Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Artibano Micali

Résultats récents sur la théorie des formes quadratiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 12, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A11_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 12, 4 p.

7 mai 1973

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES

par Artibano MICALI

1. L'anneau de Witt d'un anneau.

Dans la suite, A désignera un anneau commutatif à élément unité, et $\underline{Quad}(A)$ la catégorie des A-modules quadratiques, i. e. les objets de $\underline{Quad}(A)$ sont les couples (P , q) , où P est un A-module projectif de type fini et $q : P \longrightarrow A$ une forme quadratique non dégénérée, à savoir, si $\varphi : P \times P \longrightarrow A$ est la forme A-bilinéaire symétrique associée à q , l'application A-linéaire $P \longrightarrow P^*$ définie par $x \longmapsto (y \longmapsto \varphi(x , y))$ est un isomorphisme de A-modules. Les morphismes de $\underline{Quad}(A)$ sont les applications A-linéaires $f : (P , q) \longrightarrow (P' , q')$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P' \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q'} & \\ & A & \end{array}$$

La somme orthogonale

$$(P , q) \perp (P' , q') = (P \oplus P' , q \oplus q') ,$$

où $q \oplus q' : P \oplus P' \longrightarrow A$, $(x , x') \longmapsto q(x) + q'(x')$, munit $\underline{Quad}(A)$ d'une structure de catégorie monoïdale, on peut donc considérer le groupe de Grothendieck de $\underline{Quad}(A)$, que nous appellerons le groupe de Witt-Grothendieck de A , et qu'on notera $W(A)$.

A tout A-module projectif de type fini P , on peut associer un espace hyperbolique, noté $h(P)$: en tant que A-module quadratique, $h(P) = (P \oplus P^* , q)$, où $q : P \oplus P^* \longrightarrow A$ est la forme quadratique définie par $(x , f) \longmapsto f(x)$. Les propriétés suivantes des espaces hyperboliques sont faciles à établir.

1.1 : Quels que soient P et P' , A-modules projectifs de type fini,

$$h(P \oplus P') \approx h(P) \perp h(P') ,$$

isomorphisme de A-modules quadratiques.

1.2 : Pour tout A-module quadratique (P , q) , on a un isomorphisme de A-modules quadratiques $(P , q) \perp (P , - q) \approx h(P)$.

1.3 : Pour tout A-module quadratique (P , q) et pour tout espace hyperbolique $h(R)$, on a un isomorphisme de A-modules quadratiques $(P,q) \otimes_A h(R) \approx h(P \otimes_A R)$.

Si $K_0(A)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules projectifs de type fini, l'application $P \longmapsto h(P)$ induit un morphisme de groupes abéliens $h : K_0(A) \longrightarrow W(A)$. Si l'on munit $W(A)$ de sa structure d'anneau commutatif (à élément unité, si 2 est inversible dans A), alors $\mathrm{Im}(h)$ est un

idéal de $\mathcal{W}\mathcal{S}(A)$.

L'anneau de Witt de l'anneau A est, par définition, l'anneau quotient

$$\mathcal{W}(A) = \mathcal{W}\mathcal{S}(A)/h(K_0(A)) .$$

Il est clair que $\mathcal{W}$: Ann $\longrightarrow$ Ann est un foncteur covariant défini dans la catégorie Ann des anneaux commutatifs à élément unité à valeur dans la catégorie des anneaux commutatifs.

Le calcul du groupe de Witt des entiers (Cf. [5]) nous conduit au résultat suivant.

THÉORÈME 1.4. - Soient A un anneau de Prüfer, et (P , q) un A-module quadratique, où P est un A-module projectif de rang 4 . Si l'algèbre de Clifford C(P , q) est triviale, (P , q) est hyperbolique.

Ceci est une conséquence d'un résultat analogue dans le cas d'un corps et du résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. - Soient A un anneau de Prüfer, et K son corps de fractions. Le morphisme $\mathcal{W}(A) \subseteq\longrightarrow \mathcal{W}(K)$ qui prolonge l'injection canonique $A \subseteq\longrightarrow K$, est injectif.

On remarque que si A est un anneau de Prüfer et K son corps de fractions, pour tout idéal premier p de A , le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \subseteq\longrightarrow & K \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & A_p & \end{array}$$

nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(A) & \subseteq\longrightarrow & \mathcal{W}(K) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{W}(A_p) & \end{array}$$

donc $\mathcal{W}(A) \subseteq\longrightarrow \mathcal{W}(A_p)$ est injectif. Ceci entraîne que $\mathcal{W}(A) \subseteq\longrightarrow \cap_p \mathcal{W}(A_p)$, On peut se poser le problème de savoir si $\mathcal{W}(A) \subseteq\longrightarrow \cap_p \mathcal{W}(A_p)$ est un isomorphisme de groupes abéliens. On a le résultat suivant (Cf. [6]).

THÉORÈME 1.6. - Si A est un anneau de Dedekind de caractéristique $\neq 2$, il existe un isomorphisme d'anneau $\mathcal{W}(A) \xrightarrow{\sim} \cap_p \mathcal{W}(A_p)$.

On remarque que la méthode suivie dans [5] pour le calcul du groupe de Witt de $\underset{\sim}{Q}$ (rationnels) s'étend au cas d'un corps de nombres (voir aussi [4]). D'autre part, le calcul de $\mathcal{W}(\underset{\sim}{Q})$ par les méthodes de [5] et [9] nous permettent de calculer $\mathcal{B}_2(\underset{\sim}{Q})$ (sous-groupe du groupe de Brauer $\mathcal{B}(\underset{\sim}{Q})$ dont tous les éléments sont d'ordre 2).

2. Le groupe des classes d'isomorphismes d'algèbres de Clifford.

Si A est un anneau commutatif à élément unité, on note $\mathcal{K}(A)$ l'anneau des classes d'isomorphismes d'algèbres de Clifford sur A (Cf. [7]). Il existe un morphisme surjectif d'anneaux $C : \mathcal{W}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$, induit par l'application

$$(P , q) \longmapsto C(P , q) ,$$

où $C(P , q)$ désigne l'algèbre de Clifford du A-module quadratique (P , q).

Il est intéressant de remarquer que $\mathcal{K}(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{BW}(A)$, le groupe de Brauer-Wall de A. En effet, on sait qu'il existe une suite exacte de groupes abéliens $0 \longrightarrow \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{BW}(A) \longrightarrow Q_2(A) \longrightarrow 0$, où $Q_2(A)$ est le groupe des extensions quadratiques $(\underset{\sim}{Z}/(2))$-graduées de A (Cf. [10]). D'autre part, il existe un morphisme surjectif évident $\mathcal{K}(A) \longrightarrow Q_2(A)$, et son noyau $N(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{B}_2(A)$ (sous-groupe de $\mathcal{B}(A)$ dont tous les éléments sont d'ordre 2) (Cf. théorème 6 de [7]). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N(A) & \longrightarrow & \mathcal{K}(A) & \longrightarrow & Q_2(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(A) & \longrightarrow & \mathcal{BW}(A) & \longrightarrow & Q_2(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

nous montre bien que le morphisme de groupes abéliens $\mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{BW}(A)$ est injectif.

Ceci répond à une question posée par A. FRÖHLICH (Cf. [3]). En fait, on a une suite exacte de groupes abéliens,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{BW}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A)/N(A) \longrightarrow 0 .$$

Le calcul de $\mathcal{W}(A)$ passe, parfois, par celui de $\mathcal{K}(A)$. Avant d'en donner un exemple, on remarque que le morphisme d'anneaux $\underset{\sim}{Z} \longrightarrow A$ défini par $n \longmapsto n.1$ nous donne le diagramme commutatif de groupes abéliens (et aussi, d'anneaux)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(\underset{\sim}{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{W}(A) \\ \downarrow & \searrow^{0} & \downarrow \\ 0 \approx \mathcal{K}(A) & \longrightarrow & \mathcal{K}(A) \end{array}$$

donc $\mathrm{Im}(\mathcal{W}(\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow \mathcal{W}(A)) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{W}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A))$.

Si, par exemple, $A = \underset{\sim}{R}$, on sait que $\mathcal{W}(\underset{\sim}{Z}) \hookrightarrow \mathcal{W}(\underset{\sim}{R}) \approx \underset{\sim}{Z}$ est injectif et que $\mathcal{K}(\underset{\sim}{R}) = \underset{\sim}{Z}/(8)$ (Cf. [10]). Donc, $\mathcal{W}(\underset{\sim}{Z}) \subset C\ 8\ \underset{\sim}{Z}$. Par ailleurs, il est clair que $8\underset{\sim}{Z} \subset C\mathcal{W}(\underset{\sim}{Z})$ (matrice de Milnor), donc $\mathcal{W}(\underset{\sim}{Z}) = 8\underset{\sim}{Z}$.

On renvoie le lecteur à la bibliographie (voir notamment [2], [4], [5] et [6]) pour d'autres résultats dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (H.). - Lectures on topics in algebraic K-theory. - Bombay, Tata Institute, 1967 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 41).

[2] DORBOZ (M.). - Autour du groupe de Witt, Thèse 3e cycle, Math., Montpellier, 1972.

[3] FRÖHLICH (A.). - Lettre à l'auteur, du 2 mars 1972.

[4] LABORDE (O.). - Formes quadratiques, algèbres de Clifford et signatures, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[5] LAROTONDA (A.), MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Sur le groupe de Witt, "Symposia Mathematica", Vol. 11, p. 211-219. - London and New York, Academic Press, 1973 (Istituto nazionale di alta Matematica).

[6] LEFRANC (C.). - Anneaux de Witt de certains anneaux de Prüfer, Thèse 3e cycle, Math., Montpellier, 1972.

[7] MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Sur les algèbres de Clifford, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 271-304.

[8] MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Algèbres de Clifford et groupe de Brauer, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 4, 1971, p. 285-310.

[9] SCHARLAU (W.). - Quadratic reciprocity laws, J. Number Theory, t. 4, 1972, p. 78-97.

[10] SMALL (C.). - The Brauer-Wall groups of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 156, 1971, p. 455-491.

Artibano MICALI
Université du Languedoc
Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER