

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

YVES MATRAS

T-opérateurs sur un groupoïde

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 6, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A6_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

T-OPÉRATEURS SUR UN GROUPOÏDE

Yves MATRAS

Γ étant un groupoïde multiplicatif, nous appellerons transformation de Γ une application de Γ dans lui-même. L'ensemble des transformations de Γ sera noté $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Définition. - Un élément f de $\mathcal{A}(\Gamma)$ vérifiant

$$f(xf(y)) = f(x) f(y) \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \Gamma$$

sera appelé T-opérateur à gauche sur Γ , et leur ensemble sera désigné par T .

Exemples.

(a) Toute translation à gauche de Γ (c'est-à-dire toute transformation f de Γ telle que $f(xy) = f(x) y$ pour tout x et tout y de Γ) est un élément de T .

(b) Si $a \in \Gamma$, la transformation μ_a de Γ (définie par $\mu_a(x) = a$ pour tout x de Γ) est dans T si, et seulement si, $a = a^2$.

(c) Soient $A \subseteq \Gamma$ et $u \in \Gamma$ tels que $xa = u$ pour tout x de Γ et tout a de A . Toute transformation f de Γ , vérifiant $f(u) = u$ et $f(\Gamma) \subseteq A$, est un élément de T .

1. Composition des T-opérateurs et T_g -familles.

En général T n'est qu'un groupoïde partiel : le composé de deux éléments de T peut ne pas être dans T . On a cependant toujours le résultat suivant.

PROPOSITION. - Soient f et g dans T , et λ une translation à gauche de Γ .
Alors :

(i) $f \circ \lambda \in T$.

(ii) $f \circ g = g \circ f$ implique $f \circ g \in T$.

(iii) Si $f(\Gamma)$ est contenu dans $g(\Gamma)$, on a

$$g(xf(y)) = g(x) f(y) \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \Gamma ;$$

de plus, $f \circ g \in T$.

Définition. - Une famille $\{f_u\}_{u \in U}$ d'éléments de T sera appelée T_g -famille sur Γ si $f_u(xf_v(y)) = f_u(x) f_v(y)$ pour tout x et pour tout y de Γ , tout u et tout v de U . Si les f_u sont deux à deux distincts, on parlera de T_g -ensemble sur Γ .

Une condition suffisante pour que $\{f_u\}_{u \in U}$ soit une T_g -famille sur Γ est que $f_u(\Gamma) = f_v(\Gamma)$ pour tout u et tout v de U .

La propriété d'être une T_g -famille est conservée par isomorphisme : soit ζ un isomorphisme d'un groupoïde Γ sur un groupoïde Γ' , et $\{f_u\}_{u \in U}$ une T_g -famille sur Γ . Alors $\{\zeta \circ f_u \circ \zeta^{-1}\}_{u \in U}$ est une T_g -famille sur Γ' . L'étude du groupoïde partiel T peut être facilitée par les résultats suivants.

THÉORÈME.

- (i) La famille des T_g -ensembles sur Γ est U -inductive.
- (ii) Tout élément de T est contenu dans un T_g -ensemble maximal sur Γ .
- (iii) Le sous-demi-groupe de $\mathcal{A}(\Gamma)$, engendré par un T_g -ensemble sur Γ , est un T_g -ensemble sur Γ .
- (iv) Un T_g -ensemble maximal sur Γ est un sous-demi-groupe du groupoïde partiel T .

2. Comportement des T -opérateurs à gauche vis-à-vis des éléments zéro.

Soit f un élément de T , et soit z un zéro à gauche de Γ . Alors $f(z)$ est un idempotent de Γ , et $f(\Gamma)$ est contenu dans $\{x \in \Gamma; f(z)x = f(z)\}$. Supposons de plus que z soit un zéro bilatère, et notons-le 0 . Alors,

$$(f(0) \neq 0) \Rightarrow (0 \notin f(\Gamma)).$$

D'autre part, $A = \{f_u\}_{u \in U}$ étant une T_g -famille sur Γ , on a $f_u(0) \neq 0$ pour tout u de U , ou bien $f_u(0) = 0$ pour tout u de U . Dans ce dernier cas, $A \cup \{\mu_0\}$ est une T_g -famille sur Γ et, par suite, tout T_g -ensemble maximal sur Γ , contenant un élément qui laisse fixe 0 , contient μ_0 .

3. Cas d'un zéro bilatère adjoint extérieurement.

Soit Γ un groupoïde sans zéro bilatère. Posons $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\}$, et considérons un élément $\bar{f}$ de $\bar{T}$ ($\bar{T}$ étant l'ensemble des T -opérateurs à gauche sur $\bar{\Gamma}$). On peut parler de la restriction f de $\bar{f}$ à Γ si, et seulement si, $\bar{f}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Ceci se produit uniquement dans deux cas.

Premièrement, si $\bar{f}(0) \neq 0$, et dans ce cas $f \in T$. La réciproque n'est pas vraie en général : on ne peut pas toujours prolonger à $\bar{\Gamma}$ un élément f de T de façon que l'image de 0 ne soit pas 0 . Cependant on peut énoncer :

Si $f \in T$ et si e est un élément neutre à droite de Γ vérifiant

$$f(\Gamma) \subseteq \{x \in \Gamma; ex = e\},$$

la transformation $\bar{f}$ de $\bar{\Gamma}$, définie par

$$\bar{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in \Gamma \text{ et } \bar{f}(0) = e,$$

est dans $\bar{T}$.

Deuxièmement, une transformation $\bar{f}$ de $\bar{\Gamma}$ sera dite restrictible si

$$(\bar{f}(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$$

Alors un élément f de $\mathcal{A}(\Gamma)$ est un T -opérateur [resp. une translation] à gauche sur Γ si, et seulement si, il est la restriction à Γ d'un T -opérateur [resp. une translation] à gauche restrictible sur $\bar{\Gamma}$.

4. Une configuration particulière.

Considérons le problème suivant : soit à caractériser les éléments de $\bar{T}$, ensemble des T -opérateurs à gauche sur le quotient $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Delta$ d'un groupoïde Γ par un idéal premier Δ de Γ . Nous allons définir un certain type de transformation de Γ qu'il sera nécessaire et suffisant de caractériser pour résoudre le problème.

Notons $\bar{x}$ la classe modulo Δ d'un élément x de Γ . Si $x \notin \Delta$, on a $\bar{x} = \{x\}$. Si $x \in \Delta$, on a $\bar{x} = \Delta$ (considéré comme l'élément zéro de $\bar{\Gamma}$, Δ sera noté 0). On dira qu'un élément f de $\mathcal{A}(\Gamma)$ est réductible par Δ si $\bar{x} = \bar{y}$ implique $\overline{f(x)} = \overline{f(y)}$, auquel cas on peut définir un élément $\bar{f}$ de $\mathcal{A}(\bar{\Gamma})$ par $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$. On appellera $\bar{f}$ la réduction de f par Δ . L'ensemble des éléments de $\mathcal{A}(\Gamma)$ réductibles par Δ est

$$\mathcal{A}_{\Delta}(\Gamma) \cup \left(\bigcup_{a \in \Gamma \setminus \Delta} \mathcal{A}_a(\Gamma) \right) = \mathcal{R}_{\Delta}(\Gamma),$$

où $\mathcal{A}_{\Delta}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{A}(\Gamma) ; f(\Delta) \subseteq \Delta\}$ et $\mathcal{A}_a(\Gamma) = \{f \in \mathcal{A}(\Gamma) ; f(\Delta) = \{a\}\}$.

Notons que deux éléments f et g de $\mathcal{R}_{\Delta}(\Gamma)$ ont même réduction par Δ si, et seulement si, $\Delta_f = \Delta_g$, avec $\Delta_f = \{x \in \Gamma ; f(x) \in \Delta\}$. T_{Δ} désignera l'ensemble des éléments f de $\mathcal{A}_{\Delta}(\Gamma)$ vérifiant les conditions :

$$(M1) \quad \Delta_f f(\Gamma \setminus \Delta_f) \subseteq \Delta_f, \text{ et}$$

$$(M2) \quad f(xf(y)) = f(x)f(y) \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \Gamma \setminus \Delta_f.$$

THÉORÈME. - Un élément f de $\mathcal{A}(\bar{\Gamma})$ qui laisse le zéro fixe est dans $\bar{T}$ si, et seulement si, f est la réduction par Δ d'un élément de T_{Δ} .

Cas particulier des translations. - Soit T'_{Δ} l'ensemble des éléments f de T_{Δ} vérifiant les conditions :

$$(T1) \quad \Delta_f \text{ est un idéal à droite de } \Gamma, \text{ et}$$

$$(T2) \quad f(xy) = f(x)y \text{ pour tout } x \text{ de } \Delta_f \text{ et tout } y \notin \Delta.$$

Alors un élément λ de $\mathcal{A}(\bar{\Gamma})$ est une translation à gauche de $\bar{\Gamma}$ si, et seulement si, λ est la réduction par Δ d'un élément de T'_{Δ} .

5. Structure de l'ensemble des T -opérateurs sur un groupe et sur un groupe avec zéro.

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e . Soit $\bar{G}$ le groupe avec zéro construit sur G : $\bar{G} = G \cup \{0\}$. L'ensemble des T -opérateurs à gauche sur G (resp. $\bar{G}$) sera désigné par T (resp. $\bar{T}$).

Dans [1], nous avons caractérisé les éléments de T et $\bar{T}$; rappelons ce résultat.

Définition. -- Un système à gauche sur $\bar{G}$ (resp. G) est un couple (F, I) , où F est un sous-groupe de G et I un ensemble non vide et non redondant (resp. non vide, non redondant et complet) de représentants des classes à gauche modulo F . L'associée de (F, I) est la transformation f de G (resp. $\bar{G}$), définie par $f(x) = i^{-1}x$ avec $i \in I$ et $iF = xF$ (resp. $f(x) = i^{-1}x$ s'il existe i dans I tel que $iF = xF$, et $f(x) = 0$ sinon). Un système à gauche sur G (resp. $\bar{G}$), différent de (F, I) , ne peut avoir f comme associée. F sera le but de f , I sera le coeur de f , et l'élément de I qui se trouve dans F sera appelé, lorsqu'il existe, pointe de f .

THÉOREME.

(i) Une transformation f de G est dans T si, et seulement si, elle est l'associée d'un système à gauche sur G .

(ii) μ_0 et μ_e sont dans $\bar{T}$.

(iii) Une transformation f de $\bar{G}$, différente de μ_0 et de μ_e , est dans $\bar{T}$ si, et seulement si, elle est l'associée d'un système à gauche sur $\bar{G}$.

(a) Structure du groupoïde partiel $\bar{T}$.

Nous poserons $\Sigma = \bar{T} \setminus \{\mu_e, \mu_0\}$. F étant un sous-groupe de G , Σ_F représentera l'ensemble des éléments de Σ ayant F pour but. Le théorème suivant fournit une première décomposition de $\bar{T}$.

THÉOREME 1.

(i) $\{\mu_e\}$ est un T_g -ensemble maximal sur $\bar{G}$.

(ii) Mis à part $\{\mu_e\}$, les T_g -ensembles maximaux sur $\bar{G}$ sont, et ne sont que les $\Sigma_F \cup \{\mu_0\}$. Les Σ_F sont deux à deux disjoints, et leur union, lorsque F parcourt la famille des sous-groupes de G , est Σ .

Choisissons un sous-groupe F de G , et étudions Σ_F .

Puisque $\Sigma_F \cup \{\mu_0\}$ est un T_g -ensemble maximal sur $\bar{G}$, c'est un sous-demi-groupe du groupoïde partiel $\bar{T}$. Il est clair que μ_0 est le zéro de ce demi-groupe. Appelons Φ_F l'ensemble des éléments de Σ_F n'ayant pas de pointe. Posons $\Psi_F = \Sigma_F \setminus \Phi_F$. Si $\sigma \in \Sigma$, on désignera par I_σ le coeur de σ , et Z_σ représentera $\sigma^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Si $x \in G \setminus Z_\sigma$, on dénotera par x_σ l'unique élément de $I_\sigma \cap xF$. En particulier e_σ sera la pointe de σ , si elle existe.

THÉOREME 2. -- Soient $\sigma \in \Sigma_F$, $\varphi \in \Phi_F$, $\psi \in \Psi_F$. Alors :

(i) $\varphi \circ \sigma = \mu_0$; $Z_{\psi \circ \sigma} = Z_\sigma$; $I_{\psi \circ \sigma} = I_\sigma \cup e_\psi$.

(ii) ψ est idempotent si, et seulement si, $e_\psi = e$.

(iii) $\psi \circ \Phi_F = \Phi_F$; $\psi \circ \Psi_F = \Psi_F$.

THÉOREME 3. - L'ensemble Π_F des idempotents de Ψ_F est un zéro demi-groupe à droite, et Ψ_F est un groupe droit isomorphe à $\Pi_F \times F$.

L'isomorphisme intéressant est en fait celui qui transforme $\Psi_F \circ \psi$ en F (avec $\psi \in \Pi_F$). Il est défini par

$$(\psi' \circ \psi \in \Psi_F \circ \psi) \mapsto (e_{\psi'}^{-1} \in F).$$

Remarque. - Considérons l'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur Ψ_F par $\psi \mathcal{R} \psi'$ si, et seulement si, $Z_\psi = Z_{\psi'}$. Soit π un idempotent de Ψ_F . Alors, d'après le théorème 2(i), $\Psi_F \circ \pi$ ne peut être à cheval sur deux classes modulo $\mathcal{R}$. Chacune de ces classes est donc un groupe droit dont les sous-groupes maximaux sont isomorphes à F . C'est le cas, en particulier, pour la classe formée de tous les éléments restrictibles (Cf. [1]) de Ψ_F , classe que nous noterons $\Psi_{F,r}$.

THÉOREME 4. - Soit $\gamma \in \overline{T}$ et $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Alors :

- (i) $\mu_0 \circ \gamma = \mu_0$.
- (ii) $\gamma \circ \mu_0 = \mu_0$ si $\gamma \neq \mu_e$.
- (iii) $\mu_e \circ \gamma = \mu_e$.
- (iv) $\gamma \circ \mu_e \in \overline{T}$ si, et seulement si, $\gamma \in \Pi_F$ et, dans ce cas, $\gamma \circ \mu_e = \mu_e$.
- (v) $\sigma \circ \sigma' \neq \mu_e$.
- (vi) $\sigma \circ \sigma' = \mu_0$ si, et seulement si, $F_{\sigma'} \subseteq Z_\sigma$ et, dans ce cas, σ n'a pas de pointe ($F_{\sigma'}$ représente le but de σ').
- (vii) Soient $\psi \in \Psi_F$ et $\sigma \in \Sigma_T$, avec $H \subseteq F$. Alors, si $e_\psi \notin H$, on a $\psi \circ \sigma \notin \overline{T}$; si $e_\psi \in H$, on a

$$\psi \circ \sigma \in \overline{T} \text{ avec } Z_{\psi \circ \sigma} = Z_\sigma \text{ et } I_{\psi \circ \sigma} = I_\sigma e_\psi.$$

(b) Structure du groupoïde partiel T .

Toutes les notations précédentes sont conservées excepté que, dans ce qui suit, μ_e désignera la transformation de G qui applique tout élément de G sur e .

THÉOREME 5. - Les T_G -ensembles maximaux sur G sont, et ne sont que les ensembles $E_F = \{\sigma \in T : \bar{\sigma}(G) = F\}$ lorsque F parcourt la famille des sous-groupes de G . Ces E_F sont deux à deux disjoints et recouvrent T .

Remarquons que $E_{\{e\}} = \{\mu_e\}$ et que E_G coïncide avec l'ensemble des translations à gauche de G .

Tout élément σ de T est la restriction à G d'un élément restrictible $\bar{\sigma}$ de Σ , et l'application $\bar{\sigma} \mapsto \sigma$ est un isomorphisme de groupoïdes partiels de Ψ sur T , où Ψ est l'ensemble des éléments restrictibles de Σ . En particulier, E_F est l'image isomorphe de $\Psi_{F,r}$: c'est un groupe droit isomorphe à $\Theta_F \times F$, où Θ_F représente l'ensemble des éléments de E_F qui ont e pour pointe. De la même

manière que pour $\bar{G}$, on montre que :

- (i) $\mu_e \circ \gamma = \mu_e$ pour tout γ de T .
- (ii) $\gamma \circ \mu_e \in T$ si, et seulement si, γ est idempotent et, dans ce cas, on a $\gamma \circ \mu_e = \mu_e$.

Les idempotents de T sont caractérisés par une pointe égale à e . Enfin, si ξ et ξ' sont dans E_F , on a $I_{\xi \circ \xi'} = I_{\xi'} \circ \xi$.

Nous allons maintenant compléter l'étude de la structure de T en énonçant une condition nécessaire et suffisante pour que le composé de deux éléments de T soit dans T .

Soient α et β dans T , respectivement associées aux systèmes à gauche (F, I) et (H, J) sur G . Soit E_F la réunion des classes à gauche modulo F qui coupent H . Posons

$$I_H = I \cap E_F \text{ et } I_H^0 = I \cap H.$$

Pour un élément donné x de G , nous noterons j_x l'unique élément de $J \cap xH$, et i^x l'unique élément de $I \cap (j_x^{-1}x)F$. Enfin nous noterons π l'équivalence sur G , définie par $x \pi y$ si, et seulement si, $j_x i^x = j_y i^y$. On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉOREME 6. - $\alpha \circ \beta \in T$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

- (1) π est régulière à gauche.
- (2) $J I_H = J I_H^0$.

Lorsque c'est le cas, le système à gauche sur G , dont $\alpha \circ \beta$ est l'associée, est $(\pi(e), J I_H)$, où $\pi(e)$ est la classe de e modulo π .

Cas particuliers.

- (1) Si $I_H = I_H^0$, $\alpha \circ \beta$ est un élément de T associé à $(H \cap F, J I_H)$. La réciproque est d'ailleurs vraie : si $\alpha \circ \beta \in T$ avec $\alpha \circ \beta(G) = H \cap F$, alors on a $I_H = I_H^0$.
- (2) Si $F \subseteq H$, alors $\alpha \circ \beta \in T$, et est associée à $(F, J I_H)$.
- (3) Si $I_H^0 = \emptyset$, $\alpha \circ \beta$ n'est pas dans T .
- (4) Si $H \subseteq F$ et $e_\alpha \notin H$, alors $\alpha \circ \beta$ n'est pas dans T .
- (5) Si $H \subseteq F$ et $e_\alpha \in H$, alors $\alpha \circ \beta$ est dans T , et est associée à $(H, J e_\alpha)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MATRAS (Y.). - Sur l'équation fonctionnelle $f(xf(y)) = f(x) f(y)$, Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci., Série 5, t. 55, 1959, p. 737-751.

Yves MATRAS

La Galerie

100, 50 rue de la Chapelle