

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

DANIELLE SALLES

Anneaux semi-artiniens non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX SEMI-ARTINIENS NON COMMUTATIFS

par Danielle SALLES

Les anneaux sont toujours unitaires, les modules sont des modules à gauche, unitaires.

Les anneaux semi-artiniens ont été introduits par C. NASTACESCU et N. POPESCU [3].

1. Définitions.

Socle d'un module. - Soient A un anneau, M un A -module non nul ; on appelle socle de M ($S(M)$) la somme de tous les sous-modules simples de M . C'est en particulier une somme directe partielle de sous-modules simples de M .

Anneau semi-artinien. - Un anneau A est semi-artinien (à gauche) si tout A -module non nul contient au moins un A -module simple.

Extension essentielle. - Un module M est extension essentielle d'un sous-module N si tout sous-module N' non nul de M est tel que $N \cap N' \neq \{0\}$.

2. Anneaux semi-artiniens commutatifs.

THÉOREME. - Soit A un anneau commutatif unitaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° Tout A -module est extension essentielle de son socle,
- 2° Tout idéal premier de A est maximal, et pour tout A -module cyclique
 $M : \{ \text{Ann } y \mid y \in M \}$ admet un élément maximal,
- 3° Tout A -module cyclique non nul contient au moins un A -module simple (i. e. A est semi-artinien),
- 4° Tout anneau quotient de A contient au moins un idéal minimal,
- 5° Tout A -module injectif est enveloppe injective d'une somme directe de A -modules simples.

La propriété 2° n'est pas généralisable au cas où A n'est pas commutatif. Nous nous proposons de donner un cas où plusieurs propriétés des anneaux semi-artiniens commutatifs se généralisent aux non commutatifs.

DÉFINITIONS.

Duo-anneau (ou two-sided ring). - On dit qu'un anneau A unitaire est un duo-anneau si tout idéal à gauche de A est bilatère, et si tout idéal à droite de A est bilatère. Ces anneaux ont été étudiés par G. THIERRIN [6].

Quasi-duo-anneau. - Nous dirons que A est un quasi-duo-anneau si tout idéal à gauche maximal de A est bilatère, et si tout idéal à droite maximal de A est bilatère.

Les propriétés suivantes, vérifiées par les anneaux semi-artiniens commutatifs, sont généralisables aux quasi-duo-anneaux semi-artiniens.

PROPOSITION. - Soient A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, M un A -module à gauche, alors

$$\text{Ass } M \neq \emptyset \iff M \neq \{0\}.$$

Remarque. - Nous disons que l'idéal bilatère premier I est associé à M s'il existe $x \in M$ tel que $I = \text{Ann } x$.

Preuve. - Soit Ax un A -module simple inclus dans M , $\text{Ann } x$ est maximal, donc bilatère, donc premier.

PROPOSITION. - Soit A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, alors tout idéal P premier de A est maximal.

Preuve. - On munit A/P de sa structure de A -module à gauche cyclique. Ce dernier contient un A -module simple isomorphe au A -module $A/\mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un idéal à gauche maximal, donc bilatère. On montre que $P = \mathfrak{M}$.

PROPOSITION. - Soient A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, M un A -module co-irréductible, alors l'ensemble des anneaux des sous- A -modules non nuls de M admet un élément maximum qui est un idéal maximal.

Preuve. - Tout sous-module non nul M_1 de M contient un A -module simple Ay , et $\text{Ann } y$ est un idéal maximal, donc bilatère, donc égal à $\text{Ann } Ay$. Si M_2 est un autre sous-module non nul de M , contenant le A -module simple Az , on a

$$\text{Ann } Ay = \text{Ann } Az,$$

car M est co-irréductible.

DÉFINITION. - Un anneau A est un V -anneau à gauche si tout A -module à gauche simple est injectif.

PROPOSITION. - Soit A un V -anneau à gauche et à droite, quasi-duo-anneau : c'est un duo-anneau.

Preuve. - On utilise une propriété, obtenue par C. NASTACESCU : un anneau est un V -anneau, à gauche si, et seulement si, tout idéal à gauche est intersection d'idéaux à gauche maximaux.

PROPOSITION. - Soit A un V -anneau à gauche et à droite quasi-duo-anneau semi-artinien à gauche, alors, pour tout idéal à gauche R et tout idéal à droite L

de A , on a $R \cap L = RL$.

Preuve. - A est un duo-anneau. D'après un résultat de NASTACESCU : un V -anneau semi-artinien est régulier. A est donc un duo-anneau régulier, et vérifie la propriété (critère de régularité d'un anneau de Kovacs).

Exemple de duo-anneau régulier semi-artinien : une somme directe finie de corps gauches.

3. Anneaux semi-artiniens non commutatifs.

Nous nous proposons maintenant de caractériser les anneaux semi-artiniens non commutatifs sans hypothèses complémentaires.

DÉFINITIONS.

Système localisant F d'idéaux à gauche d'un anneau A . - Soit F un ensemble d'idéaux à gauche de A , on dit que c'est un système localisant s'il vérifie les axiomes :

- (1) $F \neq \emptyset$,
- (2) $(b \in F \text{ et } b' \supset b)$ entraîne $b' \in F$,
- (3) $(b \in F \text{ et } b' \in F)$ entraîne $b \cap b' \in F$,
- (4) $b \in F$ entraîne, $\forall x \in A$, $b : x \in F$,
- (5) $(b \in F \text{ et, } \forall x \in b, b' : x \in F)$ entraîne $b' \in F$.

Objet F -fermé. - Soient X un objet de $\text{Mod } A$, F un système localisant d'idéaux à gauche de A ; on dit que X est F -fermé si, pour tout idéal α de F et tout morphisme f de α vers X , il existe un morphisme f^* de A vers X qui prolonge f .

Premier à gauche de A . - Soient F un système localisant de A , et $C(F)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod } A$ des objets F -fermés. On dit que F est un premier à gauche de A si $C(F)$ n'admet qu'un type d'objet simple dont l'enveloppe injective est un cogénérateur de $C(F)$.

Idéal de définition. - Soit α un idéal à gauche de A ; on pose

$$F_\alpha = \{b \in A \mid \text{Hom}(A/b, E(A/\alpha)) = 0\}.$$

N. POPESCU caractérise F_α (dans [4]) de la façon suivante :

$b \in F_\alpha$ si, et seulement si, $\forall x_1 \notin \alpha$, $\forall x_2 \in A$, il existe $y \in A$ tel que $yx_1 \notin \alpha$ et $yx_2 \in b$.

Cette caractérisation permet de montrer que F_α est un système localisant. On dit que α est un idéal de définition pour F (système localisant de A) si $F = F_\alpha$.

On pose, pour tout X objet de $\text{Mod } A$:

$$F(X) = \{b \in A \mid \text{Hom}(A/b, E(X)) = 0\}$$

c'est un système localisant.

THÉOREME. - Soit A un anneau unitaire, alors A est semi-artinien à gauche si,

- (a) Tout premier à gauche de A admet un idéal de définition maximal,
- (b) Tout injectif indécomposable Q de $\text{Mod } A$ est premier (i. e. $F(Q)$ est un premier à gauche),
- (c) Tout A -module à gauche est riche en co-irréductibles.

1° Condition nécessaire.

Définition. - On appelle $\mathfrak{F}$ la sous-catégorie pleine de $\text{mod } A$ dont les objets sont les A -modules à gauche X tels que $\forall x \in X, \text{Ann } x \in F$ (F système localisant), X est F -négligeable au sens de GABRIEL.

$\mathfrak{F}$ est localisante, il existe une catégorie quotient $\text{Mod } A/\mathfrak{F}$; on peut montrer que celle-ci est équivalente à $C(F)$.

LEMME. - Soient F un premier à gauche de A , et S_F le foncteur canonique : $C(F) \rightarrow \text{Mod } A$. $C(F)$ n'a qu'un type d'objet simple : U , alors $F = F(S_F(E(U)))$.

Preuve du lemme. - Soit $I \in F$, alors $A/I \in \mathfrak{F}$, et si T_F est le foncteur canonique $\text{Mod } A \rightarrow C(F)$, on a $T_F(A/I) = 0$. Le foncteur S_F est adjoint de T_F , donc

$$\text{Hom}_A(A/I, S_F(E(U))) \simeq \text{Hom}_{C(F)}(T_F(A/I), E(U)) = 0,$$

donc $I \in F(S_F(E(U)))$. Démonstration similaire lorsque $I \in F(S_F(E(U)))$, en remarquant que $E(U)$ est cogénérateur dans $C(F)$.

Preuve de (a). - D'après GABRIEL, $S_F(E(U))$ est un injectif indécomposable de $\text{Mod } A$, donc enveloppe injective d'un simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal à gauche maximal

$$F = F(S_F(E(U))) = F(E(A/\mathfrak{M})) = F_{\mathfrak{M}}.$$

Preuve de (b). - Q injectif indécomposable est enveloppe d'un simple $A/\mathfrak{M}$, donc

$$F(Q) = F(E(A/\mathfrak{M})) = F_{\mathfrak{M}}.$$

N. POPESCU a montré que $F_{\mathfrak{M}}$ est toujours un premier lorsque $\mathfrak{M}$ est maximal.

Preuve de (c). - C'est une propriété classique des semi-artiniens, tout A module simple étant un co-irréductible.

2° Condition suffisante.

Soit M un A -module, il contient au moins un co-irréductible N dont l'enve-

loppe injective Q est indécomposable. $F(Q)$ est premier par hypothèse, donc admet un idéal de définition maximal $\mathfrak{M}$. On a

$$F(Q) = F(A/\mathfrak{M}) = F_{\mathfrak{M}} = F(E(A/\mathfrak{M})) .$$

POPESCU a montré qu'alors $Q \simeq E(A/\mathfrak{M})$. On en déduit que M contient un A -module simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$. L'anneau A est semi-artinien à gauche.

Définition. - Soient A un anneau unitaire, et X un A -module à gauche ; on dit que X est co-primaire si $F(X)$ est un premier à gauche et si, pour tout sous-module propre X' de X , on a $F(X) = F(X')$.

PROPOSITION. - Soient A un anneau unitaire semi-artinien, et X un A -module, alors : X est co-primaire si, et seulement si, le socle de X est isotypique.

1° Condition nécessaire. -

$F(X)$ est premier, donc il existe un injectif indécomposable $Q (= S_{F(X)}(E(U)))$ tel que $F(X) = F(Q)$, A étant semi-artinien, on a $Q \simeq E(A/\mathfrak{M})$.

Soient $A/\mathfrak{M}'$ une composante du socle de X et $Q' = E(A/\mathfrak{M}')$, alors

$$Q' \cap X \neq \{0\} ,$$

donc

$$F(Q') \subset F(Q' \cap X) = F(X) = F(E(X)) \subset F(Q') ,$$

donc $F(Q') = F(X) = F(Q)$; on en déduit $Q \simeq Q'$.

2° Condition suffisante.

Soit S une composante simple du socle de X , on a $S \subset X$, donc $F(X) \subset F(S)$.

On montre que l'inclusion stricte est impossible car, si $a \in F(S)$, $a \notin F(X)$, tout morphisme non nul de A/a vers $E(X)$ induit un morphisme non nul de A/a vers $E(S')$. Donc

$$F(X) = F(S') = F(A/\mathfrak{M}) = F_{\mathfrak{M}} (= F(S))$$

ce qui montre que $F(X)$ est premier.

Soit S' une composante simple du socle d'un sous-module X' de X . On montre de même que $F(X') = F(S')$, or $F(S') = F(S)$ par hypothèse, car $S' \simeq S$, donc $F(X') = F(X)$.

Définition. - Soit A un anneau ; un idéal a à gauche de A est dit quasi primaire si F_a est un premier à gauche.

PROPOSITION. - Soient A un anneau semi-artinien, a un idéal de A , alors, pour que A/a soit co-primaire, il faut et il suffit que a soit co-primaire et qu'il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{M}$ tel que $F_a = F_{\mathfrak{M}}$.

1° Condition nécessaire.

F_a est premier, et A/a contient un simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$, donc $F_a = F_{\mathfrak{M}}$.

2° Condition suffisante.

Nous montrons que le socle de A/a est isotypique. En utilisant la construction des morphismes de $C(F_{\mathfrak{M}})$ de GABRIEL, on montre que $T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M})$ est un objet simple non nul dans $C(F_{\mathfrak{M}})$. Si $A/\mathfrak{M}'$ est une composante du socle de A/a , on a

$$T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M}) \simeq T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M}'),$$

car $C(F_{\mathfrak{M}})$ n'a qu'un type d'objet simple.

On utilise de nouveau la définition des morphismes de $C(F_{\mathfrak{M}})$ pour montrer que $A/\mathfrak{M} \simeq A/\mathfrak{M}'$, donc (socle (A/a)) est isotypique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math., Paris 1961).
- [2] KOVACS (Laszlo). - A note on regular rings, Publ. Math., Debrecen, t. 4, 1955, p. 465-468.
- [3] NASTACESCU (C.) et POPESCU (N.). - Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 357-368.
- [4] POPESCU (Nicolae). - Le spectre à gauche d'un anneau, J. of Algebra, t. 18, 1971, p. 213-228.
- [5] SALLES (Danielle). - Anneaux semi-artiniens non commutatifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 1223-1225.
- [6] THIERRIN (Gabriel). - On duo rings, Canad. math. Bull., t. 3, 1960, p. 167-172.

(Texte reçu le 12 mars 1973)

Danielle SALLES
10 rue Saint-Ursin
EPRON
14870 CAMBES EN PLAINE