Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Ermanno Marchionna

Sur les théorèmes de Sylow pour les groupes avec opérateurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J3, p. J1-J17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J3, 17 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Anneaux (P. DUBREIL)

28 juin 1972

SUR LES THÉORÈMES DE SYLOW POUR LES GROUPES AVEC OPÉRATEURS

par Ermanno MARCHIONNA

I

Dans cet exposé, on essayera de résumer et d'unifier, avec quelques extensions, les résultats sur la structure arithmétique des anneaux, et plus généralement des groupes avec opérateurs, qui ont été établis en [4], [5], [7], [9], [10], [11].

On utilisera les notations additives qui sont les plus commodes pour les applications aux anneaux, etc. Nous indiquerons par G un groupe additif (pas nécessairement commutatif), et par Ω le domaine d'opérateurs. La somme définie dans G, et le produit extérieur ωg ($\omega \in \Omega$, $g \in G$) seront liés par la loi distributive

$$\omega(g_1 + g_2) = \omega g_1 + \omega g_2 .$$

On dira, avec la terminologie habituelle, que G est un Ω-groupe. Notre problème est de voir si G a des sous-groupes de Sylow qui soient des Ω-sous-groupes, c'est-à-dire des sous-groupes permis par rapport aux opérateurs de Ω. La réponse est en général négative. A ce propos, considérons un groupe fini G_n d'ordre $n = p^\alpha q$, où $p > 1$, $q > 1$, et p est un nombre premier qui ne divise pas q. Supposons que G_n possède m sous-groupes de Sylow d'ordre p^α. Si $m > 1$, il est bien connu que deux sous-groupes quelconques S_i, S_k, d'ordre p^α ($i, k = 1, 2, \dots, m$) sont conjugués, à savoir il existe un automorphisme intérieur ω_{ik} du groupe G_n qui transforme S_i en S_k. Si l'on choisit le domaine Ω d'opérateurs composé par tous les ω_{ik} possibles (selon la notation additive on aura $\omega_{ik}\, g = \omega_{ik} + g + \omega_{ik}$, où $g \in G_n$), notre groupe G_n devient un Ω-groupe qui n'a pas de sous-groupes permis d'ordre p^α. Au contraire, dans le cas $m = 1$, le seul sous-groupe de Sylow d'ordre p^α est permis par rapport à tout domaine Ω d'opérateurs, car il est complètement invariant.

Il s'agit donc d'indiquer quelques classes non triviales de groupes avec opérateurs qui admettent des sous-groupes de Sylow permis.

II

Il convient de rappeler quelques définitions que l'on utilisera dans ce qui suit.

Soit π un ensemble de nombres premiers ; soit G un groupe (π et G ne sont pas nécessairement finis). On dit qu'un élément $g \in G$ est un π-élément si

l'ordre ν de g est fini, et si $\nu = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_h^{\beta_h}$, où $p_1, p_2, \dots, p_h \in \pi$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h \geqslant 0$. L'élément neutre de G est un π-élément. On dit que le groupe G (ou un sous-groupe de G) est un π-groupe (un π-sous-groupe) si tous ses éléments sont des π-éléments.

Si π se compose d'un seul nombre premier p, on dit que les π-éléments de G (c'est-à-dire les éléments d'ordre p^β) sont des p-éléments ; dans ce cas, la notion de π-groupe coïncide avec celle de p-groupe.

On dit qu'un π-sous-groupe S de G est un π-sous-groupe de Sylow (généralisé), s'il n'y a pas d'autres π-sous-groupes de G qui contiennent S proprement. (Si le seul π-élément de G est l'élément neutre, il y a un seul π-sous-groupe de Sylow, et il est réduit au même élément.)

Supposons maintenant que G soit un Ω-groupe. On dit que G vérifie la condition (Ω, π) si, pour tout choix des opérateurs $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ et des π-éléments $g_1, g_2, \dots, g_n$, la somme

$$\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2 + \dots + \omega_n g_n \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

est elle aussi un π-élément [1]. (Lorsque π se compose d'un seul nombre premier p, on parle plus simplement de la condition (Ω, p).)

A ce propos, il faut signaler des propositions assez simples que nous utiliserons dans la suite.

II.1. - Si un Ω-groupe G vérifie la condition (Ω, π), alors G possède au moins un π-sous-groupe de Sylow qui est permis par rapport aux opérateurs de Ω.

Considérons dans G les éléments du type ωg^*, où g^* est un π-élément arbitraire. Les éléments ωg^* et $-\omega g^* = \omega(-g^*)$ sont des π-éléments pour tout $\omega \in \Omega$. Le sous-groupe H_π, engendré par la totalité des éléments ωg^*, est un π-sous-groupe, car on suppose que G vérifie la condition (Ω, π).

Il est bien connu que :

(i) pour tout ensemble π de nombres premiers, tout groupe Γ possède au moins un π-sous-groupe de Sylow ;

(ii) tout π-sous-groupe de Γ est contenu dans quelques π-sous-groupes de Sylow.

Soit S un π-sous-groupe de Sylow de G qui contienne le π-sous-groupe H_π ; on voit que S est un sous-groupe permis par rapport aux opérateurs de Ω. En effet, un élément arbitraire $g' \in S$ est un π-élément, et pourtant l'élément $\omega g' \in H_\pi$ pour tout $\omega \in \Omega$. On déduit que $\omega g' \in S$, et cela prouve que S est un Ω-sous-groupe (et que H_π est aussi un Ω-sous-groupe).

---

[1] Naturellement les ω_i (ou les g_i) ne sont pas nécessairement distincts. Il convient de remarquer que la condition (Ω, π) est certainement satisfaite si G est un groupe abélien.

II.2. - Soit S^* un π-sous-groupe de Sylow d'un Ω-groupe G. Si S^* est normal en G, il est permis par rapport aux opérateurs de Ω.

Il s'agit d'un corollaire de la proposition II.1, puisque, dans les hypothèses actuelles, la condition (Ω, π) est satisfaite, car il est bien connu que S^* (étant normal dans G) contient tous les π-éléments de G. De plus, on peut remarquer que S^* est complètement invariant dans G, et il n'y a pas d'autres π-sous-groupes de Sylow dans G (On a certainement cette situation lorsque G est un groupe nilpotent ([2]) ou, en particulier, un groupe abélien).

II.3. - Soit G un Ω-groupe fini d'ordre n ; soit p un diviseur premier de n ; soit p^α la plus haute puissance de p qui divise n (nous disons que p^α est un diviseur de Sylow d'ordre n). Si G vérifie la condition (Ω, p), il admet au moins un sous-groupe S_p^* d'ordre p^α qui est permis par rapport aux opérateurs de Ω. On dira que S_p^* est un sous-groupe de Sylow de G (relatif au diviseur p).

Pour la démonstration, il suffit de rappeler que les sous-groupes d'ordre p^α sont les π-sous-groupes de Sylow de G lorsque l'ensemble π est composé par un seul nombre premier p. De ce fait et de la proposition II.1, résulte l'énoncé II.3.

II.4. - Soit G un Ω-groupe fini d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ (ici, et dans tout ce qui suit, on indique par $p_1, p_2, \dots, p_s$ des nombres premiers distincts).

Soit H un sous-groupe de Hall normal dans G. H est un Ω-sous-groupe de G.

Dans la définition d'un sous-groupe de Hall, l'ordre μ de H et l'index n/μ de H dans G sont deux nombres relativement premiers. Donc μ est égal à un diviseur de Sylow $p_h^{\alpha_h}$ d'ordre n, ou est le produit de différents diviseurs de Sylow $p^{\alpha_i}, \dots, p^{\alpha_h}$ (nous disons que μ est un diviseur de Hall de l'ordre de G).

Il est clair que, lorsque l'ensemble π est formé des nombres premiers $p_i, \dots, p_h$ (ou du seul nombre p_h), un sous-groupe de Hall d'ordre $\mu = p_i^{\alpha_i} \dots p_h^{\alpha_h}$ (ou d'ordre $\mu = p_h^{\alpha_h}$) est un π-sous-groupe de Sylow de G.

En tenant compte de la proposition II.2, on en déduit l'énoncé II.4.

Soit G un groupe (additif) fini d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_s^{\alpha_s}$. Un ensemble de s sous-groupes de Sylow $S_1, S_2, \dots, S_s$, ayant les ordres

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_s^{\alpha_s},$$

est dénommé base de Sylow de G si les sous-groupes $S_1, S_2, \dots, S_s$ sont deux

---

([2]) Voir, par exemple, SCHENKMAN [8], p. 125 et 218.

à deux permutables (par rapport à la somme). On vérifie immédiatement que

$$G = S_1 + S_2 + \ldots + S_s .$$

P. HALL a démontré que, lorsque le groupe G est résoluble, G a une base de Sylow, et admet au moins un sous-groupe (de Hall) d'ordre μ pour tout diviseur $\mu = p_i^{\alpha_i} \ldots p_h^{\alpha_h}$ d'ordre n. De plus, tous les sous-groupes H_μ ayant un tel ordre μ sont conjugués, et tout sous-groupe L_ν dont l'ordre ν divise μ est contenu dans quelques sous-groupes H_μ. Nous prouvons maintenant la proposition suivante.

PROPOSITION II.5. - Soit G un Ω-groupe fini d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} , p_2^{\alpha_2} , \ldots , p_s^{\alpha_s}$. Si le groupe G est résoluble et s'il vérifie la condition (Ω , π) pour tout sous-ensemble propre π de l'ensemble des nombres premiers $p_1 , p_2 , \ldots , p_s$, les propriétés suivantes sont valables :

(a) Pour tout entier μ qui soit un diviseur de Hall (ou, en particulier, un diviseur de Sylow) d'ordre n, le groupe G possède au moins un Ω-sous-groupe d'ordre μ (que nous appelons Ω-sous-groupe de Hall).

(b) G admet une base de Sylow composée par des Ω-sous-groupes de Sylow ayant les ordres $p_1^{\alpha_1} , p_2^{\alpha_2} , \ldots , p_s^{\alpha_s}$.

Les théorèmes de Sylow et de Hall montrent que le groupe G possède des sous-groupes S de Sylow d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ et des sous-groupes H de Hall pour tout diviseur de Sylow $p_i^{\alpha_i}$ et pour tout diviseur de Hall $\mu = p_h^{\alpha_h} \ldots p_i^{\alpha_i}$ de l'ordre de G. Puisque la condition (Ω , π) est supposée satisfaite pour tout sous-ensemble propre π de l'ensemble des diviseurs premiers de n, on déduit de la proposition II.1 qu'au moins un sous-groupe de Sylow d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ et au moins un sous-groupe de Hall d'ordre μ sont des Ω-sous-groupes de G ; et cela prouve la propriété (a).

Soit $p_j^{\alpha_j}$ un diviseur de Sylow de n. On dit que un sous-groupe de Hall ayant l'ordre n/p^{α_j} est un p_j'-sous-groupe de G, et on l'indiquera par Q_{p_j}. La propriété (a) nous assure que, pour chaque diviseur de Sylow

$$p_1^{\alpha_1} , p_2^{\alpha_2} , \ldots , p_s^{\alpha_s} ,$$

on a des sous-groupes $Q_{p_1} , Q_{p_2} , \ldots , Q_{p_s}$ qui sont permis par rapport aux opérateurs de Ω. En relation avec ces Ω-sous-groupes, on peut considérer, pour chaque $i = 1 , 2 , \ldots , s$, le sous-groupe

$$P_i = \bigcap Q_{p_j} , \text{ avec } j \neq i ,$$

P_i est évidemment un Ω-sous-groupe.

Alors on démontre (comme en [8], p. 226 ([3])) que $P_1 , P_2 , \ldots , P_s$ sont des sous-groupes ayant les ordres $p_1^{\alpha_1} , p_2^{\alpha_2} , \ldots , p_s^{\alpha_s}$, et ils forment une base de Sylow de G, ce qui prouve la propriété (b).

([3]) Voir aussi VERONESI [11], p. 113.

On dit qu'un Ω-groupe (additif) G est quasi-distributif si, pour tout ω_1 , $\omega_2 \in \Omega$ et pour tout g_1 , $g_2 \in G$, on a

(III.1) $$\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2 = \omega_2 g_2 + \omega_1 g_1 \quad (4).$$

La condition (III.1) n'est pas triviale lorsque le groupe G n'est pas abélien.

Si g , g' sont deux éléments conjugués d'un Ω-groupe quasi-distributif, on a $\omega g = \omega g'$ pour tout opérateur ω .

En effet, puisque $g' = - g'' + g + g''$ (où $g'' \in G$) , on a

$$\omega g' = - \omega g'' + \omega g + \omega g'' ,$$

et d'après la condition (III.1), on en déduit $\omega g' = \omega g$.

On dit que un Ω-groupe G est distributif, si dans Ω aussi, on a défini une loi de composition (que l'on indiquera encore par des notations additives) et si, pour tout ω_1 , $\omega_2 \in \Omega$, $g \in G$, on a

(III.2) $$(\omega_1 + \omega_2)g = \omega_1 g + \omega_2 g \quad (5).$$

On vérifie immédiatement qu'un Ω-groupe distributif est aussi quasi-distributif (6).

Signalons les propositions suivantes :

PROPOSITION III.1. - Un Ω-groupe quasi-distributif vérifie la condition (Ω , π) pour tout ensemble π de nombres premiers.

En effet, si g_1 , g_2 sont des π-éléments, la somme des π-éléments $\omega_1 g_1$ et $\omega_2 g_2$ (qui sont permutables par la condition (III.1)) est un π-élément ; en réitérant le procédé, si g_3 est un π-élément, la somme des π-éléments $(\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2)$ et $\omega_3 g_3$ (eux aussi permutables) est un π-élément, etc.

En utilisant les propositions III.1 et II.1, on trouve immédiatement le résultat suivant.

PROPOSITION III.2. - Pour tout ensemble π de nombres premiers, un Ω-groupe G quasi distributif possède au moins un π-sous-groupe de Sylow qui est permis par rapport aux opérateurs de Ω .

---

(4) Naturellement on n'exclut pas que $\omega_1 = \omega_2$ ou $g_1 = g_2$.

(5) Un exemple très simple de Ω-groupe distributif est donné par un module G sur un anneau Ω .

(6) En effet, d'après la définition d'un Ω-groupe (additif), on a $\omega(g_1 + g_2) = \omega g_1 + \omega g_2$, et si l'on adjoint la condition (III.2), on a

(III.3) $$(\omega_1+\omega_2)(g_2+g_1)=(\omega_1+\omega_2)g_2+(\omega_1+\omega_2)g_1=\omega_1 g_2+\omega_2 g_2+\omega_1 g_1+\omega_2 g_1 .$$

On peut écrire aussi

$$(\omega_1+\omega_2)(g_2+g_1)=\omega_1(g_2+g_1)+\omega_2(g_2+g_1)=\omega_1 g_2+\omega_1 g_1+\omega_2 g_2+\omega_2 g_1 .$$

Des relations (III.3), (III.4) on déduit (III.1).

Dans le même Ω-groupe G, considérons le sous-groupe H_π engendré par la totalité des éléments ωg^*, où les g^* sont des π-éléments. Puisque la condition (Ω, π) est satisfaite, nous savons déjà que le sous-groupe H_π est un π-sous-groupe de G (et, dans les hypothèses actuelles, on voit aisément qu'il est un Ω-sous-groupe abélien). On prouve la proposition suivante.

PROPOSITION III.3. - Si G est un Ω-groupe quasi-distributif dont deux π-sous-groupes de Sylow quelconques sont conjugués, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un π-sous-groupe de Sylow soit permis par rapport aux opérateurs de Ω est qu'il contienne le sous-groupe H_π.

Démonstration. - Soit S un π-sous-groupe de Sylow de G ; soit H^* l'ensemble des π-éléments de G. Indiquons par ΩS, ΩH^* les ensembles des éléments $\omega\sigma$, ωg^* (avec $\omega \in \Omega$, $\sigma \in S$, $g^* \in H^*$). On voit que $\Omega S = \Omega H^*$.

Évidemment $S \subseteq H^*$, donc $\Omega S \subseteq \Omega H^*$. Vérifions que $\Omega H^* \subseteq \Omega S$. A ce propos, on remarque que H^* est la réunion ensembliste de tous les π-sous-groupes de Sylow de G (puisque tout π-élément appartient à un π-sous-groupe de Sylow) ; donc un élément arbitraire $g^* \in H^*$ appartient à S, ou il est conjugué d'un élément $g \in S$ (car on a supposé que les π-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués). Puisque $\omega g^* = \omega g$, on en déduit que $\Omega H^* \subseteq \Omega S$.

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que S soit un Ω-sous-groupe de G est que S contienne l'ensemble ΩS, et que par conséquent, il contienne le sous-groupe H_π qui est engendré par l'ensemble $\Omega H^* = \Omega S$.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant retrouver un théorème établi par VERONESI ([10], [11]).

THÉORÈME III.4. - Soit G un Ω-groupe quasi-distributif fini d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n ; soit p^α la plus haute puissance de p qui divise n. Alors,

(a) le groupe G possède au moins un Ω-sous-groupe d'ordre p^α ;

(b) le nombre des Ω-sous-groupes d'ordre p^α est du type $1 + hp$ $(h \geqslant 0)$.

Pour la démonstration, considérons l'ensemble π composé par le seul nombre p. Dans ce cas, les π-sous-groupes de Sylow de G sont les sous-groupes d'ordre p^α, et le sous-groupe H_π, (étant un π-sous-groupe), a l'ordre p^β ; nous l'indiquerons par H_p. Puisque la condition (Ω, p) est satisfaite (prop. III.1), la propriété (a) est une conséquence de la proposition II.3. De plus, on déduit de la proposition III.3 que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un sous-groupe de Sylow S d'ordre p^α soit un Ω-sous-groupe, est que $S \supseteq H_p$. Alors, le nombre des sous-groupes d'ordre p^α qui contiennent un sous-groupe d'ordre p^β $(\beta \leqslant \alpha)$ est du type $1 + hp$ (BURNSIDE, [2], p. 152) ; et cela prouve la propriété (b).

Enfin nous remarquons que si G est un Ω-groupe résoluble, quasi-distributif d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, alors les propriétés (a), (b) de la proposition II.5 sont valables, car dans le cas actuel la condition (Ω , π) est toujours satisfaite.

Dans [11], on trouve aussi des théorèmes de décomposition pour un Ω-groupe fini quasi-distributif, qui possède une chaîne de Sylow normale ; on démontre qu'un tel Ω-groupe G est somme ordonnée à chaîne principale de certains Ω-sous-groupes de Sylow (par exemple, on a cette situation lorsque G est un groupe superrésoluble).

IV

On dit qu'un Ω-groupe (additif) G est Ω-complémenté si tout Ω-sous-groupe H de G admet un Ω-complément M , c'est-à-dire M est un Ω-sous-groupe de G tel que

$$H \cup M = G , \qquad H \cap M = (0)$$

(l'union $H \cup M$ dont on parle ici n'est pas la réunion ensembliste de H et M , mais l'union groupale ou réunion complète).

A. VARISCO a étudié, en [9], la structure arithmétique des groupes avec opérateurs complémentés ; le résultat principal est le suivant ([7]) :

Soit G un Ω-groupe fini d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. On suppose que G est résoluble et Ω-complémenté. Alors pour tout diviseur de Hall μ d'ordre n (en particulier, pour tout diviseur de Sylow), G admet un Ω-sous-groupe de Hall (de Sylow) d'ordre μ. De plus, si m , m' sont deux diviseurs de Hall relativement premiers, on peut trouver dans G deux Ω-sous-groupes ayant les ordres m , m' qui sont permutables (par rapport à la somme de sous-groupes (+)).

Dans [9], on démontre aussi que G possède une base de Sylow composée d' Ω-sous-groupes ; et si G est superrésoluble, on peut adjoindre les propriétés suivantes :

(a) Tout p_i-sous-groupe de G est abélien élémentaire, et pourtant l'ordre de chaque élément de G est un diviseur de $p_1 p_2 \dots p_r$.

(b) G est un groupe complémenté dans le sens de Hall, c'est-à-dire un sous-groupe H quelconque admet un complément K permutable avec H .

(c) G est somme ordonnée à chaîne principale de r sous-groupes de Sylow permis par rapport aux opérateurs de Ω .

([7]) Nous signalons qu'en [9] on n'emploie pas les notations additives, mais les notations multiplicatives.

Il est bien connu qu'un ensemble G, muni de deux lois de composition internes $(+, .)$, est dit near-ring (ou stem ([8])) à gauche si :

(α) G est un groupe, pas nécessairement abélien, par rapport à la somme (groupe additif du near-ring) ;

(β) le produit est associatif ;

(γ) la distributivité à gauche est valable :

$$a(b + c) = ab + ac , \quad \forall\ a , b , c \in G ;$$

il en résulte $g.0 = 0$, $\forall\ g \in G$, (0 est l'élément neutre de G par rapport à la somme).

Si l'on remplace la condition (γ) par la distributivité à droite, on obtient :

(δ) $$(b + c)a = ba + ca , \quad \forall\ a , b , c \in G ,$$

on dit que G est un near-ring à droite, et l'on obtient $0.g = 0$, $\forall\ g \in G$. On dit que G est un near-ring distributif (ou stem bilatère) s'il vérifie les quatre conditions (α), (β), (γ), (δ).

Un anneau est un near-ring distributif particulier.

Dans la suite, les near-rings à gauche seront dénommés tout simplement near-rings. On appelle sous-groupes d'un near-ring G les sous-groupes de son groupe additif. De plus, on dit qu'un sous-groupe H est un subnear-ring de G (sous-stem de G) si, pour tout $h , h' \in H$, il résulte $hh' \in H$. Comme dans la théorie des anneaux, nous dirons qu'un subnear-ring H de G est un idéal à gauche ou un idéal à droite si, pour tout $h \in H$, $g \in G$, on a respectivement $gh \in H$, $hg \in H$; nous dirons que H est un idéal bilatère de G (ou, plus simplement, un idéal) si H est un idéal à gauche et à droite ([9]).

Tout near-ring G devient un Ω-groupe additif si l'on suppose que :

(i) le domaine Ω des opérateurs coïncide avec G ;

(ii) la somme $g_1 + g_2$ et le produit extérieur ωg, définis dans le Ω-groupe, coïncident respectivement avec la somme et le produit définis dans le near-ring.

Dans cette situation, nous disons que le near-ring G est muni de la structure naturelle de Ω-groupe. Les sous-groupes permis par rapport aux opérateurs d'un tel Ω-groupe coïncident avec les idéaux à gauche du near-ring G. Nous disons que G est un near-ring quasi-distributif si le Ω-groupe naturel associé au near-ring est

---

([8]) Le nom de "stem" pour les near-rings est proposé par ZASSENHAUS-WIELANDT (Voir [12], p. 107).

([9]) Nous signalons que, par rapport aux idéaux, les spécialistes de la théorie des near-rings employent une terminologie différente de la nôtre.

quasi-distributif selon la définition du III, à savoir si

(V.1) $\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2 = \omega_2 g_2 + \omega_1 g_1$, $\forall \omega_1 , \omega_2 , g_1 , g_2 \in G$.

Un near-ring distributif est quasi-distributif ([10]), car on montre (comme au III) que la validité des deux lois distributives entraîne la condition (V.1).

Un near-ring distributif qui possède une unité par rapport au produit est certainement un anneau ; cela découle de la relation (V.1) pour $\omega_1 = \omega_2 = 1$ (1 est l'unité de G).

Nous voulons maintenant voir s'il est possible d'établir des théorèmes du type Sylow pour les subnear-rings d'un near-ring. La réponse est en général négative. En effet, G. FERRERO a montré en [5] qu'il existe des near-rings finis (non distributifs) d'ordre pq (p , q nombres premiers ; $q > p > 2$) qui ne possèdent aucun subnear-ring d'ordre p .

Les problèmes du type Sylow pour un near-ring G ont quelques réponses positives lorsque le Ω-groupe naturel associé à G vérifie la condition (Ω , π) du II ; cela est vrai, en particulier, si G est un near-ring quasi-distributif ([11]). A partir des propositions que nous avons signalées pour les Ω-groupes en II et III, on obtient des propriétés analogues sur les near-rings en remplaçant respectivement les termes Ω-groupe, sous-groupes permis (Ω-sous-groupes) par les termes near-ring, idéal à gauche ; dans cet ordre d'idées, on dira qu'un near-ring est résoluble si son groupe additif est résoluble.

VI

Nous examinons plus en détail la structure arithmétique d'un near ring distributif. A ce propos, on a le théorème suivant.

THÉORÈME VI.1. - Soit G un near-ring distributif (pas nécessairement fini).

Pour tout ensemble π de nombres premiers, il y a au moins un π-sous-groupe S de Sylow (du groupe additif) de G qui est un subnear-ring de G . Nous disons que S est un π-subnear-ring de Sylow de G .

Pour la démonstration, considérons le Ω-groupe naturel associé au near-ring G ; il s'agit d'un Ω-groupe quasi-distributif, car G est un near-ring distributif.

De la proposition III.2, on déduit qu'il y a au moins un π-sous-groupe de Sylow de G qui est un Ω-sous-groupe, c'est-à-dire un idéal à gauche ; ainsi on a trouvé un π-subnear-ring de G .

C. Q. F. D.

([10]) On voit immédiatement que le Ω-groupe naturel associé à un near-ring distributif est, non seulement quasi-distributif, mais aussi distributif selon la définition du III.

([11]) Il y a d'autres near-rings qui satisfont à des théorèmes du type Sylow ; par exemple, les near-rings "rectangulaires" étudiés par FERRERO en [5].

Pour ce qui suit, il convient de remarquer que, pour un near-ring distributif G, sont satisfaites les deux lois distributives (à gauche et à droite) du produit par rapport à la somme, par suite, on peut associer à G non seulement un Ω-groupe à gauche (comme nous avons convenu dans le V), mais aussi un Ω-groupe à droite ; alors dans le produit $g\omega$ ($g \in G$, $\omega \in \Omega = G$) l'opérateur ω est écrit à droite (et non à gauche). Les Ω-sous-groupes du nouveau Ω-groupe sont les idéaux à droite du near-ring.

Ainsi, on peut dire qu'il y a au moins un π-sous-groupe de Sylow de G qui est un idéal à droite du near-ring.

THÉORÈME VI.2. - Soit G un near-ring distributif (fini ou infini). Soit S un π-sous-groupe de Sylow du groupe additif G^+ du near-ring. Si S est normal dans G^+, il est le seul π-subnear-ring de Sylow de G, et il est un idéal bilatère de G.

De plus, tout π-subnear-ring de G est contenu dans S.

L'unicité du π-subnear-ring en question, découle de l'unicité du π-sous-groupe de Sylow de G^+, car tous les π-éléments de G^+ sont contenus dans S, S étant normal en G^+. Cela entraîne que tout π-subnear-ring de G soit contenu en S. De plus, S est un idéal bilatéral de G. En effet, nous avons vu dans la démonstration précédente que G^+ admet au moins deux π-sous-groupes de Sylow qui sont respectivement un idéal à gauche et un idéal à droite du near-ring ; dans notre cas, les deux π-sous-groupes coïncident avec S, qui est donc un idéal bilatère de G. Nous remarquons enfin que si G est un anneau, son groupe additif est abélien et par conséquent il admet un seul π-sous-groupe de Sylow S. On en déduit que S est un idéal bilatère de G et contient tout π-sous-anneau de G (sous-anneau dont chaque élément est un π-élément).

THÉORÈME VI.3. - Soit G un near-ring distributif fini. Si les π-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués, alors les π-subnear-rings de G sont des idéaux bilatères.

On voit aisément que si m est un entier positif et si x, y sont deux éléments de G, on a

$$(mx)y = x(my) = m(xy) .$$

Nous appelons caractéristique d'un élément $g \in G$ l'ordre de g dans le groupe additif de G. On déduit de la relation précédente que la caractéristique λ de l'élément xy divise les caractéristiques μ et ν de x et y. De plus, si μ et ν sont deux nombres premiers entre eux, on a $\lambda = 1$, donc $xy = 0$.

Après cela, venons à la démonstration du théorème.

Soit S un π-subnear-ring de G ; il faut démontrer que, pour tout $x \in S$, $y \in G$, on a $xy \in S$, $yx \in S$. La chose est évidente si $y \in S$. Supposons alors

que $y \notin S$. Nous savons déjà que x est un π-élément (puisque $x \in S$). Si y est un π-élément, il appartient à un π-sous-groupe de Sylow S' de G . Mais nous avons supposé que S' est un sous-groupe conjugué de S , et par conséquent il existe dans S un élément y' conjugué de y , c'est-à-dire qu'on a pour un certain $g \in G$,

$$y = - g + y' + g .$$

Puisque $xy = - xg + xy' + xg = xy'$ (G étant un near-ring distributif et, a fortiori, quasi-distributif), on trouve $xy \in S$, car $xy' \in S$.

Si y n'est pas un π-élément, on peut écrire sa caractéristique ν sous la forme $\nu = \nu_1 \nu_2$, où ν_1 , ν_2 sont deux nombres premiers entre eux et les diviseurs premiers de ν_1 (si $\nu_1 > 1$) sont des nombres de l'ensemble π , tandis que les diviseurs premiers de ν_2 n'ont pas cette propriété. Il est alors possible d'écrire y comme une somme de deux éléments y_1 , y_2 de caractéristiques ν_1 , ν_2 , et l'on trouve

$$xy = x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 .$$

D'après les remarques précédentes, on a $xy_1 \in S$ (car y_1 est un π-élément ; dans le cas particulier $\nu_1 = 1$, on a $y_1 = 0$) : d'ailleurs, on a $xy_2 = 0$ (car les diviseurs premiers de ν_2 n'appartiennent pas à l'ensemble π). Donc $xy \in S$. De la même façon, on prouve que $yx \in S$; et le théorème est démontré.

THÉORÈME VI.4. - Soit G un near-ring distributif fini d'ordre n ; soit p un diviseur premier de n ; soit p^α la plus haute puissance de p qui divise n . Alors :

(a) G possède au moins un subnear-ring d'ordre p^α .

(b) Tout subnear-ring d'ordre p^α est un idéal bilatère de G ; on l'appellera p-idéal de Sylow.

(c) Le nombre des p-idéaux de Sylow de G est du type $1 + hp$ ([12]).

Les sous-groupes de G ayant l'ordre p^α sont les π-sous-groupes de Sylow lorsque l'ensemble π est composé par le seul nombre p , et nous savons qu'ils sont conjugués. Des théorèmes VI.2 et VI.3, on déduit qu'un subnear-ring de G ayant l'ordre p^α est nécessairement un idéal bilatère, et cela prouve la propriété (b).

Considérons maintenant le Ω-groupe naturel quasi-distributif ou associé au near-ring distributif G . Un Ω-sous-groupe d'ordre p^α d'un tel Ω-groupe est un subnear-ring de G (car il est un idéal à gauche de G) et alors il est un idéal bilatère de G ; vice versa, un idéal bilatère d'ordre p^α (qui est a fortiori un idéal à gauche de G) est un Ω-sous-groupe du Ω-groupe naturel associé à G .

([12]) Le théorème en question a déjà été signalé en [4] par FERRERO.

Aprés cela, la démonstration des propriétés (a), (c) du théorème VI.4 est une conséquence immédiate de la proposition III.4.

THÉORÈME VI.5. - Soit G un near-ring distributif fini d'ordre $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ dont le groupe additif soit résoluble. Alors :

(a) Pour tout diviseur μ de Hall d'ordre n ($\mu = p_h^{\alpha_h} \cdots p_i^{\alpha_i}$), G possède au moins un subnear-ring d'ordre μ.

(b) Tout subnear-ring d'ordre μ est un idéal bilatère de G.

(c) Le groupe additif de G admet une base de Sylow composée par des idéaux de Sylow de G ayant les ordres $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$.

Les sous-groupes de G ayant l'ordre μ sont les π-sous-groupes de Sylow lorsque l'ensemble π est composé par les nombres premiers $p_h, \ldots, p_i$, et ils sont conjugués (Hall), car le groupe additif de G est résoluble. Alors un subnear-ring d'ordre μ de G est un idéal bilatère (théorèmes VI.2, VI.3), ce qui prouve la propriété (b).

Le Ω-groupe naturel quasi-distributif associé au near-ring G vérifie la condition (Ω, π) pour tout ensemble de nombres premiers (prop. III.1) ; de plus, on voit aisément que les Ω-sous-groupes d'ordre μ d'un tel Ω-groupe coïncident avec les idéaux d'ordre μ du near-ring. Après cela, les propriétés (a), (c) du théorème VI.5 découlent immédiatement de la proposition II.5 ([13]).

Remarque VI.6 - Les propositions que nous avons démontrées pour un near-ring distributif conservent leur validité même si l'on renonce à la condition que le produit défini dans le near-ring soit associatif (car cette condition n'a jamais été utilisée dans les démonstrations précédentes).

THÉORÈME VI.7. - Soit G un near-ring distributif fini d'ordre n. Si n est divisible par un nombre premier p, G possède au moins un subnear-ring d'ordre p (nous dirons que le subnear-ring en question est un sous-anneau, car un near-ring d'ordre p a le groupe additif abélien, par suite c'est un anneau).

Comme dans la théorie des anneaux on dit qu'un near-ring M possède des (véritables) diviseurs de zéro s'il existe dans M deux éléments $a \neq 0$, $b \neq 0$ tels que $ab = 0$ (et l'on dira que a, b sont respectivement des diviseurs de zéro à gauche et à droite). Si pour tout $a, b \in M$, $ab = 0$, on dira que M est un zéro-near-ring.

La démonstration du théorème VI.7 se base sur les remarques suivantes.

(i) Si l'ordre m d'un zéro-near-ring fini M est divisible par p, alors M possède au moins un sous-anneau d'ordre p.

([13]) Cf. aussi [10], n° 6.

En effet, il est évident que chaque sous-groupe de M est un subnear-ring (idéal bilatère) de M. Puisque M est divisible par p, M possède au moins un sous-groupe d'ordre p, qui est donc un subnear-ring, et plus précisément un sous-anneau.

(ii) Soit M un near-ring distributif fini. Si M n'a pas de diviseurs de zéro, il est un corps.

En effet, l'absence de diviseurs de zéro entraîne que l'ensemble M^* des éléments de G, différents de zéro, est un semigroupe par rapport au produit (dans le sens de DUBREIL [3], p. 86), car M^* est fermé par rapport au produit, un tel produit est associatif (d'après la définition de near-ring) ; de plus, les deux règles de simplification à gauche et à droite sont valables (car notre near-ring distributif M satisfait aux deux lois distributives, et il est dépourvu de diviseurs de zéro).

Mais il est bien connu qu'un semigroupe fini est un groupe ; M^* est un groupe par rapport au produit et par conséquent il admet un élément unité bilatère, 1. Puisqu'on a $1.0 = 0.1 = 0$, l'élément 1 est l'unité multiplicative de tout le near-ring M (et pas seulement de M^*) ; donc M est un anneau (§ V), et plus précisément un corps, car M^* est un groupe.

Après cela, nous pouvons démontrer le théorème VI.7.

Soit p^α la plus haute puissance de p qui divise l'ordre n de G. Nous savons que G possède un idéal bilatère G_1 d'ordre p^α.

Si $\alpha = 1$, le théorème est démontré.

Pour $\alpha > 1$, on procède de la manière suivante :

1° Si G_1 n'a pas de diviseurs de zéro, alors G_1 (d'après une remarque précédente) est un corps d'ordre p^α, donc de caractéristique p. Alors G_1 a un sous-anneau d'ordre p (le sous-corps des multiples de l'unité), qui est un sous-anneau aussi pour G ; et le théorème est démontré.

2° Supposons que G_1, possède des diviseurs de zéro. Alors il existe dans G_1 au moins deux éléments $a \neq 0$, $b \neq 0$ tels que $ab = 0$. Deux cas sont possibles.

(a) Soit $a^2 = 0$. Le sous-groupe cyclique A, engendré par a (dans le groupe additif de G_1), est un subnear-ring de G_1, et plus précisément un zéro-near-ring, puisque pour tous les entiers m, n, on a

$$(ma)(na) = (mn)a^2 = 0 \quad (14).$$

L'ordre de A est divisible par p (car l'ordre de A est un diviseur de l'ordre p^α de G_1). A étant un zéro-near-ring, il possède un sous-anneau d'ordre p, qui est aussi un sous-anneau de G ; et le théorème est démontré.

---

(14) La relation $(ma)(na) = (mn)a^2$ est valable, car notre near-ring distributif vérifie les deux lois distributives du produit par rapport à la somme.

(b) Soit $a^2 \neq 0$. Considérons dans G_1 l'idéal à droite G_2 composé par les éléments ag_1 (où g_1 décrit G_1). Le subnear-ring G_2 ne se réduit pas au seul élément zéro (pour $g_1 = a$, on a $ag_1 \neq 0$), mais G_2 ne peut pas remplir G_1 , car on a cela seulement si, à deux écritures différentes ag_1' , ag_1'' , sont associés toujours deux éléments distincts de G_2 , ce qui n'est pas vrai, car, pour $g_1' = 0$, $g_1'' = b$, on a $ag_1' = ag_1'' = 0$. Donc G_2 est un subnear-ring propre de G_1 et il est d'ordre p^β $(p \leqslant p^\beta < p^\alpha)$.

Si $p^\beta = p$, le théorème est démontré.

Autrement, on répète sur G_2 le raisonnement qu'on a fait sur G_1 (à partir du 1° et en poursuivant, s'il est nécessaire, jusqu'au (b)). Si l'on ne trouve pas un sous-anneau d'ordre p , on trouvera un subnear-ring G_3 d'ordre p^γ , avec $p < p^\gamma < p^\beta$.

On répète alors, sur G_3 , le raisonnement que l'on a fait sur G_1 , G_2 , etc.

Il est évident que, si l'on poursuit ainsi, après un nombre fini de passages, on trouvera nécessairement un sous-anneau d'ordre p , car le procédé ne peut pas fournir une chaîne infinie de subnear-rings

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$$

ayant des ordres décroissants (à partir de p^α) qui sont tous plus grands que p ([15]).

VII

Des résultats précédents, on peut déduire aisément des théorèmes du type Sylow pour les anneaux, que nous avions déjà signalés en [7], en dehors des théories des near-rings et des groupes avec opérateurs.

Soit G un anneau fini d'ordre n .

Supposons que n soit divisible par un nombre premier p ; soit p^α la plus haute puissance de p qui divise n . On a les propriétés suivantes :

VII.1. - G possède un et un seul sous-anneau S_p d'ordre p^α . S_p est un idéal bilatère de G ; nous dirons qu'il est un p-idéal de Sylow de l'anneau.

VII.2. - G possède au moins un sous-anneau d'ordre p .

Plus en détails, supposons maintenant

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} ,$$

([15]) Le théorème VI.7 a été établi d'abord pour les anneaux dans notre travail [7], avec la même démonstration que nous avons exposé ici pour les near-rings. Par la suite, FERRERO [4], en utilisant notre résultat sur les anneaux, a donné une démonstration différente pour les near-rings.

(où $p_1 , p_2 , \dots , p_s$ sont des diviseurs premiers distincts de n). Alors on peut adjoindre les propriétés suivantes.

VII.3. - Soit $\mu = p_h^{\alpha_h} \dots p_i^{\alpha_i}$ un diviseur de Hall de l'ordre n . G possède un et un seul sous-anneau H_μ d'ordre μ . H_μ est un idéal bilatère de G ; nous dirons qu'il est un idéal de Hall d'ordre μ de l'anneau.

VII.4. - G possède au moins un sous-anneau A_ν d'ordre

$$\nu = p_i \dots p_k ,$$

où ν est égal au produit d'un nombre quelconque de diviseurs premiers distincts de l'ordre n .

VII.5. - G possède au moins un sous-anneau A_m d'ordre

$$m = p_i \dots p_k , \ p_q^{\alpha_q} \dots p_r^{\alpha_r} ,$$

où $p_i , \dots , p_k , p_q , \dots , p_r$ sont des diviseurs premiers distincts de l'ordre n , et $p_q^{\alpha_q} , \dots , p_r^{\alpha_r}$ sont les plus hautes puissances de $p_q , \dots , p_r$ qui divisent n .

Les propriétés VII.1, VII.2, VII.3 sont une conséquences des théorèmes VI.4, VI.5, VI.7 sur les near-rings (car un anneau G est un near-ring distributif particulier dont les subnear-rings sont les sous-anneaux de G).

L'unicité de l'idéal de Sylow S_p d'ordre p^α (et de l'idéal de Hall H_μ d'ordre μ) dépend de la propriété que le groupe additif d'un anneau G , étant abélien, admet un seul sous-groupe d'ordre p^α (et un seul sous-groupe d'ordre μ) ([16]). Cela entraîne que tout sous-anneau d'ordre p^β $(\beta < \alpha)$ est contenu dans l'idéal de Sylow S_p : et tout sous-anneau, dont l'ordre est un diviseur de μ , est contenu dans l'idéal de Hall H_μ .

Les propriétés VII.4 et VII.5 découlent aisément de VII.1 et VII.2 sur la base des considérations suivantes.

Un anneau G d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ est somme directe de ses idéaux de Sylow $S_{p_1} , S_{p_2} , \dots , S_{p_s}$.

Plus en détail :

On peut écrire, d'une manière unique (à l'ordre près), tout élément g de G sous la forme

$$g = x_1 + x_2 + \dots + x_s ,$$

où $x_1 \in S_{p_1}$, $x_2 \in S_{p_2}$, $\dots$, $x_s \in S_{p_s}$.

Le produit de deux éléments y_i , y_r , appartenant à deux idéaux de Sylow dis-

([16]) Les propriétés VII.1 et VII.3 sont bien connues, par exemple on les trouve déjà chez BALLIEU [1].

tincts S_{p_i} , S_{p_r} , est égal à zéro (car y_i , y_r ont des caractéristiques relativement premières). Cela entraîne que, si

$$g' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_s$$

(où $g' \in G$, $x'_1 \in S_{p_1}$, ... , $x'_s \in S_{p_s}$), on a

$$gg' = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_s x'_s .$$

Après cela, la propriété VII.4 se vérifie immédiatement. En effet, d'après la propriété VII.2, l'anneau G possède des sous-anneaux A_{p_i} , ... , A_{p_k} d'ordres p_i ,..., p_k . Cela étant, le sous-ensemble de G ,

$$A_\nu = A_{p_i} + \ldots + A_{p_k} ,$$

composé par la totalité des éléments $a_i + \ldots + a_k$ (où $a_i \in A_{p_i}$,..., $a_k \in A_{p_k}$), est un sous-anneau de G ayant l'ordre $\nu = p_i \ldots p_k$.

D'une manière analogue, on démontre la propriété VII.5. Il suffit de remarquer que G possède des sous-anneaux A_{p_i} , ... , A_{p_k} , S_{p_q} , ... , S_{p_r} ayant respectivement les ordres p_i , ... , p_k , $p_q^{\alpha_q}$, ... , $p_r^{\alpha_r}$.

La somme de ces sous-anneaux est un sous-anneau de G ayant l'ordre $m = p_i \ldots p_k p_q^{\alpha_q} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

VIII

Considérons un anneau G d'ordre $p^\alpha q$, où p est un nombre premier qui ne divise pas q .

Nous savons déjà que G admet des sous-anneaux ayant les ordres p^α et p . La question se pose de voir si, pour $\alpha > 2$, G a des sous-anneaux ayant les ordres intermédiaires $p^{\alpha-1}$, $p^{\alpha-2}$, ... , p^2 . La réponse est positive dans quelques cas particuliers, mais il y a des cas où G n'a aucun sous-anneaux des ordres indiqués. Par exemple, si G est un corps <u>fini</u> d'ordre p^α , tous les sous-anneaux de G sont des sous-corps (car ils sont des anneaux finis sans diviseurs de zéro), et il est bien connu que si α est un nombre premier $(\alpha > 2)$, le corps G n'a pas de sous-corps d'ordres $p^{\alpha-1}$,... , p^2 . Cette remarque montre que, si G est un anneau fini d'ordre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, les questions d'existence pour les sous-anneaux de G ayant un ordre donné sont résolues, <u>en général</u>, par les propositions VII.1, VII.2, ..., VII.5, dans le sens qu'il existe des anneaux d'ordre

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$$

qui admettent seulement des sous-anneaux ayant les ordres indiqués par les dites propositions.

A ce propos, il suffit de considérer un anneau G qui soit somme directe de s corps fini ayant les ordres $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, ... , $p_s^{\alpha_s}$, où p_1 , p_2 ,..., p_s sont des

nombres premiers distincts et α_1 , α_2 , ... , α_s sont des nombres premiers plus grands que 2 .

Naturellement, si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur l'anneau, sa structure arithmétique peut devenir plus riche. Par exemple, un anneau fini d'ordre n à groupe additif cyclique admet un idéal bilatère d'ordre ν correspondant à tout diviseur ν de n (cela se vérifie pour l'anneau des classes résiduelles modulo n [7], n° 9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALLIEU (R.). - Anneaux finis : Systèmes hypercomplexes de rang 2 sur un corps, Ann. Soc. scient. Bruxelles, Série 1, t. 61, 1947, p. 117-126.

[2] BURNSIDE (W. S.). - Theory of groups of finite order, 2nd ed. - New York, Dover Publications, 1955.

[3] DUBREIL (P.). - Algèbre. 3e ed. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] FERRERO (G.). - Sulla struttura aritmetica dei quasi—anelli finiti, Atti Accad. Sc. Torino, t. 97, 1963, p. 1114-1130.

[5] FERRERO (G.). - Sui problemi tipo Sylow relativi ai quasi-anelli finiti, Atti Accad. Sc. Torino, t. 100, 1966, p. 643-657.

[6] FERRERO (G.). - Struttura degli "stems" p-singolari, Riv. Mat. Univ. Parma, Série 2, t. 7, 1966, p. 243-254.

[7] MARCHIONNA (E.). - Osservazioni sulla struttura aritmetica degli anelli e degli anelloidi finiti, Boll. Un. Mat. Ital., Série 3, t. 17, 1962, p. 289-319.

[8] SCHENKMAN (E.). - Group theory. - Princeton, Van Nostrand Company, 1965 (The University Series in higher Mathematics).

[9] VARISCO (A.). - Sui gruppi finiti complementati con operatori, Ist. Lombardo Accad. Sc. Lett., Rend., t. 105, 1971, Série A, p. 510-538.

[10] VERONESI (Maria-Luisa). - Sulla struttura aritmetica dei gruppi finiti con operatori, Ist. Lombardo Accad. Sc. Lett., Rend., t. 102, 1968, Série A, p. 3-11.

[11] VERONESI (Maria-Luisa). - Sulla decomposizione dei gruppi finiti risolubili con operatori, Ist. Lombardo Accad. Sc. Lett., Rend., t. 104, 1970, Série A, p. 106-114.

[12] ZASSENHAUS (H.). - The theory of groups. 2nd ed. - New York, Chelsea Publishing Company, 1958.

Ermanno MARCHIONNA
44 Viale Abruzzi
I620131 MILANO (Italie)