

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE GABRIEL

Représentations indécomposables des ensembles ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 13, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A12_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS INDÉCOMPOSABLES DES ENSEMBLES ORDONNÉS

par Pierre GABRIEL

(d'après NAZAROVA et ROITER [2])

Résumé

Soient k un corps, et S un ensemble ordonné fini. Un S -espace est par définition un espace vectoriel V de dimension finie sur k muni d'une famille $(V(s))_{s \in S}$ de sous-espaces vectoriels $V(s)$ tels que $V(s) \subseteq V(t)$ si $s \leq t$. Nous nous intéressons aux décompositions $V = V_1 \oplus V_2$ de V telles que

$$V(s) = V_1 \cap V(s) \oplus V_2 \cap V(s) \text{ pour tout } s \in S.$$

Un sous-ensemble ordonné T de S sera dit plein si, pour tous $t, t' \in T$, la relation $t \leq_T t'$ équivaut à $t \leq_S t'$.

THÉOREME (NAZAROVA-ROITER-KLEINER). - Pour que le nombre de classes d'isomorphisme de S -espaces indécomposables soit fini, il faut et il suffit que S ne contienne pas de sous-ensemble ordonné plein du type suivant :

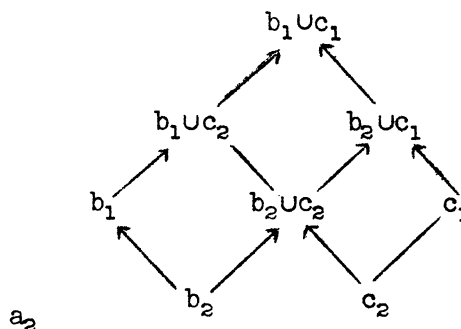
- (a) $\{a, b, c, d\}$ (4 points incomparables deux à deux),
- (b) $\{a_2 \leq a_1, b_2 \leq b_1, c_2 \leq c_1\}$ (3 chaînes incomparables de deux éléments),
- (c) $\{a, b_3 \leq b_2 \leq b_1, c_3 \leq c_2 \leq c_1\}$,
- (d) $\{a, b_2 \leq b_1, c_5 \leq c_4 \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1\}$,
- (e) $\{a_2 \leq a_1 \geq b_2 \leq b_1, c_4 \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1\}$.

La démonstration et l'énoncé originels de NAZAROVA-ROITER-KLEINER sont de nature matricielle. Nous en esquissons, dans ce qui suit, une interprétation homologique.

Nous supposons, dans toute la suite, que S ne contient pas 4 points incomparables deux à deux. Si a est un élément maximal de S , nous désignons par $S(a)$ le nouvel ensemble ordonné obtenu en retranchant a de S et en y ajoutant formellement une borne supérieure, notée $b \cup c$, chaque fois que $\{a, b, c\}$ est un sous-ensemble ordonné plein de S . Ainsi, si S est l'ensemble ordonné,

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array},$$

$S(a_1)$ est l'ensemble ordonné



(nous écrivons $\rightarrow$ au lieu de $\leq$).

A tout S -espace V , nous associons maintenant un $S(a)$ -espace $F_a V$ d'espace vectoriel sous-jacent $V(a)$ et tel que

$$(F_a V)(b) = V(a) \cap V(b) \quad \text{si } b \in S, \quad b \neq a,$$

$$(F_a V)(b \cup c) = V(a) \cap (V(b) + V(c)),$$

si $\{a, b, c\}$ est un sous-ensemble ordonné plein de S . Nous disons que V est fidèle au point a si $U(a) \neq 0$ pour tout S -espace U facteur direct de V .

LEMME DE RÉDUCTION. - Le foncteur

$$F_a : \{ \text{S-espaces fidèles en } a \} \rightarrow \{ S(a)\text{-espaces} \}$$

a les propriétés suivantes :

- (a) Tout $S(a)$ -espace est de la forme $F_a V$, où V est fidèle au point a ,
- (b) Les applications $F_a(U, V) : \text{Hom}(U, V) \rightarrow \text{Hom}(F_a U, F_a V)$ sont surjectives,
- (c) Un morphisme $f \in \text{Hom}(U, V)$ est inversible si, et seulement si, $F_a(f)$ est inversible.

Bien entendu, les morphismes $f : U \rightarrow V$ sont les applications linéaires f de U dans V telles que $f(U(s)) \subseteq V(s)$ pour tout $s \in S$.

Si nous désignons par $v(S)$ le nombre de classes d'isomorphisme de S -espaces indécomposables, et par $S'(a)$ le sous-ensemble ordonné plein de $S(a)$ tel que

$$S'(a) = S(a) \setminus \{b \in S \mid b \leq a\},$$

le lemme de réduction entraîne la formule

$$v(S) = v(S(a)) + \text{Card } S'(a) + 1.$$

Il s'en suit que $v(S)$ est fini si, et seulement si, on aboutit à l'ensemble vide en appliquant successivement, et un nombre fini de fois, la construction $S \mapsto S(a)$ décrite ci-dessus. Cette dernière propriété est de nature purement combinatoire. KLEINER a montré qu'elle était satisfaite si, et seulement si, S ne contenait pas de sous-ensembles ordonnés pleins des types (a)-(e) [1].

Esquisse de démonstration du lemme de réduction. - La démonstration repose sur la notion d'enveloppe injective. Considérons un ensemble ordonné fini T . Disons

qu'un morphisme de T -espaces, $f : U \rightarrow V$, est propre si $f(U(t)) = f(U) \cap V(t)$ pour tout $t \in T$. Relativement à cette notion de morphismes propres, la catégorie des T -espaces possède des enveloppes injectives. De façon précise, disons qu'un T -espace I est injectif si, pour toute injection propre $f : U \rightarrow V$, tout morphisme $U \rightarrow I$ se factorise par V . Disons qu'une injection $f : U \rightarrow V$ est essentielle si elle est propre et si, pour tout morphisme $g : V \rightarrow W$, les assertions " g est une injection propre" et " $g \circ f$ est une injection propre" sont équivalentes. Ces notions sont régies par la proposition suivante.

PROPOSITION. - Si V est un T -espace, posons $V(\emptyset) = 0$ et $V(t^+) = \bigcap_{s > t} V(s)$ pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$ (nous convenons d'écrire $\emptyset < t$ pour tout $t \in T$).

(a) Un morphisme de T -espaces $f : U \rightarrow V$ est une injection propre si, et seulement si, pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$, l'application induite $U(t^+)/U(t) \rightarrow V(t^+)/V(t)$ est injective.

(b) f est une injection essentielle si, et seulement si, pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$, l'application induite $U(t^+)/U(t) \rightarrow V(t^+)/V(t)$ est bijective.

(c) Pour tout T -espace U , il existe un T -espace injectif I et une injection essentielle $i : U \rightarrow I$ (I est une enveloppe injective de U !).

(d) Tout T -espace injectif est une somme directe de T -espaces injectifs I_t , $t \in \{\emptyset\} \cup T$, tels que $I_t = I_t(s) = k$ si $s \not\leq t$ et $I_t(s) = 0$ si $s \leq t$.

L'enveloppe injective I de U est le produit direct de T -espaces U_t , $t \in \{\emptyset\} \cup T$, tels que U_t ait, pour espace vectoriel sous-jacent, le quotient $U(t^+)/U(t)$, et vérifie les relations

$$U_t(s) = 0 \text{ si } s \leq t \text{ et } U_t(s) = U_t \text{ si } s \not\leq t.$$

L'injection essentielle $i : U \rightarrow I = \bigoplus U_t$ a pour composante d'indice t un prolongement à U de la projection canonique $U(t^+) \rightarrow U(t^+)/U(t)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme de réduction. Il s'agit d'associer à tout $S(a)$ -espace U un S -espace I tel que $F_a I = U$. Pour cela, nous considérons l'enveloppe injective I de U pour la structure sous-jacente de $S'(a)$ -espace, et nous identifions U à un sous-espace de I au moyen de l'injection essentielle i . Les sous-espaces $I(t)$ de I sont définis pour tout $t \in S'(a)$, donc en particulier pour $t \in S \setminus \{b \in S \mid b \leq a\}$. Il reste à poser

$$I(a) = U \text{ et } I(b) = U(b) \text{ pour } b \in S \text{ et } b \leq a.$$

Les assertions (b) et (c) du lemme de réduction résultent facilement des propriétés des enveloppes injectives.

Démonstration de la formule $v(S) = v(S(a)) + \text{Card } S'(a) + 1$. - Le foncteur F_a induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de S -espaces indécomposables V tels que $V(a) \neq 0$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $S(a)$ -espaces indécomposables. Il s'en suit que $v(S) - v(S(a))$ est égal au nombre

de classes d'isomorphisme de S -espaces indécomposables V tels que $V(a) = 0$. Ce dernier nombre est égal à $v(S')$, si $S' = S \setminus \{b \in S \mid b \leq a\}$. Comme a est un élément maximal de S et que S ne contient pas 4 éléments incomparables deux à deux, S' ne peut contenir 3 éléments incomparables deux à deux. On en déduit facilement que tout S' -espace indécomposable est de dimension 1. D'où la formule

$$v(S') = \text{Card } S'(a) - 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KLEINER (G. B.). - Sur les ensembles ordonnés ayant un nombre fini de représentations indécomposables [en russe], Zapiski naučnykh Seminarov Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, t. 28, 1972, p. 32-41 ; [en anglais] Seminars in Mathematics, Vol. 28 (à paraître).
- [2] NAZAROVA (L. A.), ROITER (A. V.). - Représentations des ensembles ordonnés [en russe], Zapiski naučnykh Seminarov Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, t. 28, 1972, p. 5-31 ; [en anglais] Seminars in Mathematics, Vol. 28 (à paraître).

Pierre GABRIEL
 Mathematisches Institut
 Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität
 10 Wegelerstrasse
 D-53 BONN (Allemagne fédérale)
