l'enveloppe injective d'un

module simple.

On a donc des bijections naturelles entre les classes d'isomorphisme des

(a) Modules à gauche simples,

(b) Modules à gauche projectifs indécomposables,

(c) Idéaux à gauche primitifs,

(d) Modules à gauche injectifs indécomposables,

(e) Enveloppes injectives de modules à gauche simples,

(f) Mêmes classes qu'en (a), (b), (c), (d), (e), en remplaçant gauche par droite.

Soit f un idempotent primitif d'un anneau semi-primaire A. Il existe une "dualité qualitative de structure" (pour toutes précisions, cf. FULLER [7]) entre le A-module à droite projectif indécomposable fA, et l'injectif à gauche indécomposable $M = E(T(Af))$, qui se manifeste notamment par la propriété suivante :

Pour tout couple (J , J'), d'idéaux bilatères de A tels que $J \supset J'$, le A-module à droite fJ/fJ' est semi-simple si, et seulement si, le A-module à gauche $(M : J')/(M : J)$ est semi-simple. Si e est un idempotent primitif de A, $T(eA)$ est isomorphe à un facteur direct de fJ/fJ' si, et seulement si, $T(Ae)$ est isomorphe à un facteur direct de $(M : J')/(M : J)$.

Si A est une algèbre de dimension finie sur un corps commutatif, ou un anneau artinien commutatif, on a de plus la propriété suivante :

Les longueurs $[fJ/fJ']$ et $[(M : J')/(M : J)]$ sont égales.

C'est-à-dire qu'à la "dualité qualitative" s'ajoute dans ce cas une "dualité quantitative".

1.2. DÉFINITION. - Soient A un anneau semi-primaire, et f un idempotent primitif de A. Nous dirons que l'idéal à droite primitif fA et le module à gauche injectif indécomposable $M = E(T(Af))$ sont fortement duaux si, pour tout couple (J , J') d'idéaux bilatères tels que $J \supset J'$, les longueurs $[fJ/fJ']$ et $[(M : J')/(M : J)]$ sont égales. Nous dirons que l'anneau A possède la forte dualité à gauche si la propriété ci-dessus est vraie pour tout idempotent primitif f de A.

1.3. LEMME. - Soient A un anneau semi-primaire ayant une longueur bilatère finie, f un idempotent primitif de A, et M le module $E(T(Af))$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Les modules fA et $E(T(Af))$ sont fortement duaux.

(ii) Il existe une suite de composition bilatère de $\mathrm{Rad}(A)$, soit

$$0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = \mathrm{Rad}(A) ,$$

telle que $[(fJ_i/fJ_{i-1})_A] = [_A(M : J_{i-1})/(M : J_i)]$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(iii) Même propriété qu'en (ii), pour toute suite de composition bilatère de tout idéal de l'anneau A.

Preuve.

(i) implique (iii), et (iii) implique (ii), trivialement. (ii) implique (i). Prolongeons la suite de composition bilatère de $\mathrm{Rad}(A)$ en une suite de composition bilatère de A, $0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = \mathrm{Rad}(A) \subset \ldots \subset J_t = A$.

Pour $i > n$, le module à gauche $_A(J_i/J_{i-1})$ est isotypique :

S'il n'est pas de type $T(Af)$, alors $[(fJ_i/fJ_{i-1})_A] = 0 = [(M : J_{i-1})/(M : J_i)]$;

S'il est de type $T(Af)$, alors $fJ_i/fJ_{i-1} = fA/f\,\mathrm{Rad}(A)$, et $(M : J_{i-1})/(M : J_i)$ est le sous-module simple de M, donc $[fJ_i/fJ_{i-1}] = 1 = [(M : J_{i-1})/(M : J_i)]$. Donc on a le résultat suivant.

1.3.1. $[fJ_i/fJ_{i-1}] = [(M : J_{i-1})/(M : J_i)]$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant t$.

Maintenant, soit $0 \subset J' \subset J \subset A$ une suite bilatère. D'après (1.1), elle peut être raffinée en une suite de composition bilatère de A :

$$0 = K_0 \subset \ldots \subset K_p = J' \subset \ldots \subset K_q = J \subset \ldots \subset K_t = A .$$

Alors, d'après (1.1) et la relation (1.3.1) ci-dessus, on a également la relation suivante $[fK_i/fK_{i-1}] = [(M : K_{i-1})/(M : K_i)]$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Ainsi,

$$[fJ/fJ'] = \sum_{p<i\leqslant q}[fJ_i/fJ_{i-1}] = \sum_{p<i\leqslant q}[(M : J_{i-1})/(M : J_i)] = [(M : J')/(M : J)] .$$

1.4. REMARQUE. - Si un anneau artinien à gauche et à droite possède la forte dualité à gauche, il possède une dualité de Morita à gauche (Cf. 0.3), car le cogénérateur minimal $_AC$ de la catégorie $_A\mathrm{Mod}$ est de longueur finie. En effet, $_AC = E(S_1) \oplus \ldots \oplus E(S_r)$, où $S_1, \ldots, S_r$ est un système complet de A-modules à gauche simples. Soient $e_1, \ldots, e_r$ des idempotents primitifs de A tels que $S_i \simeq T(Ae_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. L'application de l'hypothèse de forte dualité à gauche, en prenant $J = A$ et $J' = 0$, donne l'égalité $[E(T(Ae_i))] = [e_i A]$, de sorte que le module $E(S_i)$ est de longueur finie, $1 \leqslant i \leqslant r$. Donc $_AC$ est de longueur finie, précisément égale à la longueur du générateur projectif minimal de la catégorie Mod_A (Cf. [12]).

Signalons qu'il existe des anneaux artiniens à gauche et à droite A n'ayant pas la forte dualité à gauche. On en connaît pour lesquels la longueur $[_AC]$ est infinie, mais on ne sait pas s'il en existe pour lesquels cette longueur est finie. Ce problème est d'ailleurs équivalent à un problème de E. ARTIN sur les extensions d'anneaux simples (Cf. [12]).

2. Couples d'anneaux de Rosenberg-Zelinsky et principaux résultats.

2.1. DÉFINITION. - Soient A et B deux anneaux, et $_AM_B$ un (A,B)-bimodule. Il

existe un morphisme naturel Φ de B dans $\mathrm{End}({}_AH)$ défini par

$$\Phi(b)(x) = xb \ , \qquad b \in B \ , \quad x \in H \ .$$

Comme $\mathrm{Ker}\ \Phi$ est l'annulateur à droite de H, nous considèrerons sur H indifféremment la structure de A-module ou de $A/\mathrm{Ker}\ \Phi$-module (à gauche). Le couple d'anneaux $(\mathrm{End}({}_AH) \ , \ \Phi(B))$ est ici appelé <u>couple</u> (de Rosenberg-Zelinsky) <u>associé</u> à gauche au bimodule ${}_AH_B$. Il est à noter que $\Phi(B)$ est un sous-anneau unitaire de $\mathrm{End}({}_AH)$.

2.2. Soient C et C' deux anneaux, et D [resp. D'] un sous-anneau de C [resp. de C']. On dira qu'un isomorphisme de C dans C' est un isomorphisme du couple $(C \ , \ D)$ dans le couple $(C' \ , \ D')$ si la restriction à D est un isomorphisme de D dans D'. Avec cette définition, un isomorphisme entre deux bimodules induit canoniquement un isomorphisme entre les couples associés à gauche à ces bimodules.

2.3. Les résultats suivants sont classiques.

<u>Si le module</u> ${}_AH$ <u>est semi-simple de longueur finie</u> n, <u>l'anneau</u> $\mathrm{End}({}_AH)$ <u>est semi-simple de longueur</u> n, <u>et cet anneau est simple si, et seulement si,</u> ${}_AH$ <u>est de plus isotypique</u>.

<u>Si le module</u> H_B <u>est semi-simple, alors</u> $\mathrm{Ker}\ \Phi \supset \mathrm{Rad}(B)$, <u>et si l'anneau</u> B <u>est semi-primaire,</u> $\Phi(B)$ <u>est isomorphe à un anneau semi-simple composant direct de</u> $B/\mathrm{Rad}(B)$. <u>Si de plus</u> H_B <u>est isotypique, l'anneau</u> $\Phi(B)$ <u>est simple</u>.

Considérons maintenant un anneau artinien à gauche A, et J, J' deux idéaux bilatères tels que $J' \subset J$ et que le A-module J/J' soit semi-simple à gauche et à droite et isotypique à gauche, de type $T(Af)$, où f est un idempotent primitif de A. Notons $E = \mathrm{End}({}_A(J/J'))$, qui est un anneau simple (le fait que A soit artinien à gauche implique que le A-module J/J' soit de longueur finie) ; notons U [resp. V] un E-module à gauche [resp. à droite] simple ; notons $T = \Phi(A)$, qui est un anneau semi-simple, et enfin $M = E(T(Af))$. Alors, U [resp. V] est de façon naturelle un T-module à gauche [resp. à droite], et il est prouvé en ([12], corollaire 4.4) le résultat suivant.

2.4. Lemme. - <u>Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a les égalités</u>

$$[{}_TU] = [{}_A((M : J')/(M : J))] \ ,$$
$$[V_T] = [(fJ/fJ')_A] \ .$$

2.5. <u>Anneaux basiques</u>. - A tout anneau semi-primaire A correspond son <u>anneau de base</u> (défini à isomorphisme près), qui est "le plus petit" anneau Morita-équivalent à l'anneau A : c'est l'anneau d'endomorphismes du plus petit générateur projectif de la catégorie ${}_A\mathrm{Mod}$ [resp. Mod_A] (cf. [8]). Un anneau semi-primaire A sera dit basique [illegible] anneau de base [illegible] du fait que

l'anneau $A/Rad(A)$ soit un produit de corps. La catégorie des modules sur un anneau semi-primaire étant Morita-équivalente à celle des modules sur son anneau de base, nous pouvons nous limiter à ne considérer ici que des anneaux basiques.

Soit A un anneau semi-primaire basique. Conformément à la remarque faite en (2.1.1), un A-bimodule simple H peut être considéré comme un K-K'-bi-espace vectoriel, où $K = A/(A : {}_AH)$ et $K' = A/(A : H_A)$ sont des corps composants directs de l'anneau $A/Rad(A)$.

2.6. Famille de couples de Rosenberg-Zelinsky associés à un anneau artinien.

Soit A un anneau artinien à gauche. Soit B son anneau de base. Soit

$$0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = Rad(B)$$

une suite de composition bilatère de $Rad(B)$. Les B-bimodules simples J_i/J_{i-1} sont des bi-espaces vectoriels (Cf. 2.5), et la famille de ces bi-espaces $(1 \leqslant i \leqslant s)$ est indépendante (à permutation et isomorphisme près) du choix de la suite de composition de $Rad(B)$, d'après (1.1). Soit (E_i , T_i) le couple de Rosenberg-Zelinsky associé à gauche au bi-espace J_i/J_{i-1} . Comme l'anneau A est artinien à gauche, J_i/J_{i-1} est de dimension à gauche finie, donc E_i est un anneau simple, et T_i est un sous-corps de E_i . Avec la définition (2.2), la famille $(E_i,T_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ est indépendante (à permutation et isomorphisme près) du choix de la suite de composition bilatère de $Rad(B)$. On dit que c'est la famille de couples d'anneaux de Rosenberg-Zelinsky associés à gauche à l'anneau artinien à gauche A .

2.7. THÉORÈME. - *Soient A un anneau artinien à gauche, et $(E_i , T_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ la famille de couples d'anneaux de Rosenberg-Zelinsky associés à gauche à l'anneau A . Si on désigne par ℓ_i [resp. r_i] la dimension de E_i comme espace vectoriel à gauche [resp. à droite] sur T_i , les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'anneau A possède la forte dualité à gauche.*

(ii) $\ell_i = r_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Preuve. - Soit B l'anneau de base de A . La famille $(E_i , T_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ est celle des couples associés à une suite de composition bilatère de $Rad(B)$, soit $0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = Rad(B)$. (i) implique (ii). Fixons nous un entier i , $1 \leqslant i \leqslant s$. Il existe un idempotent primitif e de B tel que le module à gauche isotypique J_i/J_{i-1} soit de type $T(Ae)$. Si on note $M = E(T(Ae))$, il résulte de l'hypothèse l'égalité $[(M : J_{i-1})/(M : J_i)] = [(eA/eJ_{i-1})_B]$. Alors, d'après le lemme 2.3, $[U_i : T_i]_\ell = [V_i : T_i]_r$, où U_i [resp. V_i] désigne un B-module à gauche [resp. à droite] simple. Soit n_i la longueur de l'anneau E_i sur lui-même. Alors,

$$[E_i : T_i] = n_i[U_i : T_i]_\ell = n_i[V_i : T_i]_r = [E_i : T_i]_r .$$

(ii) implique (i). On suppose que $\ell_i = r_i$, donc $[U_i : T_i]_\ell = [V_i : T_i]_r$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Soit f un quelconque idempotent primitif de B , et $M = E(T(Af))$. D'après le lemme 1.3, nous avons à prouver les égalités

$$[(M : J_{i-1})/(M : J_i)] = [(fJ_i/fJ_{i-1})_B] \; , \quad 1 \leqslant i \leqslant s \; .$$

Deux cas se présentent suivant les valeurs de i :

1er cas. - Le module à gauche isotypique J_i/J_{i-1} n'est pas de type $T(Af)$. Alors, $fJ_i/fJ_{i-1} = 0$. Mais il en résulte que $(M : J_{i-1})/(M : J_i) = 0$ d'après [7], donc l'égalité cherchée est vraie dans ce cas.

2e cas. - Le module à gauche J_i/J_{i-1} est de type $T(Af)$. Alors, d'après le lemme 2.3 et l'hypothèse,

$$[(M : J_{i-1})/(M : J_i)] = [U_i : T_i]_\ell = [V_i : T_i]_r = [(fJ_i/fJ_{i-1})_B] \; ,$$

ce qui achève la preuve.

Nous allons maintenant donner un critère plus précis pour connaître les modules injectifs dans le cas général, c'est-à-dire même si l'anneau ne possède pas la forte dualité.

2.8. Soient A un anneau artinien à gauche (basique), et $(J_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ une suite de composition bilatère de l'idéal $\mathrm{Rad}(A)$. Soit S un A-module à gauche simple, et notons $M = E(S)$ et $c_i(S) = [{}_A((M : J_{i-1})/(M : J_i))]$. Comme indiqué dans la preuve de 2.7, deux cas se présentent :

1er cas. - Si le module à gauche isotypique ${}_A(J_i/J_{i-1})$ n'est pas de type S, $c_i(S) = 0$.

2e cas. - Si ce module est de type S, alors $c_i(S) = [U_i : T_i]_\ell = \ell_i/n_i$, où $\ell_i = [E_i : T_i]$, et $n_i = [{}_A(J_i/J_{i-1})]$.

La famille des cardinaux $c_i(S)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, est indépendante (à permutation près) du choix de la suite de composition bilatère de $\mathrm{Rad}(A)$, à partir de laquelle elle est définie.

Comme indiqué en ([13], 2.12), le résultat suivant permet de construire "par générateurs et relations" (c'est-à-dire comme quotient d'un module libre par un sous-module convenable. On en donne un exemple en section 4 ci-après) le module injectif $E(S)$, lorsqu'on connaît les nombres $c_i(S)$.

2.9. THÉORÈME. - *Soient A un anneau artinien à gauche basique, et*

$$0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = \mathrm{Rad}(A)$$

une suite de composition bilatère de $\mathrm{Rad}(A)$. Soient S un A-module à gauche simple, L une extension essentielle de S et notons $d_i(L) = [(L : J_{i-1})/(L : J_i)]$. Alors,

1° $d_i(L) \leqslant c_i(S)$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

2° *Si $\sum_{1\leqslant i\leqslant s} c_i(S) < +\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le module L est enveloppe injective de S ;*

(ii) $d_i(L) = c_i(S)$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

(iii) $[L] = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} c_i(S)$.

Preuve.

1° Le module L étant un sous-module de $M = E(S)$, on a $(L:J_i) = L \cap (M:J_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Par suite, le module $(L : J_{i-1})/(L : J_i)$ est isomorphe à un sous-module de $(M : J_{i-1})/(M : J_i)$. Donc, $d_i(L) \leqslant c_i(S)$.

2° (i) implique (ii), trivialement. (ii) implique (iii), trivialement car $[L] = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} d_i(L)$. (iii) implique (i). Puisque $[M] = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} c_i(S)$, l'hypothèse (iii) signifie que $[L] = [M]$. Si cette longueur est finie, cela implique que le sous-module L de M est en fait égal à M .

Cette section s'achève par une remarque donnant une condition nécessaire et suffisante pour que les injectifs indécomposables soient de longueur finie.

2.10. Soient A un anneau artinien à gauche basique, et C le cogénérateur minimal de la catégorie ${}_A\mathrm{Mod}$. Les A-modules à gauche injectifs indécomposables sont de longueur finie si, et seulement si, le module C l'est, ce qui équivaut encore au fait que le module $T(C)$ soit de longueur finie. Notons S le socle droit de l'anneau A , c'est-à-dire la somme des idéaux à droite minimaux de A , qui est aussi l'annulateur à gauche de $\mathrm{Rad}(A)$, soit $S = (A : {}_A\mathrm{Rad}(A))$. Ainsi, $T(C) = C/\mathrm{Rad}(A)\, C = C/(C : S)$. Notons $J = S \cap \mathrm{Rad}(A)$. Alors le complément de J dans S est, soit nul, soit un anneau semi-simple composant direct de A . Et, dans ce dernier cas, les A-modules à gauche injectifs indécomposables, correspondant à ce composant, sont simples. Donc, en fait, le module C est de longueur finie si, et seulement si, le module $C/(C : J)$ l'est. Soient $(J_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une suite de composition bilatère de l'idéal J , et $(E_i , T_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ la famille des couples de Rosenberg-Zelinsky qui y est associée à gauche. La technique précédemment employée, donne l'égalité $C/(C : J) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} [E_i : T_i]_\ell / n_i$.

En résumé, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) les A-modules à gauche injectifs indécomposables sont de longueur finie ;

(ii) $[E_i : T_i]_\ell < +\infty$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

3. Application à une classe d'anneaux artiniens.

3.1. LEMME. - Soient Q et Q' des corps commutatifs, ${}_QH_{Q'}$ un Q-Q'-bi-espace vectoriel, et (E , T) [resp. (E' , T')] le couple d'anneaux de Rosenberg-Zelinsky associé à gauche (resp. à droite) à ${}_QH_{Q'}$. Si $[{}_QH] = 1$ et $[H_{Q'}] = n < +\infty$, alors, $[E : T]_\ell = [E : T]_r = n = [E' : T']_\ell = [E' : T']_r$.

Preuve.

Si $[{}_QH] = 1$, alors $E = \mathrm{End}({}_QH) \simeq Q$, donc T est un sous-corps du corps commutatif E . Ainsi, $[E : T]_\ell = [E : T]_r = [H_{Q'}]$.

Si $[H_{Q'}] = n < +\infty$, alors l'anneau $E' = \mathrm{End}(H_{Q'})$ est simple, de longueur n . Soit Ψ le morphisme de Q dans E' défini par la relation

$$\Psi(q)(h) = qh , \qquad q \in Q , \quad h \in H .$$

Soit f un élément du centre C de E' . Donc $f\Psi(q) = \Psi(q)\, f$, pour tout $q \in Q$. C'est-à-dire, $f(qh) = qf(h)$, pour tout $q \in Q$, et tout $h \in H$. Prenons arbitrairement un élément dans H , soit x . Puisque $[{}_QH] = 1$, pour tout $h \in H$, il existe $q \in Q$ tel que $h = qx$. Et il existe $\lambda \in Q$ tel que $f(x) = \lambda x$. Ainsi $f(h) = f(qx) = qf(x) = q\lambda x = \lambda qx = \lambda h$, et ce, pour tout $h \in H$. Donc $f = \Psi(\lambda)$. Ainsi le centre C de E' est contenu dans $\Psi(Q)$, qui est T' par définition. Donc

$$[E' : T']_\ell \, [T' : C]_\ell = [E' : C]_\ell = [E' : C]_r = [E' : T']_r \, [T' : C]_r .$$

Mais E' est de dimension finie sur son centre, et $[T' : C]_\ell = [T' : C]_r$. Donc $[E' : T']_\ell = [E' : T']_r$. Enfin, on peut remarquer que, si U' désigne un E'-module à gauche simple, alors, $[U' : T'] = [{}_QH] = 1$. Donc, $[E' : T']_\ell = n[U' : T'] = n$.

Autre démonstration possible : on se donne une base de H sur Q' , à partir de laquelle on construit aisément une base de E' sur T' , à gauche et à droite, ayant le même nombre d'éléments.

Du théorème 2.7 et du lemme 3.1, il résulte immédiatement le résultat suivant.

3.2. PROPOSITION. - *Soit A un anneau artinien à gauche et à droite vérifiant les conditions suivantes :*

1° le corps commutant de chaque A-module simple est commutatif ;

2° si $0 = J_0 \subset \ldots \subset J_s = \mathrm{Rad}(A)$ est une suite de composition bilatère, le A-module J_i/J_{i-1} est simple à gauche ou à droite, pour chaque i , $1 \leqslant i \leqslant s$.

Alors, l'anneau A possède une forte dualité à gauche et à droite.

En particulier, tout anneau local sériel à gauche, artinien à droite, et dont le corps résiduel est commutatif, possède donc la forte dualité à gauche et à droite (rappelons qu'un module est dit *sériel* s'il possède une, et une seule, suite de composition, et un anneau local A est dit sériel à gauche si le A-module ${}_AA$ est sériel).

Il en découle immédiatement les propositions 2 de [4] et 2.2 de [6].

4. *Dual d'un anneau du type $K[X]_\sigma^h$.*

Soient K un corps, et σ un endomorphisme de K . On désigne par $K[X]_\sigma$ l'anneau des polynômes σ-tordus, c'est-à-dire l'anneau défini sur le groupe additif de $K[X]$ par la multiplication $Xa = \sigma(a)\, X$, $a \in K$. On désigne par $K[X]_\sigma^h$ (avec $h \geqslant 2$) le quotient de l'anneau $K[X]_\sigma$ par l'idéal (X^h) . Cet anneau est sériel à gauche, de hauteur h , de longueur à gauche h également (Cf. [14]).

Pour la commodité des notations, dans la suite, nous désignerons par A l'anneau $K[X]_\sigma^{h+1}$ (et non pas $K[X]_\sigma^h$), en supposant $h \geqslant 1$ (et non pas $h \geqslant 2$).

Nous allons construire un A-module à droite, noté F_A, qui sera sériel et de hauteur $h+1$, et nous expliciterons son anneau d'endomorphismes $B = End(F_A)$. Si l'anneau A possède la forte dualité à droite (ce qui est réalisé en particulier si K est commutatif, d'après 3.2), le module F_A est cogénérateur minimal de la catégorie Mod_A, et l'anneau B est alors le dual à droite de A.

On montre aisément que si Λ est un anneau local, sériel à gauche, de hauteur $h+1$, et si on désigne par d la longueur $[(Rad(\Lambda)/Rad(\Lambda)^2)_\Lambda]$, alors la longueur à droite de l'anneau est $[\Lambda_\Lambda] = 1 + d + d^2 + \ldots + d^h$.

On a vu (Cf. [13]) que, $[(Rad(A)/Rad(A)^2)_A] = [K : \sigma(K)]_r$. Par la suite, nous supposons toujours que cette dimension, désignée par d, est finie, ce qui équivaut donc à supposer l'anneau A artinien à droite.

Si $d = 1$, l'anneau A est sériel à droite aussi, donc auto-injectif et auto-dual. Aussi supposerons nous dorénavant que $d > 1$.

4.0. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_d$ une base à droite de K sur $\sigma(K)$, telle que $e_1 = 1_K$. On vérifie aisément que, pour chaque entier positif n, l'ensemble

$$\mathcal{B}_n = \{e_{i_1}\, \sigma(e_{i_2})\, \sigma^2(e_{i_3}) \ldots \sigma^{n-1}(e_{i_n}) \; ; \quad 1 \leqslant i_j \leqslant d, \; 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

d'éléments de K est une base à droite de K sur $\sigma^n(K)$. Et, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$, car $e_{i_1}\, \sigma(e_{i_2}) \ldots \sigma^{n-1}(e_{i_n}) = e_{i_1}\, \sigma(e_{i_2}) \ldots \sigma^{n-1}(e_{i_n})\, \sigma^n(e_1) \in \mathcal{B}_{n+1}$. En particulier $e_1 \in \mathcal{B}_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

Soient V_n le $\sigma^n(K)$-sous-espace vectoriel à droite de K engendré par $\mathcal{B}_n - \{e_1\}$ et, $J = V_1 X \oplus \ldots \oplus V_h X^h$, somme directe de sous-groupes de A. On vérifie sans peine que J est un idéal à droite de A. Désignons par q le morphisme canonique de A_A sur A_A/J, et par F_A le A-module à droite $A_A/J = q(A_A)$.

4.1. Montrons que le module F_A ainsi défini est sériel. Pour cela, il faut et il suffit que pour tous $a, b \in A$, il existe $c \in A$, tel que $q(a) = q(b)\, c$ ou $q(b) = q(a)\, c$.

Soient $a = \sum_{0 \leqslant n \leqslant h} \alpha_n X^n$, $b = \sum_{0 \leqslant n \leqslant h} \beta_n X^n$, deux éléments de A. Pour simplifier les notations, les éléments de $\mathcal{B}_n$ seront désignés par f_i, $1 \leqslant i \leqslant d^n$ (notation cohérente puisque $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$), avec $f_1 = e_1 = 1_K$.

Ainsi, $a = \sum_{0 \leqslant n \leqslant h} (\sum_{1 \leqslant i \leqslant d^n} f_i\, \alpha_{ni}) X^n$, où $\alpha_{ni} \in \sigma^n(K)$. Et par suite,

$$a - \sum_{0 \leqslant n \leqslant h} \alpha_{n1} X^n \in J.$$

On écrira simplement α_n au lieu de α_{n1}, $1 \leqslant n \leqslant h$. Ainsi,

$$q(a) = q(\textstyle\sum_{0 \leqslant n \leqslant h} \alpha_n X^n),$$

où $\alpha_n \in \sigma^n(K)$. Donc il existe $\gamma_n \in K$, tel que $\alpha_n = \sigma^n(\gamma_n)$, et par suite

$\alpha_n X^n = X^n \gamma_n$. Soit k le plus petit des entiers n tels que $\alpha_n \neq 0$, si les α_n sont non tous nuls, i. e. si $q(a) \neq 0$ (si $q(a) = 0$, la question est résolue, puisque $q(a) = q(b)\, c$ en prenant $c = 0$). Alors, si on note $\sum_{0 \leqslant n \leqslant h-k} X^n \gamma_{k+n} = a'$, il vient $q(a) = q(X^k a')$, et a' est un élément inversible de A , puisque $\gamma_k \neq 0$. De même, il existe $\ell \in \underset{\sim}{N}$ et un élément b' inversible dans A , tels que $q(b) = q(X^\ell b')$. On peut supposer $k \leqslant \ell$, car le cas où $\ell \leqslant k$ se résout symétriquement. D'après [14], il existe un élément inversible u dans A tel que $a' X^{\ell-k} = X^{\ell-k} u$. Ainsi, $q(a) X^{\ell-k} = q(X^k a' X^{\ell-k}) = q(X^\ell u)$, et par suite, $q(b) = q(a)\, c$ en prenant $c = X^{\ell-k} u^{-1} b'$. Ce qui achève la preuve de la sérialité du module F_A .

On vérifie aisément que la suite

$$0 \subset q(X^h A) \subset \ldots \subset q(X^2 A) \subset q(XA) \subset F$$

est une suite de composition du module F_A . Donc, $[F_A] = h + 1$.

4.2. LEMME. - *Soient* D *un corps,* k *un sous-corps de* D *tel que* $[D:k]_r < +\infty$, V *un sous-k-espace vectoriel à droite de* D , *tels que :*

1° $kV \subset V$ (cette condition est toujours vérifiée si D est commutatif) ;

2° *les dimensions* $[D : k]_r$ *et* $[V : k]_r$ *sont premières entre elles.*

Alors $k = \{\alpha \in K ,\ \alpha V \subset V\}$.

Preuve.

Désignons $\{\alpha \in K ,\ \alpha V \subset V\}$ par D_V . Pour chaque élément α de K , désignons par γ_α la multiplication à gauche par α dans K . Ainsi $\alpha V = \gamma_\alpha(V)$. Or, si $\alpha \neq 0$, γ_α est un automorphisme du k-espace vectoriel à droite D . Donc $[\alpha V : k]_r = [\gamma_\alpha(V) : k]_r = [V : k]_r$. Ce qui, si $\alpha \in D_V$, implique $\alpha V = V$, et par suite $V = \alpha^{-1} V$. Donc, si $\alpha \in D_V^*$, alors $\alpha^{-1} \in D_V^*$. Ceci vu, on vérifie aisément que D_V est un sous-corps de D , et il contient k , par l'hypothèse 1°. Or la structure naturelle de D_V-espace vectoriel de V prolonge sa structure de k-espace vectoriel. Donc $[V : k]_r = [V : D_V]_r\, [D_V : k]_r$. La fin de la preuve résulte alors immédiatement de l'hypothèse 2° et du fait que l'entier $[D_V : k]_r$ divise chacun des entiers $[D : k]_r$ et $[V : k]_r$.

4.3. *Caractérisation de l'anneau* $\Delta = \mathrm{End}(F_A)$.

On remarque aisément que tout sous-module de F_A est isomorphe à un quotient de F_A . On en déduit que l'anneau local $\mathrm{End}(F_A)$ est sériel à gauche de longueur à gauche égale à la longueur $[F_A] = h + 1$.

Le module F_A étant monogène, de générateur $q(1)$, un endomorphisme f de F_A est déterminé par la donnée de l'élément $q(x)$ image par f de $q(1)$ (i. e. $q(x) = f(q(1))$). Il est clair que $q(xJ) = f q(J) = \{0_F\}$, d'où il résulte l'inclusion $xJ \subset J$. Réciproquement, pour tout x de A tel que $xJ \subset J$, la relation

$fq(a) = q(xa)$, $a \in A$, définit un endomorphisme f de F_A .

Caractérisons les éléments α de $K \subset A$ tels que $\alpha J \subset J$. Puisque

$$\alpha J = \alpha V_1 X \oplus \dots \oplus \alpha V_h X^h ,$$

on a $\alpha J \subset J$ si, et seulement si, $\alpha V_n \subset V_n$, $1 \leqslant n \leqslant h$.

4.3.1. Supposons que $\sigma^n(K)\, V_n \subset V_n$, $1 \leqslant n \leqslant h$ (cette hypothèse est vérifiée notamment si K est commutatif).

Comme $[V_n : \sigma^n(K)]_r = [K : \sigma^n(K)]_r - 1$, on peut appliquer le lemme 4.2 avec $D = K$, $k = \sigma^n(K)$, $V = V_n$. Il en résulte que $\alpha V_n \subset V_n$ si, et seulement si, $\alpha \in \sigma^n(K)$. Ainsi, $\alpha J \subset J$ si, et seulement si, $\alpha \in \bigcap_{1 \leqslant n \leqslant h} \sigma^n(K) = \sigma^h(K)$.

Par suite, la relation $\Phi(\alpha)(q(a)) = q(\sigma^h(\alpha)\, a)$, $\alpha \in K$, $a \in A$, définit une application Φ de K dans B . On vérifie sans peine que cette application est un morphisme d'anneaux, de sorte que $\Phi(K)$ est un sous-corps de B . On va voir que $\Phi(K)$ est en fait un sous-corps de représentants du corps résiduel. Cela revient à montrer (Cf. [14]) que $B = \Phi(K) \oplus \mathrm{Rad}(B)$, somme directe de sous-groupes additifs.

Soient donc $f \in B$, c'est-à-dire $fq(1) = q(x)$, où $x = \sum_{0 \leqslant n \leqslant h} x_n X^n$, $1 \leqslant n \leqslant h$, et $xJ \subset J$. On a vu que si $\alpha \in K$ et $\alpha J \subset J$, alors $\alpha \in \sigma^h(K)$. De la même façon, la relation $xJ \subset J$ implique $x_0 \in \sigma^h(K)$. Donc il existe $\beta \in K$ tel que $x_0 = \sigma^h(\beta)$, et par suite $fq(1) = q(x_0) + q(x - x_0) = \Phi(\alpha)(q(1)) + q(x - x_0)$. Mais puisque $xJ \subset J$ et $x_0 J \subset J$, on a aussi $(x - x_0)J \subset J$. Alors soit f_1 l'élément de B défini par la relation $f_1\, q(1) = q(x - x_0)$. Ainsi

$$f_1\, q(1) = q\Big(\sum_{1 \leqslant n \leqslant h} x_n X^n\Big) \in q(XA) = \mathrm{Rad}(F_A) .$$

L'endomorphisme f_1 n'est pas surjectif, donc f_1 n'est pas inversible dans B , donc $f_1 \in \mathrm{Rad}(B)$. Et $f = \Phi(\beta) + f_1$. On a ainsi prouvé que $B = \Phi(K) + \mathrm{Rad}(B)$. On vérifie aisément que $\Phi(K) \cap \mathrm{Rad}(B) = \{0\}$. Donc $B = \Phi(K) \oplus \mathrm{Rad}(B)$. Donc le sous-corps $\Phi(K)$, que nous désignerons par D , est bien un corps de représentants du corps résiduel de B .

Pour finir, soit Y l'élément de B défini par la relation $Yq(1) = q(X)$. On vérifie aisément que $BY = \mathrm{Rad}(B)$, c'est-à-dire que Y est une "uniformisante" (Cf. [14]).

Il existe donc un automorphisme τ de D , défini par la relation

$$Y\delta = \tau(\delta)\, Y , \qquad \delta \in D ,$$

tel que les anneaux B et $D[Y]_\tau^{h+1}$ soient isomorphes (Cf. [14]). Or

$$Y\Phi(\alpha)\, q(1) = Yq(\sigma^h(\alpha)) = q(X\sigma^h(\alpha)) = q(\sigma^{h+1}(\alpha)\, X) , \text{ pour tout } \alpha \in K .$$

Et

$$\Phi(\alpha)\, Yq(1) = \Phi(\alpha)\, q(X) = q(\sigma^{n}(\alpha)\, X) , \text{ pour tout } \alpha \in K .$$

Donc,

$\tau(\Phi(\alpha))\ Yq(1) = Y\Phi(\alpha)\ q(1) = q(\sigma^{h+1}(\alpha)X) = \Phi(\sigma(\alpha))\ Yq(1)$, pour tout $\Phi(\alpha) \in D$.

D'où $(\tau\Phi(\alpha) - \Phi\sigma(\alpha))Y = 0$. Or l'annulateur de Y est $\mathrm{Rad}(B)^h$, donc $\tau\Phi(\alpha) - \Phi\sigma(\alpha) \in D \cap \mathrm{Rad}(B)^h = \{0\}$, et $\tau\Phi = \Phi\sigma$. Ainsi, d'après [14], les anneaux $D[Y]_\tau^{h+1}$ et $K[X]_\sigma^{h+1}$ sont isomorphes. En résumé, on obtient le résultat suivant.

4.4. Avec les hypothèses et notations ci-dessus, l'anneau $\mathrm{End}(F_A)$ est isomorphe à l'anneau A .

En particulier, on a les résultats suivants.

4.5. PROPOSITION. Soient K un corps commutatif, σ un endomorphisme de K tel que $[K : \sigma(K)] < +\infty$, et h un entier, $h \geqslant 2$. L'anneau $K[X]_\sigma^h$ est auto-dual.

Cela résulte immédiatement de 4.4 et du fait, déjà signalé, que si K est commutatif, l'anneau $\mathrm{End}(F_A)$ est le dual à droite de l'anneau $A = K[X]_\sigma^h$.

4.6. COROLLAIRE. - Tout anneau local artinien à gauche et à droite, sériel à gauche, de corps résiduel commutatif, et contenant un corps de représentants du corps résiduel, est auto-dual.

En effet, il est prouvé en [14], que tout anneau vérifiant les hypothèses ci-dessus, est du type $K[X]_\sigma^h$, avec $[K : \sigma(K)] < +\infty$.

Dans la section suivante, nous donnons des classes de couples (K , σ) , où K est un corps non commutatif, σ un endomorphisme de K , tels qu'il y ait des bases $\mathcal{B}_n$ avec lesquelles les hypothèses 4.3.1 sont vérifiées, et tels que l'anneau $K[X]_\sigma^h$ possède la forte dualité. En vertu de ce qu'on vient de voir, cet anneau est donc auto-dual.

Toutefois, la méthode décrite ci-dessus ne permet pas de conclure pour tout anneau $K[X]_\sigma^h$, K étant un quelconque corps non commutatif. La difficulté semble être d'exhiber un éventuel corps de représentants du corps résiduel de l'anneau dual, ce que nous n'avons pu faire ici qu'avec l'hypothèse 4.3.1.

5. Cas de certains corps résiduels non commutatifs.

Nous allons d'abord décrire une classe de corps non commutatifs, qui est une généralisation d'un exemple qui nous a été communiqué par P. M. COHN.

Si f est une application d'un ensemble I dans lui-même, et si n est un entier positif, on désignera par f^n l'application composée n fois, et par fi l'image de tout élément i de I .

5.1. Soit (I , d , f , g) un quadruple constitué par un ensemble I ; soient un entier positif d , et deux applications f et g de I dans lui-même, qui

seront toujours supposées bijectives à partir de 5.2, et qui ont les propriétés suivantes :

$$f^d \neq f \quad \text{et} \quad gf = f^d g .$$

Alors, si l'application f est périodique, de période p, et si g est injective, les nombres p et d sont premiers entre eux.

En effet, soit e le plus grand commun diviseur de p et d. Ainsi, $p = qe$, $d = me$. Alors $gf^q = f^{qd} g = f^{pm} g = g$. Et l'injectivité de g implique $f^q = f$. Donc $q = p$, et $e = 1$.

Exemples.

5.1.1. Prenons pour I le corps $\underset{\sim}{Q}$ des nombres rationnels, et pour f et g les applications ainsi définies :

$$fi = i + 1 , \text{ pour tout } i \in I$$

$$gi = di \quad , \text{ pour tout } i \in I , (d \text{ entier positif}).$$

5.1.2. Soit p un nombre premier avec d. Prenons $I = \underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$, et pour f et g les applications définies par les mêmes relations que ci-dessus. Dans ce cas, l'application f est périodique, de période p.

5.2. Soient k un quelconque corps commutatif, et (I , d , f , g) un quelconque quadruple défini comme en 5.1. Soit $E = k(X_i)_{i \in I}$ l'extension transcendante pure de k avec une base de transcendance indexée par I. Soit S le k-automorphisme de E défini par la relation suivante.

5.2.1. $$S(X_i) = X_{fi} , \text{ pour tout } i \in I .$$

Soit $E[Y]_S$ l'anneau des polynômes S-tordus en Y, c'est-à-dire que :

5.2.2. $$xY = YS(x) , \text{ pour tout } x \in E .$$

Soit K le corps des fractions de l'anneau $E[Y]_S$. Alors, l'automorphisme S de E peut être prolongé à K par la relation suivante.

5.2.3. $$S(Y) = Y .$$

(Avec d'évidentes et minimes modifications dans la suite, on pourrait aussi prendre $S(Y) = -Y$.)

Le centre de K est égal au commutant de E. C'est E si f est non périodique, et c'est le sous-corps $E(Y^p)$ si f est périodique de période p. Par ailleurs, les relations

5.2.4. $$\sigma(Y) = Y^d \quad \text{et} \quad \sigma(X_i) = X_{gi} , \text{ pour tout } i \in I ,$$

et leurs prolongements canoniques à K par les relations

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b) , \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b) , \text{ pour tous } a , b \in K ,$$

sont compatibles avec la relation 5.2.2. En effet,

$\sigma(X_i\ Y) = \sigma(X_i)\ \sigma(Y) = X_{gi}\ Y^d = Y^d\ X_f\ d_{gi} = Y^d\ X_{gfi} = \sigma(Y)\ \sigma(X_{fi}) = \sigma(YS(X_i))$.

L'application σ ainsi définie est un endomorphisme de K, et il est clair que $\sigma(K)$ est le corps des fractions du sous-anneau $E[Y^d]_{S^d}$ de K. Pour base à droite de K sur $\sigma(K)$, nous prendrons $\mathcal{B}_1 = \{1, Y, Y^2, \ldots, Y^{d-1}\}$ (c'est d'ailleurs aussi une base à gauche, de sorte que $[K : \sigma(K)]_r = [K : \sigma(K)]_\ell = d$). C'est à partir de cette base $\mathcal{B}_1$ qu'on définit les bases $\mathcal{B}_n$, $n > 1$. Donc, tout élément de $\mathcal{B}_n$, $n \geq 1$, est une puissance de Y. Or on remarque immédiatement que, pour tout $n \geq 1$, $\sigma^n(K)\ X = X\sigma^n(K)$, et par suite $\sigma^n(K)\ X^m = X^m\ \sigma^n(K)$, pour tout entier m. Donc la condition 4.3.1 est vérifiée.

Ainsi, pour tout couple (K, σ) défini comme ci-dessus, l'anneau $A = K[X]_\sigma^h$ est isomorphe à l'anneau $\mathrm{End}(F_A)$, qui est son dual à droite car l'anneau A possède la forte dualité à droite (Cf. [13]).

6. Autre cas avec corps résiduel non commutatif.

6.1. PROPOSITION. - *Soient K un corps, et σ un endomorphisme de K tel que $[K : \sigma(K)]_r = [K : \sigma(K)]_\ell = 2$. Alors l'anneau $K[X]_\sigma^2$ est auto-dual.*

Bien qu'il s'agisse d'un cas assez singulier, nous avons tenu à le traiter, car il donne un exemple où l'on peut calculer le dual même si l'hypothèse 4.3.1 n'est pas vérifiée.

Preuve de la proposition. Soit e un quelconque élément de K n'appartenant pas à $\sigma(K)$. Alors, les éléments 1, e, constituent une base de K comme $\sigma(K)$-espace vectoriel à gauche [resp. à droite]. On sait (Cf. P. M. COHN [2], p. 532) qu'il existe des endomorphismes, R_e, S_e, de $\sigma(K)$, et des applications D, D', de $\sigma(K)$ dans lui-même, tels que :

$$\alpha e = D(\alpha) + eS_e(\alpha) \quad \text{, pour tout } \alpha \in \sigma(K) \text{ ,}$$

$$e\alpha = D'(\alpha) + R(\alpha)\ e \quad \text{, pour tout } \alpha \in \sigma(K) \text{ .}$$

De plus, si $\alpha = S(\beta)$, où $\beta \in \sigma(K)$, alors $e\alpha = eS(\beta) = -D(\beta) + \beta e$. Puisque S est une injection, on peut noter $\beta = S^{-1}(\alpha)$. Alors,

$$e\alpha = -DS^{-1}(\alpha) + S^{-1}(\alpha)\ e \quad \text{, pour tout } \alpha \in S\sigma(K) \text{ ,}$$

$$= D'(\alpha) + R(\alpha)\ e \quad \text{, pour tout } \alpha \in S\sigma(K) \text{ .}$$

Ainsi $R(\alpha) = S^{-1}(\alpha)$, pour tout $\alpha \in S\sigma(K)$. Donc $RS\sigma(K) = S^{-1}\ S\sigma(K) = \sigma(K)$. Ainsi R est une surjection, donc en fin de compte un automorphisme de $\sigma(K)$. De même pour S, et $R = S^{-1}$.

Ceci vu, nous désignons par A l'anneau $K[X]_\sigma^2$, et nous définissons comme en section 4, un module $F_A = A_A/J$, mais, comme seule différence, on prend cette fois $J = \sigma(K)\ X$ (au lieu de $e\sigma(K)\ X$). Les notations q, B, de la section 4 sont conservées ici, et on définit de même l'application Φ de K dans B par la relation

$$\Phi(\alpha)\ q(a) = q(\sigma(\alpha)\ a) \text{ ,} \qquad \alpha \in K \text{ ,} \quad a \in A \text{ .}$$

Cette définition est cohérente, car $\sigma(\alpha)\, J \subset J$, pour tout $\alpha \quad K$. Comme en section 4, on peut vérifier que Φ est un morphisme d'anneaux et que le sous-corps $\Phi(K)$ de B , qu'on notera D , est un corps de représentants du corps résiduel de B .

Soit Y l'élément de B défini par la relation

$$Yq(\alpha) = q(eXa) , \qquad a \in A .$$

Il est clair que Y n'est pas inversible dans B , donc $Y \in \mathrm{Rad}(B)$, et $Y \notin \mathrm{Rad}(B)^2 = \{0\}$. Donc Y est une uniformisante de B .

Comme en section 4, on va caractériser l'automorphisme τ de D tel que

$$Y\beta = \tau(\beta)\, Y , \text{ pour tout } \beta \in D .$$

On sait que

$$Y\beta q(1) = Y\Phi(\alpha)\, q(1) = q(eX\sigma(\alpha)) = q(e\sigma^2(\alpha)\, X) ,$$

et

$$\beta Yq(1) = \Phi(\alpha)\, Yq(1) = q(\sigma(\alpha)\, eX) = q(eS\sigma(\alpha)\, X) .$$

Donc

$$\Phi(\sigma^{-1} S^{-1} \sigma^2(\alpha))\, Yq(1) = q(eS\sigma\sigma^{-1} S^{-1} \sigma^2(\alpha)\, X) = q(e\sigma^2(\alpha)\, X) = Y\Phi(\alpha)\, q(1) = \tau\Phi(\alpha)\, Yq(1) .$$

Donc $\tau\Phi(\alpha) = \Phi\sigma^{-1} S^{-1} \sigma^2(\alpha)$, et ceci pour tout $\alpha \in K$. Ainsi,

$$\tau\Phi = \Phi\sigma^{-1} S^{-1} \sigma^2 = \Phi\sigma^{-1} R\sigma^2 = \Phi\rho\sigma ,$$

en notant $\sigma^{-1} R\sigma = \rho$, qui est un automorphisme de K .

Donc $B \simeq D[X]_\tau^2 \simeq K[X]_{\rho\sigma}^2 \simeq K[X]_\sigma^2$, d'après [14]. Cela achève la preuve de la proposition.

7. Anneau avec dual à gauche et sans dual à droite.

Il est connu (Cf. COHN [3]), qu'il existe des extensions de corps $K \supset k$ telles que $[K : k]_r = +\infty$ et $[K : k]_\ell = n \in \underset{\sim}{N}$. On en déduit aisément des anneaux artiniens à gauche ayant une dualité à gauche et non à droite. Sur le groupe additif $A = K \times k \times K$ on définit une structure d'anneau par la multiplication

$$(\alpha,\beta,x)(\alpha',\beta',x') = (\alpha\alpha',\beta\beta',\alpha x'+x\beta') , \quad \alpha,\alpha' \in K , \quad \beta,\beta' \in k , \quad x,x' \in K .$$

Alors on vérifie que $[{}_AA] = 3$, $[A_A] = 2 + [K : k]_r = +\infty$, et, si on désigne par ${}_AC$ le cogénérateur minimal de la catégorie ${}_A\mathrm{Mod}$, $[{}_AC] = 2 + [K:k]_\ell = 2+n$ (Cf. première partie). Ainsi, d'après le théorème 0.3 (Cf. introduction), l'anneau A , artinien à gauche mais non à droite, possède un dual à gauche et pas de dual à droite. Cela contredit l'assertion du théorème 3 de [10] suivant laquelle tout anneau parfait à gauche ou à droite, ayant une dualité à gauche est artinien à gauche et à droite.

Problème ouvert. Existe-t-il un anneau artinien à gauche et à droite, ayant la forte dualité à gauche et non auto-dual ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (G.). - A duality theory for injective modules, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 249-278.

[2] COHN (P. M.). - Quadratic extensions of skew fields, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 11, 1961, p. 531-556.

[3] COHN (P. M.). - On a class of binomial extensions, Illinois J. of Math., t. 10, 1966, p. 418-424.

[4] DLAB (V.) and RINGEL (C. M.). - A class of balanced non-uniserial rings, Math. Annalen, t. 195, 1972, p. 279-291.

[5] DLAB (V.) and RINGEL (C. M.). - Balanced rings, "Lectures on rings and modules", p. 73-143. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 246 ; Tulane University Ring and Operator Theory Year, Vol. 1).

[6] DLAB (V.) and RINGEL (C. M.). - Decomposition of modules over right uniserial rings, Math. Z. (à paraître).

[7] FULLER (K. R.). - On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. of Math., t. 29, 1969, p. 115-135.

[8] MORITA (K.). - Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, t. 6, 1958, p. 83-142.

[9] MÜLLER (B. J.). - Linear compactness and Morita duality, J. of Algebra, t. 16, 1970, p. 60-66.

[10] OSOFSKY (B.). - A generalization of quasi-Frobenius rings, J. of Algebra, t. 4, 1966, p. 373-387.

[11] ROSENBERG (A.) and ZELINSKY (D.). - Finiteness of the injective hull, Math. Z., t. 70, 1959, p. 372-380.

[12] ROUX (B.). - Anneaux artiniens et extensions d'anneaux semi-simples, J. of Algebra, t. 25, 1973, p. 295-306.

[13] ROUX (B.). - Modules sur les anneaux artiniens, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 577-580 ; t. 276, 1973, Série A, p. 13-16 et p. 171-174.

[14] ROUX (B.). - Sur la classification des anneaux d'Asano (à paraître).

[15] ROUX (B.). - Sur les anneaux de Köthe (à paraître).

Bernard ROUX
Université du Languedoc
Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX