

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIE-PAULE MALLIAVIN-BRAMERET

Majoration des caractéristiques d'Euler-Poincaré partielles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MAJORATION DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ PARTIELLES

par Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET

Tous les anneaux sont noethériens, commutatifs et unitaires. Tous les modules sont unitaires de type fini. La plupart des résultats de cet exposé ont été publiés en [5].

Nous utiliserons certains résultats de cohomologie locale que nous rappelons ici brièvement ([2] et [7]).

Soient A un anneau, M un A -module, et I un idéal de A ; on note

$$(0 : I)_M = \{m \in M, I.m = 0\}$$

et on pose

$$H_I^0(M) = \{m \in M, \exists N > 0, I^N.m = 0\} = \bigcup_k (0 : I^k)_M,$$

c'est un sous-module de M .

Si A est local et $I = \mathfrak{m}$, $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ est le plus grand sous-module de longueur finie de M .

Si $f : M \rightarrow N$ est un A -homomorphisme, $H_I^0(f)$ désigne la restriction de f à $H_I^0(M) \rightarrow H_I^0(N)$. Alors H_I^0 est un foncteur additif covariant A -linéaire de la catégorie des A -modules dans elle-même : il est appelé foncteur de cohomologie locale par rapport à l'idéal I .

Le foncteur H_I^0 est exact à gauche, i. e. si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de A -modules, on a :

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M') \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M'').$$

Donc, pour chaque i , les dérivés droits $R^i H_I^0$ de H_I^0 sont des foncteurs A -linéaires additifs covariants de la catégorie des A -modules dans elle-même, et $R^0 H_I^0 = H_I^0$. De plus, pour chaque n , les foncteurs $R^n H_I^0$ et $\varinjlim_k \text{Ext}_A^n(\frac{A}{I^k}, \cdot)$ sont naturellement équivalents, et les $R^n H_I^0$ commutent aux limites directes.

On note $H_I^i(M) = R^i H_I^0(M)$.

Si M est un A -module de dimension de Krull s , on a $H_I^i(M) = 0$ pour $i > s$, et si, de plus, $I = \mathfrak{m}$, idéal maximal de l'anneau local A , on a $H_{\mathfrak{m}}^s(M) \neq 0$ si $s = K - \dim M$; enfin, toujours dans ce cas, les modules $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ sont artiniens, et la profondeur de M (ou codimension) est le plus petit entier i pour lequel $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0$.

PROPOSITION 1. - Soit A un anneau local noetherien d'idéal maximal m . Soit $x_1, \dots, x_d$ une A -suite contenue dans m , et soit I l'idéal de A engendré par les x_i . Soit M un A -module de type fini. On suppose que $\text{Tor}_1^A(\frac{A}{I}, M)$ est de longueur finie. Alors $\text{Tor}_i^A(\frac{A}{I}, M)$ est, pour tout i , un A -module de longueur finie, et est nul pour i assez grand. Si on pose

$$\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I}, M) = \lg H_m^0(\frac{M}{IM}) - \chi_1^A(\frac{A}{I}, M),$$

où $H_m^0(\frac{M}{IM})$ désigne le plus grand sous-module de longueur finie de $\frac{M}{IM}$, on a $\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I}, M) \geq 0$. Enfin, on a $\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I}, M) = 0$ dans les deux cas suivants :

(a) $\lg \frac{M}{IM} < \infty$ et $\dim M < d$,

(b) $\text{codim } M \geq d + 1$ et $x_1, x_2, \dots, x_d$ est une M -suite.

Preuve. - D'après [3], on sait que $\text{Tor}_i^A(\frac{A}{I}, M)$ est de longueur finie pour $i \geq 1$, est nul pour $i \gg 0$, car $\text{dh}_A(A/I) < \infty$.

On procède ensuite par récurrence sur d . Si $d = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $d \geq 1$, et la positivité de $\tilde{\chi}_0^A((A/I), M)$ démontrée par une suite de longueur $\leq d - 1$. On a la suite spectrale, où l'on a posé $x = x_1$,

$$\text{Tor}_i^{A/xA}(\text{Tor}_j^A(\frac{A}{xA}, M), \frac{A}{I}) \Rightarrow \text{Tor}_{i+j}^A(M, \frac{A}{I}).$$

Il en résulte une suite exacte :

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_2^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) \rightarrow {}_x M \otimes \frac{A}{I} \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, \frac{A}{I}) \rightarrow \text{Tor}_1^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) \rightarrow 0,$$

où $\text{Tor}_1^A(A/xA, M) = \frac{M}{x} = \{m \in M, xm = 0\}$. On en déduit que

$$\lg[\text{Tor}_1^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I})] < \infty.$$

Donc que

$$\lg[\text{Tor}_i^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I})] < \infty;$$

d'où $\lg({}_x M \otimes \frac{A}{I}) < \infty$ et, par suite,

$$\lg \text{Tor}_i^{A/xA}(\frac{M}{x}, \frac{A}{I}) < \infty \text{ pour tout } i \geq 0.$$

De plus, on a

$$\chi_1^A(M, \frac{A}{I}) = \chi_1^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}({}_x M, \frac{A}{I}).$$

Mais comme $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{xM} \otimes_{A/xA} \frac{A}{I}$, on a :

$$\tilde{\chi}^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) - \chi_0^{A/xA}({}_x M, \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^A(M, \frac{A}{I}).$$

Soit r un entier tel que x ne soit pas diviseur de zéro dans $x^r M$. Posons $Q = (x^r M)/(x^{r+1} M)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow K_1 \rightarrow \frac{M}{xM} \rightarrow \frac{xM}{x^2 M} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow K_2 \rightarrow \frac{xM}{x^2 M} \rightarrow \frac{x^2 M}{x^3 M} \rightarrow 0 \\ &\dots \\ 0 &\rightarrow K_r \rightarrow \frac{x^{r-1} M}{x^r M} \rightarrow Q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$0 \rightarrow \frac{M}{x} \cap xM \rightarrow \frac{M}{x} \rightarrow K_1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \frac{M}{x} \cap x^2 M \rightarrow \frac{M}{x} \cap xM \rightarrow K_2 \rightarrow 0$$

...

Il en résulte que $\lg(K_i \otimes A/I) < \infty$ pour tout i , et que

$$\chi_0^{A/xA}(\frac{M}{x}, \frac{A}{I}) = \sum_{i=1}^r \chi_0^{A/xA}(K_i, \frac{A}{I}).$$

D'autre part, on a

$$\dots \rightarrow K_1 \otimes \frac{A}{I} \rightarrow \frac{M}{xM} \otimes \frac{A}{I} \rightarrow \frac{xM}{x^2 M} \otimes \frac{A}{I} \rightarrow 0.$$

Soit $U = \ker(\frac{M}{x} \otimes \frac{A}{I} \rightarrow \frac{xM}{x^2} \otimes \frac{A}{I})$. Alors U est de longueur finie comme quotient de $K_1 \otimes A/I$. Donc $H_m^0(U) = U$ et $H_m^1(U) = 0$.

Il résulte alors que

$$\lg U - \chi_0^{A/xA}(K_1, \frac{A}{I}) + \chi_1^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M}, \frac{A}{I}) - \chi_1^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) = 0.$$

Mais $0 \rightarrow U \rightarrow H_m^0(\frac{M}{xM} \otimes \frac{A}{I}) \rightarrow H_m^0(\frac{xM}{x^2 M} \otimes \frac{A}{I}) \rightarrow 0$, donc

$$- \chi_0^{A/xA}(K_1, \frac{A}{I}) + \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) - \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M}, \frac{A}{I}) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{M}{xM}, \frac{A}{I}) &= \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M}, \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}(K_1, \frac{A}{I}) = \dots \\ &= \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q, \frac{A}{I}) + \sum_{i=1}^r \chi_0^{A/xA}(K_i, \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q, \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}(\frac{M}{x}, \frac{A}{I}), \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\chi}_0^A(M, \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q, \frac{A}{I}),$$

et on conclut à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Supposons que :

(a) $\lg(M \otimes A/I) < \infty$ et $\dim M < d$, alors (cf. [3])

$$\tilde{\chi}_0^A(M, \frac{A}{I}) = \chi_0^A(M, \frac{A}{I}) = 0.$$

(b) Supposons que $\text{codim } M \geq d+1$ et que $x_1, \dots, x_d$ soient une M -suite, alors on sait que

$$\text{Tor}_i^A(\frac{A}{I}, M) = 0 \text{ pour } i \geq 1,$$

car les $\text{Tor}_i^A((A/I), M)$ sont les modules d'homologies du complexe de Koszul associé à la suite $x_1, \dots, x_d$ sur M , et ce complexe est acyclique sous les hypothèses présentes. Mais alors, on a [1]

$$\begin{aligned} \text{codim } M &= \text{codim } \frac{M}{IM} + \text{dh } \frac{A}{I} \\ &= \text{codim } \frac{M}{IM} + d \geq d+1 \end{aligned}$$

donc $\text{codim } M/(IM) \geq 1$. Donc $H_m^0(M/(IM)) = 0$. Par suite, $\tilde{\chi}_0^A(M, (A/I)) = 0$.

Lorsque M est extension d'un module de type (a) par un module de type (b), i. e. lorsque l'on a une suite exacte de la forme :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

où $\lg(M'/(IM')) < \infty$ et $\dim M' < d$, et où $\text{codim } M'' \geq d+1$ et $x_1, \dots, x_d$ est une M'' -suite, on a aussi

$$\tilde{\chi}_0^A\left(\frac{A}{I}, M\right) = 0.$$

On peut se demander si la réciproque est vraie ; elle l'est si $d \leq 1$

Preuve. - Si $d = 0$, c'est évident, puisque alors $\tilde{\chi}_0^A(A, M) = H_m^0(M) = 0$ entraîne soit $M = 0$, soit $\text{codim } M \geq 1$.

Si $d = 1$, on a la suite

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0, \quad \text{où } M_0 = H_m^0(M).$$

Alors

$$\tilde{\chi}_0^A\left(\frac{A}{xA}, M\right) = \chi_0^A\left(M_0, \frac{A}{xA}\right) + \tilde{\chi}_0^A(\overline{M}, \frac{A}{xA}) = 0,$$

d'où

$$\chi_0^A\left(M_0, \frac{A}{xA}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_0^A(\overline{M}, \frac{A}{xA}) = 0,$$

d'où $\dim M_0 \leq 0$ (ce qui n'est rien de plus que : M_0 est de longueur finie), et $\tilde{\chi}_0^A(\overline{M}, A/(xA)) = 0$ avec $\text{codim } \overline{M} \geq 1$. Donc on est ramené au cas où $\text{codim } M \geq 1$.

Montrons que $\chi_x^M = 0$; s'il n'en était pas ainsi, comme χ_x^M est de longueur finie, on aurait (cf. [1])

$$\text{codim } M = \text{dh } \frac{A}{xA} + \text{codim } \chi_x^M - 1 = 0,$$

ce qui n'est pas. Donc $\chi_x^M = 0$, et $\{x\}$ est une M -suite. De plus,

$$\text{codim } M = \text{codim } \frac{M}{xM} + \text{dh } \frac{A}{xA} = \text{codim } \frac{M}{xM} + 1.$$

Mais avec les notations de la proposition 1, on a $M/(xM) = Q$, avec

$$\tilde{\chi}_0^A\left(M, \frac{A}{xA}\right) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}\left(Q, \frac{A}{xA}\right) = H_m^0(Q) = 0,$$

donc $\text{codim } Q \geq 1$. D'où $\text{codim } M \geq 2$.

COROLLAIRE. - Soit A un anneau local noetherien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $I = Ax_1 + \dots + Ax_d$ un idéal engendré par une A -suite ; et soit M un A -module de type fini. Alors l'ensemble des idéaux premiers minimaux associés à $\text{Tor}_1^A\left(\frac{A}{I}, M\right)$ est contenu dans $\text{Ass}(M/(IM))$.

Preuve. - Par localisation, on se ramène au cas où $\text{Tor}_1^A((A/I), M)$ est de longueur finie non nulle. Donc $\{\mathfrak{m}\} = \text{Ass } \text{Tor}_1^A((A/I), M)$.

Comme $\text{Tor}_1^A((A/I), M) \neq 0$, on a $\chi_1^A((A/I), M) > 0$ (cf. [3]).

Donc $H_m^0(M/(IM)) > 0$. Donc

$$\text{codim } \frac{M}{IM} = 0 \quad \text{et} \quad m \in \text{Ass}(\frac{M}{IM}) .$$

Remarque. - On a donc les inclusions :

$$\text{Ass Tor}_1^A(\frac{A}{J}, M) \subset \text{Supp Tor}_1^A(\frac{A}{I}, M) \subseteq \text{Supp}(\frac{M}{IM}) ,$$

et les idéaux premiers associés minimaux à $\text{Tor}_1^A((A/I), M)$ sont contenus dans $\text{Ass}(M/(IM))$.

PROPOSITION 2. - Soit A un anneau local noetherien, Cohen-Macaulay, et d'idéal maximal m . Soit $x_1, \dots, x_d$ une A-suite contenue dans m , et soit I l'idéal engendré par les x_i . Soit M un A-module de type fini tel que

$$\text{Tor}_k^A(M, \frac{A}{I})$$

est de longueur finie pour un entier $k \geq 2$. Alors $\text{Tor}_i^A(M, (A/I))$ est de longueur finie pour tout $i \geq k$, et nul pour $i \gg 0$, et

$$\tilde{\chi}_{k-1}^A(\frac{A}{I}, M) = \lg H_m^0(\text{Tor}_{k-1}^A(\frac{A}{I}, M)) - \chi_2^A(\frac{A}{I}, M)$$

est positif.

Preuve. - On se ramène au cas où $k = 2$ à l'aide d'un module de syzygie convenable. Considérons une suite exacte

$$0 \rightarrow M' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0 ,$$

où L est libre. On a $\text{Tor}_1^A(M', (A/I)) = \text{Tor}_2^A(M, (A/I))$ de longueur finie. Donc

$$\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I}, M') = \lg H_m^0(\frac{M}{IM'}) - \chi_2^A(M, \frac{A}{I}) \geq 0$$

d'après la proposition 1.

D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, \frac{A}{I}) \rightarrow \frac{M'}{IM'} \rightarrow \frac{L}{IL} \rightarrow \frac{M}{IM} \rightarrow 0 .$$

Comme A est Macaulay, ou bien $H_m^0(L/(IL)) = 0$, ou bien I est m-premier.

Dans le premier cas, $H_m^0(\text{Tor}_1^A(M, (A/I))) \simeq H_m^0(M'/(IM'))$, donc

$$\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I}, M') = \tilde{\chi}_1^A(M, \frac{A}{I})$$

est positif.

Dans le second cas, $\lg L/(IL) < \infty$. Donc $\lg M/(IM) < \infty$, et

$$\chi_1^A(M, \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_1^A(M, \frac{A}{I}) .$$

est positif.

COROLLAIRE. - Avec les mêmes hypothèses sur A et I que dans la proposition 2, on a que les idéaux premiers associés minimaux de $\text{Tor}_k^A((A/I), M)$ sont associés à $\text{Tor}_{k-1}^A((A/I), M)$.

Remarque. - On peut se poser la question de savoir à quelle condition, sous les hypothèses de la proposition 2, on a $\tilde{\chi}_1^A((A/I), M) = 0$. Ici encore nous n'avons qu'une condition suffisante, à savoir, si $\text{codim } M \geq d$, alors $\tilde{\chi}_1^A((A/I), M) = 0$.

Preuve. - Si $x_1, \dots, x_d$ est une M -suite, alors $\text{Tor}_i^A((A/I), M) = 0$ pour $i \geq 1$. Donc $\tilde{\chi}_1^A((A/I), M) = 0$.

Supposons que $x_1, \dots, x_d$ ne soit pas une M -suite, mais que $\text{codim } M \geq d$. Alors, $\text{Tor}_1^A((A/I), M) \neq 0$ si $\text{codim}[\text{Tor}_1^A((A/I), M)] \geq 1$, et

$$\tilde{\chi}_1^A\left(\frac{A}{I}, M\right) = \tilde{\chi}_2^A\left(\frac{A}{I}, M\right)$$

est nul, puisque $\chi_2^A((A/I), M)$ est positif. Montrons que l'on ne peut avoir $\text{codim}[\text{Tor}_1^A((A/I), M)] = 0$; sinon on aurait (cf. [1])

$$\text{codim } M = \text{dh } \frac{A}{I} - q,$$

où q est le plus grand entier tel que $\text{Tor}_q^A\left(\frac{A}{I}, M\right) \neq 0$, et on a $q \geq 1$, donc $\text{codim } M \leq d - 1$ contre l'hypothèse. Par contre, on obtient le résultat.

THÉOREME 1. - Soit B un anneau local régulier complet et non ramifié. Soient M et N deux B -modules de type fini. Si $\text{Tor}_1^B(M, N)$ est de longueur finie, alors $\text{Tor}_i^B(M, N)$ est de longueur finie pour $i \geq 1$, et on a

$$\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \lg H_m^0(M \otimes_B N) - \chi_1^B(M, N)$$

est positif.

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses précédentes sur B , l'ensemble des idéaux premiers associés minimaux de $\text{Tor}_1^B(M, N)$ est contenu dans $\text{Ass}_B(M \otimes_B N)$.

Preuve. - On a, d'après les théorèmes de structure de Cohen,

$$B = R[[T_1, \dots, T_n]]$$

où R est un anneau de valuation discrète ou un corps, et où les T_i sont des indéterminées.

Soit $A = B \hat{\otimes}_K B$ [6]. On applique la suite spectrale [6]

$$\text{Tor}_p^A(B, \hat{\text{Tor}}_q^R(M, N)) \Rightarrow \text{Tor}_{p+q}^B(M, N)$$

qui, puisque la dimension de R est ≤ 1 , dégénère pour donner la suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_{j-1}^A(B, \hat{\text{Tor}}_1^R(M, N)) \rightarrow \text{Tor}_j^B(M, N) \rightarrow \text{Tor}_j^A(B, M \hat{\otimes}_R N) \\ \rightarrow \dots \rightarrow B \otimes_A \hat{\text{Tor}}_1^R(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(B, M \hat{\otimes}_R N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Puisque A et B sont réguliers, l'idéal I de A , définissant B , est engendré par une A -suite de longueur n .

Comme $\lg \text{Tor}_1^B(M, N) < \infty$, on a $\lg \text{Tor}_1^A(B, M \hat{\otimes}_R N) < \infty$. Donc

$$\lg \text{Tor}_2^A(B, M \otimes_R N) < \infty,$$

et par conséquent

$$\lg B \otimes_A \text{Tôr}_1^R(M, N) < \infty.$$

Donc :

$$\chi_1^B(M, N) = \chi_1^A(B, M \hat{\otimes}_R N) + \chi_0^A(B, \text{Tôr}_1^R(M, N)),$$

Donc

$$\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \tilde{\chi}_0^A(B, M \hat{\otimes}_R N) - \chi_0^A(B, \text{Tôr}_1^R(M, N)).$$

Si B est équicaractéristique, alors $\text{Tôr}_1^R(M, N) = 0$, puisque R est un corps. Donc $\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \tilde{\chi}_0^A(B, M \hat{\otimes}_R N) \geq 0$, d'après la proposition 1.

Si B est d'inégales caractéristiques, et si π , générateur de l'idéal maximal de R , ne divise pas zéro dans M ou N , alors $\text{Tôr}_1^R(M, N) = 0$, et encore dans ce cas $\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \tilde{\chi}_0^A(B, M \hat{\otimes}_R N) \geq 0$.

Pour passer au cas général, on utilisera le lemme suivant qui fait partie du lemme 2 de [4].

LEMME. - Supposons que R ne soit pas un corps, et soient P, Q deux B -modules annulés par une puissance de π , et tels que $\lg_A(B \otimes_A \text{Tôr}_1^R(P, Q)) < \infty$, alors, $\lg(P \otimes_B Q) < \infty$.

Preuve. - On raisonne par récurrence sur $d = m + n$, où m est le plus petit entier tel que $\pi^m P = 0$, et n le plus petit entier tel que $\pi^n Q = 0$.

Supposons d'abord que $\pi P = \pi Q = 0$. Alors on a $P \hat{\otimes}_R Q = \text{Tôr}_1^R(P, Q)$, donc $P \otimes_B Q$ est de longueur finie.

Supposons $m > 1$. On a les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Tôr}_1^R(\pi P, Q) \rightarrow \text{Tôr}_1^R(P, Q) \rightarrow X \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow X \rightarrow \text{Tôr}_1^R\left(\frac{P}{\pi P}, Q\right) \rightarrow Y \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow Y \rightarrow \pi P \hat{\otimes}_R Q \rightarrow Z \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow Z \rightarrow P \hat{\otimes}_R Q \rightarrow \frac{P}{\pi P} \hat{\otimes}_R Q \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De la première résulte

$$\lg(X \otimes_A B) \text{ et } \lg(B \otimes \text{Tôr}_1^R(\pi P, Q)) < \infty,$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\lg(\pi P \otimes_B Q) < \infty$, c'est-à-dire

$$\lg[B \otimes_A (\pi P \hat{\otimes}_R Q)] < \infty;$$

donc, d'après la troisième, on a

$$\lg[B \otimes_A Y] < \infty \text{ et } \lg[B \otimes_A Z] < \infty,$$

donc $\lg[B \otimes_A \text{Tôr}_1^R((P/\pi P), Q)] < \infty$, d'après la seconde. D'où $\lg((P/\pi P) \otimes_B Q) < \infty$ par hypothèse de récurrence, d'où

$$\lg(B \otimes_A (P \hat{\otimes}_R Q)) = \lg(P \otimes_B Q) < \infty,$$

d'après la quatrième.

Fin de la démonstration du théorème 1. - Soit $\xi = \pi^n$ tel que π ne divise pas zéro dans $M/(\xi M)$, et soit $\zeta = \pi^m$ tel que π ne divise pas zéro dans ζ^N . Alors

$$\text{Tor}_1^R(\xi M, N) = \text{Tor}_1^R(M, N) = \text{Tor}_1^R(\zeta^N, \xi M)$$

et

$$\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \tilde{\chi}_0^A(B, M \otimes_R N) - \chi_0^A(B, \text{Tor}_1^R(M, N))$$

On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \xi M \hat{\otimes}_R \zeta^N \rightarrow M \hat{\otimes}_R N \rightarrow S \rightarrow 0.$$

D'où, d'après le lemme précédent,

$$\lg(U) - \chi_0^B(\xi M, \zeta^N) + \chi_1^B(R, S) - \chi_1^B(M, N) = 0$$

où U est le noyau de $M \otimes_B N \rightarrow B \otimes_A S$. D'où

$$\tilde{\chi}_0^B(M, N) = H^0(M \otimes_R N) - \lg(U) + \chi_0^B(\xi M, \zeta^N) - \chi_1^A(B, S)$$

comme

$$0 \rightarrow U \rightarrow M \otimes_B N \rightarrow B \otimes_A S \rightarrow 0,$$

et que U est de longueur finie, on a :

$$0 \rightarrow U \rightarrow H^0(M \otimes_B N) \rightarrow H^0(B \otimes_A S) \rightarrow 0,$$

donc

$$\tilde{\chi}_0^B(M, N) = \chi_0^B(\xi M, \zeta^N) + \tilde{\chi}_0^A(B, S) \geq 0.$$

PROPOSITION 3. - Soit B un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation discrète R .

Soient M, N deux B -modules tels que, il existe $x \in \mathfrak{m}(B)$ non diviseur de zéro dans M , ni dans $M \otimes_B N$. Alors, ou bien $\text{Tor}_i^B(M, N) = 0$ ($i \geq 1$), ou bien x n'appartient à aucun idéal premier associé minimal de $\text{Tor}_1^B(M, N)$.

Preuve. - On a

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \rightarrow \frac{M}{xM} \rightarrow 0$$

$$\text{Tor}_1^B(M, N) \xrightarrow{\cdot x} \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^B\left(\frac{M}{xM}, N\right) \rightarrow M \otimes N \xrightarrow{\cdot x} M \otimes N \rightarrow \frac{M}{xM} \otimes N \rightarrow 0.$$

Comme x n'est pas diviseur de zéro dans $M \otimes N$, cette suite se scinde pour donner

$$\xrightarrow{\cdot x} \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^B\left(\frac{M}{xM}, N\right) \rightarrow 0.$$

Supposons $\text{Tor}_1^B(M, N) \neq 0$, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé minimal à $\text{Tor}_1^B(M, N)$ tel que $x \in \mathfrak{p}$. Alors

$$\chi_1^B\left(\frac{M}{xM}, N\right)_{\mathfrak{p}} = 0,$$

et $\text{Tor}_1^B\left(\frac{M}{xM}, N\right)_{\mathfrak{p}} = 0$, donc $\text{Tor}_1^B(M, N)_{\mathfrak{p}} = 0$, ce qui est impossible.

THÉOREME 2. - Soient B un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation discrète, M et N deux B -modules tels que, ou bien $\dim M < \dim B$, ou bien $\text{codim } N \geq 1$, et tels que $\lg[\text{Tor}_2^B(M, N)] < \infty$, alors

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) = \lg[H_m^0(\text{Tor}_1^B(M, N))] - \chi_2^B(M, N)$$

est positif.

Preuve. - Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte, où L est libre sur B . Il en résulte les suites exactes :

$$(*)_1 \quad 0 \rightarrow \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow M' \otimes_B N \rightarrow U \rightarrow 0$$

$$(*)_2 \quad 0 \rightarrow U \rightarrow L \otimes_B N \rightarrow M \otimes_B N \rightarrow 0$$

et $\text{Tor}_1^B(M', N) = \text{Tor}_2^B(M, N)$ est de longueur finie ; donc

$$\chi_2^B(M, N) = \chi_1^B(M', N) .$$

De $(*)_1$, il résulte :

$$0 \rightarrow H_m^0(\text{Tor}_1^B(M, N)) \xrightarrow{\varphi} H_m^0(M' \otimes_B N) \rightarrow H_m^0(U) \rightarrow H_m^1(\text{Tor}_1^B(M, N)) \rightarrow \dots$$

Soit T le conoyau de flèche φ , alors on a :

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) = \tilde{\chi}_0^B(M', N) - \lg T .$$

Si $\text{codim } N \geq 1$, alors $\text{codim } U \geq 1$, et $T = 0$, donc $\tilde{\chi}_1^B(M, N) \geq 0$.

Supposons $\text{codim } N = 0$, et soit la suite exacte :

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

où $N' = H_m^0(N)$ est de longueur finie.

Il résulte de la longue suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_3^B(M, N'') \rightarrow \text{Tor}_2^B(M, N') \rightarrow \text{Tor}_2^B(M, N) \rightarrow \text{Tor}_2^B(M, N'') \\ \rightarrow \text{Tor}_1^B(M, N') \xrightarrow{\psi} \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

que $\lg(\text{Tor}_i^B(M, N'')) < \infty$ pour $i \geq 2$, que

$$\lg(\text{Im } \psi) - \chi_1^B(M, N') + \chi_2^B(M, N'') - \chi_2^B(M, N) = 0 ,$$

et les trois suites exactes :

$$(**)_1 \quad 0 \rightarrow \text{Im } \psi \rightarrow \text{Tor}_1^B(M, N) \rightarrow W \rightarrow 0$$

$$(**)_2 \quad 0 \rightarrow W \rightarrow \text{Tor}_1^B(M, N'') \rightarrow H \rightarrow 0$$

$$(**)_3 \quad 0 \rightarrow H \rightarrow M \otimes_B N' \rightarrow V \rightarrow 0 .$$

dans lesquelles $V = \ker(M \otimes N \rightarrow M \otimes N'')$, H et $\text{Im } \psi$ sont de longueurs finies.

De $(**)_1$ résulte

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) - \lg H_m^0(W) - \chi_1^B(M, N') + \chi_2^B(M, N'') = 0 .$$

Soit S le conoyau de la flèche $H_m^0(\text{Tor}_1^B(M, N'')) \rightarrow H_m^0(H) = H$, alors

$$\lg(H^0(W)) - \lg[H^0(\text{Tor}_1^B(M, N''))] + \lg H - \lg S = 0$$

et on a

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) - \tilde{\chi}_1^B(M, N'') - \chi_1^B(M, N') + \lg H - \lg S = 0.$$

Enfin, à l'aide de (**)₃, on a

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) - \tilde{\chi}_1^B(M, N'') + \chi_0^B(M, N') - \lg V - \lg S = 0,$$

et comme $\dim M < \dim$, $\chi_0^B(M, N') = 0$, d'où

$$\tilde{\chi}_1^B(M, N) = \tilde{\chi}_1^B(M, N'') + \lg V + \lg S$$

est positif.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes conditions sur B, si M et N sont deux B-modules tels que $\lg(\text{Tor}_k^B(M, N))$ est fini pour un entier $k \geq 3$, alors

$$\tilde{\chi}_{k-1}^B(M, N) \geq 0.$$

Preuve. - Par récurrence, il suffit de le vérifier pour $k = 3$, on a alors, en prenant une suite exacte

$$0 \rightarrow N' \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où L est libre, $\text{codim } N' \geq 1$, et $\text{Tor}_2^B(N', M)$ est de longueur finie. Donc

$$\tilde{\chi}_2^B(M, N) = \tilde{\chi}_1^B(M, N') \geq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.). - Modules over regular local rings, Illinois J. Math., t. 5, 1961, p. 631-647.
- [2] HARTSHORNE (R.). - Local cohomology. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 41).
- [3] LICHTENBAUM (S.). - On the vanishing of Tor in regular local rings, Illinois J. Math., t. 10, 1966, p. 220-226.
- [4] MALLIAVIN-BRAMERET (M.-P.). - Sur les caractéristiques d'Euler-Poincaré d'ordre 1, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 517-520.
- [5] MALLIAVIN-BRAMERET (M.-P.). - Sur une majoration des caractéristiques d'Euler-Poincaré, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, p. 1155-1158.
- [6] SERRE (J.-P.). - Algèbre locale et multiplicités. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 11).
- [7] SHARP (R. Y.). - Local cohomology theory in commutative algebra, Quarterly J. Math., Oxford, Series 2, t. 21, 1970, p. 425-434.

(Texte reçu le 13 janvier 1973)

Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET
4 rue Saint-Louis en l'Île
75004 PARIS