

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ERNST AUGUST BEHRENS

Une arithmétique non commutative des demi-groupes et des anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J2, p. J1-J5

http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

28 juin 1972

UNE ARITHMÉTIQUE NON COMMUTATIVE DES DEMI-GROUPES ET DES ANNEAUX

par Ernst August BEHRENS

En 1951, Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN [6] a présenté une arithmétique pour certains monoïdes S abéliens et noethériens, demi-réiculés, satisfaisant la condition

(Φ) $a \subseteq b$, si, et seulement si, il existe un élément $c \in S$, $c \neq a$, tel que
 $a = bc$.

Dans ce cas, chaque élément $a \in S$ est un produit des éléments premiers, déterminé uniquement par a , et S est le sous-groupe entier d'un groupe abélien réticulé.

Les idéaux entiers d'un corps des nombres algébriques constituent un demi-groupe demi-réticulé satisfaisant la condition (Φ). Par conséquent, le résultat de M.-L. DUBREIL-JACOTIN prouve le théorème fondamental de l'arithmétique classique.

Le même résultat est valable pour les ordres maximaux dans certaines algèbres non commutatives (en 1935 par DEURING [5]). En 1968, ROBSON [7] a généralisé ce résultat d'une arithmétique commutative, en considérant le cas où chaque idéal est un module projectif à droite : les idéaux fractionnels constituent de nouveau un groupe abélien.

En 1962, (BEHRENS [1]) on a commencé d'examiner les anneaux D^* -arithmétiques R , c'est-à-dire que le demi-groupe réticulé $V(R)$ de ses idéaux satisfait la loi d'une distributivité infinie (D^*)

$$A + \bigcap_{\tau \in T} B = \bigcap_{\tau \in T} (A + B_{\tau}) ,$$

et que R est demi-parfait, ayant son anneau quotient par rapport au radical de Jacobson séparable.

Nous dirons qu'un idéal A est $\cup$ -irréductible si

$$(A = B \cup C = B + C) \text{ implique } (A = B \text{ ou } A = C) .$$

Dans le cas ci-dessus, les idéaux irréductibles, ensemble avec (0) , constituent un demi-groupe S non commutatif (S n'a pas d'élément zéro, si l'anneau R est premier). Le demi-groupe réticulé $V(S)$ des idéaux de S est isomorphe au demi-groupe réticulé $V(R)$, parce que chaque idéal de R a une représentation normale, et uniquement déterminée comme l'union des idéaux $\cup$ -irréductibles (BEHRENS [3]), c'est-à-dire que l'arithmétique de R est la même que l'arithmétique de S , une arithmétique non commutative en général.

On peut caractériser ces demi-groupes S sans zéro comme les demi-groupes quasi

unisériels dans la théorie algébrique des demi-groupes, de manière axiomatique. Il y a six axiomes, par exemple :

$$(F2) \quad (ab) = (a).(b) , \text{ ou } (a) = SaS .$$

Mais il y a une autre caractérisation de S : Soit M un demi-groupe complètement simple et ordonné (partiellement).

Définition. - $a \in M$ est entier si $ax \subseteq x$, et $xa \subseteq x$ pour $x \in M$.

Les éléments entiers de M constituent le sous-demi-groupe entier de M :

$$S = \{a \in M ; a \text{ entier}\} .$$

Deux idempotents entiers différents engendrent deux idéaux à droite différents, à savoir :

$$\text{PROPOSITION 1. - } e = e^2 \text{ et } f = f^2 \in S ; (eM = fM) \rightarrow (e = f) .$$

Démonstration. - $e = fe \subseteq f = ef \subseteq e$.

M est l'union disjointe des sous-groupes dont les éléments unités engendrent les idéaux unilatéraux de M .

HYPOTHÈSE 1. - Il y a "assez d'idempotents entiers dans M ", c'est-à-dire chaque idéal unilatéral minimal de M est engendré par un idempotent de S .

Cette hypothèse et la proposition 1 impliquent que l'ensemble I des indices des idempotents entiers e_i de S est convenable aussi bien pour les idéaux à droite que pour les idéaux à gauche de M . Par conséquent, en représentant M par le demi-groupe matriciel de Rees, on a les équations :

$$(1) \quad M = M(G ; I, S, P) = \bigcup_{i,j \in I} e_i Me_j .$$

Les éléments entiers du sous-groupe $e_i Me_j$ sont donnés comme suit :

$$\text{PROPOSITION 2. - } S \cap e_i Me_j = \{a = e_i ae_j \in M ; a \subseteq e_i e_j\} .$$

Cette proposition, avec le fait que les éléments du sous-groupe $e_i Me_i$ sont inversibles dans $e_i Me_i$, permet une caractérisation algébrique de M , à comparer avec la condition (Φ) de M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

$$\text{PROPOSITION 3. - } (a \subseteq b) \Leftrightarrow (a \in (b) , \text{ où } (b) = SbS) .$$

Maintenant, soient G le groupe de structure dans (1), et Z le groupe cyclique infini, naturellement ordonné,

$$(2) \quad Z = \{\omega^z ; z \in \mathbb{Z}\} \text{ et } (\omega^x \leq \omega^y) \Leftrightarrow (x \geq y) .$$

Ce cas donne la caractérisation des demi-groupes quasi unisériels S , mentionnée ci-dessus.

THÉOREME 4. - S est quasi unisériel sans zéro, si et seulement si S est le sous-demi-groupe entier d'un demi-groupe complètement simple et ordonné, satisfaisant l'hypothèse 1, et ayant le groupe cyclique (2) comme groupe ordonné de structure (BEHRENS [4]).

On peut supposer la matrice sandwich

$$P : (i, j) \rightarrow \omega^{(ij)} \in \mathbb{Z} \text{ pour } (i, j) \in I \times I,$$

normalisée par

$$0 : (ij) = 0.$$

Alors l'hypothèse 1 est équivalente aux conditions

$$1^\circ (ij) + (jk) \geq (ik);$$

$$2^\circ (ij) + (ji) > 0 \text{ si } i \neq j.$$

Les éléments entiers de $\mathbb{Z}$ constituent le sous-monoïde $\mathcal{B} = \{\omega^z; 0 \leq z \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$(3) M = \{\omega^z e_i e_j; z \in \mathbb{Z} \text{ et } i, j \in I\} \text{ et } S = \{\omega^s e_i e_j; 0 \leq s \in \mathbb{Z} \text{ et } i, j \in I\}.$$

Chaque idéal A de S est l'union de ses $\mathcal{B}$ -composants $\mathcal{B} \omega^{\alpha_{ij}} e_i e_j$, et par conséquent, A est l'union des idéaux $\mathcal{U}$ -irréductibles $\omega^{\alpha_{ij}}(e_i e_j)$.

L'application

$$(4) \quad \varphi : A = \bigcup_{i,j \in I} \omega^{\alpha_{ij}}(e_i e_j) \rightarrow (\omega^{\alpha_{ij}}) \in \mathcal{B}_{I \times I},$$

est injective.

La règle de la multiplication des éléments dans un demi-groupe matriciel de Rees, avec une application de (F2), à savoir $(e_i e_j)(e_k e_l) = (e_i e_j e_k e_l)$, permet de calculer le produit de deux idéaux A et B de S d'une manière matricielle.

THÉOREME 5.

$$(5) \quad \varphi(A.B) = (\varphi A) \circ (\varphi B),$$

où

$$(6) \quad (\omega^{\rho_{ij}}) \circ (\omega^{\sigma_{ij}}) = (\omega^{\tau_{ij}}), \quad \tau_{ij} = \min_r \{\rho_{ir} + \sigma_{rj}\},$$

et

$$(7) \quad \varphi(V(S)) = \{A \in \mathcal{B}_{I \times I}; P \circ A \circ P = A\}.$$

(BEHRENS [2]).

Cette multiplication des idéaux est l'utilisation du théorème fondamental de l'arithmétique classique, pour notre arithmétique non commutative, parce qu'il y a une représentation, duale de (4), à savoir

$$(8) \quad A = \bigcap_{i,j} \omega^{\alpha_{ij}} T_{ij} \text{ pour } A \in V(S),$$

où les T_{ij} sont des idéaux $\mathcal{U}$ -irréductibles avec les mêmes exposants α_{ij} comme dans la formule (4). Il n'est pas difficile de trouver les idéaux T_{ij} par un cal-

cul de ses matrices $\varphi(T_{ij})$, en utilisant le théorème 5. Mais il y a une autre construction des T_{ij} , qui est plus intelligible, par une théorie de la localisation comme suit :

Définition. - Un S -idéal de M est un S -bi-sous-demi-module A de M , satisfaisant $w^n A \subseteq S$ pour un nombre convenable n .

Les S -idéaux de M constituent le demi-groupe réticulé $V_S(M)$ avec $\varphi A \in Z_{I \times I}$ pour $A \in V_S(M)$, sa multiplication étant comme dans le théorème 5.

THÉORÈME 6. - Le centre C de $V_S(M)$ est le groupe cyclique

$$(9) \quad C = \{W^z; z \in \mathbb{Z}, \text{ où } W = ws\}.$$

Les idéaux premiers de S sont les ensembles complémentaires $S \setminus e_i$ par rapport aux idempotents e_i , $i \in I$. Ils sont liés à certains S -ordres maximaux de M , à savoir à

$$(10) \quad \mathcal{E}_i = \{x \in M; e_i x \in S\} \text{ et } \mathcal{R}_i = \{y \in M; ye_i \in S\} \text{ pour } i \in I.$$

Alors on a le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Les idéaux $\cap$ -irréductibles "basiques" T_{ij} de S sont les produits

$$(11) \quad T_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{R}_j,$$

et par conséquent

$$(12) \quad A = \bigcap_{i,j} \mathcal{E}_i W^{\alpha_{ij}} \mathcal{R}_j \text{ pour } A \in V(S).$$

Le demi-groupe $V_{\mathcal{E}_i}(M)$ des $\mathcal{E}_i$ -idéaux de M est le groupe cyclique engendré par $W\mathcal{E}_i$. Similairement,

$$(13) \quad V_{\mathcal{R}_i}(M) = \{W^z \mathcal{R}_i; z \in \mathbb{Z}\} \text{ pour } i \in I.$$

Ces résultats conduisent immédiatement à une arithmétique pour les anneaux R ci-dessus à cause de l'isomorphisme mentionné $V(S) \cong V(R)$ comme demi-groupes réticulés. Inversement, il y a un tel anneau R pour chaque demi-groupe S quasi unisériel sans zéro.

Si R est semi-premier, on a une arithmétique semblable, où $V(R)$ est isomorphe à une union 0-directe des $(V(S))^0$ ci-dessus.

Si le groupe G de structure, dans la représentation matricielle de M , n'est pas nécessairement $\mathbb{Z}$, ordonné naturellement, M satisfait cependant l'hypothèse 1. Dans ce cas, J. RÖMPKE donne une caractérisation axiomatique de S dans sa thèse. (McMaster University, 1973.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHRENS (E. A.). - Die Halbgruppe der Ideale in Algebren mit distributivem Idealverband, Arch. der Math., Basel, t. 13, 1962, p. 251-266.

- [2] BEHRENS (E. A.). - The arithmetics of the quasiuniserial semi groups without zero, *Canad. J. Math.*, t. 23, 1971, p. 507-516.
- [3] BEHRENS (E. A.). - Ring theory. - New York, Academic Press, 1972 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 44).
- [4] BEHRENS (E. A.). - Une caractérisation des demi-groupes quasi unisériels semi-premiers comme sous-demi-groupes entiers (à paraître).
- [5] DEURING (M.). - *Algebren*. - Berlin, J. Springer, 1935 (*Ergebnisse der Mathematik*, 4-I).
- [6] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe demi-réticulé entier, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 232, 1951, p. 1174-1176.
- [7] ROBSON (J.). - Non-commutative Dedekind rings, *J. of Algebra*, t. 9, 1968, p. 249-265.

Ernst August BEHRENS
Department of Mathematics
McMaster University
HAMILTON, Ont. (Canada)
