

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

THÉRÈSE MERLIER

Quelques propriétés des 0-demi-groupes périodiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972),
exp. n° J15, p. J1-J9

[<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A15_0>](http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A15_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES $\mathcal{O}$ -DEMI-GROUPES PÉRIODIQUES

par Thérèse MERLIER

Un demi-groupe S est périodique si tout élément de S est d'ordre fini ; on a donc, si E désigne l'ensemble des idempotents de S , convention que nous respectons dans la suite,

$$\forall x \in S, \exists n \in \mathbb{N}, \exists e \in E; x^n = e.$$

On appelle $\mathcal{O}$ -demi-groupe, un demi-groupe S sur lequel on peut définir une relation d'ordre total, $\leq$, isotone, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S, \forall d \in S, (a \leq b, c \leq d) \Rightarrow (ac \leq bd).$$

On dit alors que S est totalement ordonné par $\leq$.

Le fait de pouvoir ordonner totalement un demi-groupe lui confère de nombreuses propriétés algébriques ; en particulier,

L'ensemble des idempotents d'un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, s'il n'est pas vide, est un sous-demi-groupe.

Dans un demi-groupe S périodique, on définit la relation d'équivalence $\mathfrak{F}$, dont les classes sont des fuseaux, par

$$(a \equiv b \ (\mathfrak{F})) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, a^n = b^n = e, \text{ où } e \in E).$$

Tout fuseau contient un idempotent et le fuseau de x est noté F_x .

Si S est périodique et totalement ordonné, tout fuseau F_e , $e \in E$, est un sous-demi-groupe convexe de S , nildemi-groupe de zéro e . Les nildemi-groupes totalement ordonnés ont été étudiés dans [5].

Nous allons distinguer deux cas : les $\mathcal{O}$ -demi-groupes périodiques unitaires, et les $\mathcal{O}$ -demi-groupes périodiques n'ayant qu'un nombre fini d'idempotents. Nous appellerons toujours bande un demi-groupe idempotent.

LEMME 1. - Si S est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique, et si e est un zéro à gauche de la bande E de ses idempotents, e est zéro à gauche de S .

Soit x un élément quelconque de S ; puisque S est périodique, x appartient au fuseau F_g , où $g \in E$. On a alors $xg = gx = g$. Comme e est zéro à gauche de E , $eg = e$. D'où $ex = egx = eg = e$, et e est bien zéro à gauche de S .

1. Demi-groupes périodiques unitaires totalement ordonnés.

Soit S un tel demi-groupe ; alors E est une bande unitaire totalement ordonnée. On a donc le résultat suivant.

LEMME 2 (M.-L. DUBREIL-JACOTIN [2]). - Toute $\mathcal{O}_E$ -classe a au plus deux éléments, et $ef = e$ ou f , pour tout e, f de E .

(Nous notons, si X est un demi-groupe, $\mathcal{O}_X$ la $\mathcal{O}$ -équivalence de Green dans X . Pour les définitions et propriétés des équivalences de Green et des demi-groupes en général, nous renvoyons à [1].)

THÉORÈME 1. - Dans un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire, l'équivalence $(\mathfrak{F})$ est une congruence.

Soient a et b tels que $a \equiv b \ (\mathfrak{F})$; $a^n = b^n = e$, $e \in E$. Supposons S totalement ordonné par $\leq$, et soit c un élément quelconque de S .

Si $c \equiv a \ (\mathfrak{F})$, comme chaque fuseau est un sous-demi-groupe, ac , bc , ca , cb appartiennent au même fuseau que a , et $ac \equiv bc \ (\mathfrak{F})$, $ca \equiv cb \ (\mathfrak{F})$.

Si $c \not\equiv a \ (\mathfrak{F})$, distinguons deux cas :

1° $c \in F_f$, où f est un idempotent tel que $e \neq f \ (\mathcal{O}_E)$. Dans ce cas, $ef = fe$, car $ef \neq fe$ implique $e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)$ puisque $ef \equiv fe \ (\mathcal{O}_E)$ et que $ef = e$ ou f dans une $\mathcal{O}$ -bande. Donc $e = ef = fe$ par exemple ; si de plus $ac \leq ca$, on a :

$$a^n c^n \leq (ac)^n \leq (ca)^n \leq c^n a^n \text{ pour tout entier } n,$$

et comme pour un certain entier p $a^p = e$, $c^p = f$, on a

$$e = ef \leq (ac)^p \leq (ca)^p \leq fe = e, \text{ et } ac \equiv ca \equiv e \ (\mathfrak{F}) ;$$

de même,

$$bc \equiv cb \equiv e \ (\mathfrak{F}) ;$$

on démontre de même, si $ef = fe = f$, que $ac \equiv ca \equiv f \ (\mathfrak{F})$ et $bc \equiv cb \equiv f \ (\mathfrak{F})$.

2° $c \in F_f$, où $f \in E$ et $e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)$. D'après un résultat de E. Ja. GABOVIČ [3], on sait que si les $\mathcal{O}_E$ -classes ont au plus deux éléments, alors si $e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)$, $e \neq f$, $F_e \cup F_f$ est un sous-demi-groupe. Ainsi $ac \in F_e \cup F_f$, si $ac = c_1 \in F_f$, on a, d'une part $acf = (ac)f = c_1 f = f$, et d'autre part $acf = a(cf) = af$. D'où $af = f = \dots = a^n f = ef$, ce qui est absurde ; donc $F_e F_f \subseteq F_e$ et $F_f F_e \subseteq F_e$, et $ac \equiv bc \ (\mathfrak{F})$, $ca \equiv cb \ (\mathfrak{F})$. $(\mathfrak{F})$ est donc bien une relation de congruence.

COROLLAIRE 1. - Si S est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire, $S/\mathfrak{F}$ est une $\mathcal{O}$ -bande unitaire.

Cela implique que dans $\bar{S} = S/\mathfrak{F}$, toute $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -classe a au plus deux éléments et $\bar{e}\bar{f} = \bar{e}$ ou $\bar{f}$.

PROPOSITION 1. - Dans un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire S , si $a \in F_e$, $b \in F_f$, et si $a \equiv b \ (\mathcal{O}_S)$, alors $e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)$.

Si $a \equiv b \ (\mathcal{O}_S)$, alors, dans toute image homomorphe de S , $\varphi(S)$,

$$\varphi(a) \equiv \varphi(b) \pmod{\mathcal{O}_{\varphi(S)}};$$

ceci est vrai en particulier pour $S/\mathfrak{F}$. Donc on a $\bar{a} \equiv \bar{b} \ (\mathcal{O}_{\bar{S}})$; mais on a $\bar{a} = \bar{e}$, $\bar{b} = \bar{f}$, d'où $\bar{e} \equiv \bar{f} \ (\mathcal{O}_{\bar{S}})$; comme $\bar{e}\bar{f} = \bar{e}$ et $\bar{f}\bar{e} = \bar{f}$ par exemple, on a $e\bar{f} \equiv e \ (\mathfrak{F})$, $f\bar{e} \equiv f \ (\mathfrak{F})$, soit $ef = e$, $fe = f$ puisque les idempotents forment une bande de S et qu'un fuseau ne contient qu'un idempotent.

COROLLAIRE 2. - Dans un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire S , si E est la bande des idempotents de S , on a

$$\forall e \in E, \forall f \in E, (e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)) \Leftrightarrow (e \equiv f \ (\mathcal{O}_S)).$$

COROLLAIRE 3. - Une $\mathcal{O}_S$ -classe d'un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique rencontre au plus deux fuseaux.

Ceci résulte de ce que les $\mathcal{O}_E$ -classes ont au plus deux idempotents, et de la proposition 1.

PROPOSITION 2. - Dans un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire S , si $e \neq f$, $e, f \in E$, et si $e \equiv f \ (\mathcal{O})$, alors $F_e = \{e\}$ et $F_f = \{f\}$.

On a, par exemple, $ef = e$, $fe = f$ et nécessairement $e < u < f$, si u est l'unité de S .

Par suite, e est le plus petit élément du fuseau F_e , et f le plus grand de F_f : en effet, si $x \in F_e$ et $x < e < u$, alors $x^2 \leq x < e$ et $x^n < e$ pour tout n , ce qui est absurde. Puisque $ef = e$, $fe = f$, e et f sont zéros à gauche de l'ensemble des idempotents $\{e, f\}$ du demi-groupe $F_e \cup F_f$; ils sont, d'après le lemme 1, zéros à gauche de $F_e \cup F_f$. Soient alors $x \in F_e$, $y \in F_f$, on a

$$e \leq x < u < y < f.$$

Comme $\mathfrak{F}$ est une congruence, $xf \equiv ef \ (\mathfrak{F})$, et comme $ef = e$, $xf \in F_e$; d'où $e \leq xf$; mais xf est aussi zéro à gauche de $F_e \cup F_f$, donc $xf = e$; comme $u < f$, on a $x \leq xf$, d'où $x \leq e$ et $x = e$. De même, $y = f$.

THÉORÈME 2. - Soit D une $\mathcal{O}$ -classe d'un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique unitaire S : Si D est une $\mathcal{O}$ -classe régulière, alors $D = \{e\}$ ou $\{e, f\}$, avec $e, f \in E$, Si D n'est pas régulière, D est contenue dans un même fuseau F_e .

Si D est régulière: D contient des idempotents, mais alors D contient au plus deux idempotents tels que $e \equiv f \ (\mathcal{O}_E)$.

Si $e \neq f$: $F_e = \{e\}$, $F_f = \{f\}$ d'après la proposition 2, et D rencontre au

plus ces deux fuseaux F_e et F_f , donc $D = \{e, f\}$. Si D contient un seul idempotent, e , alors D est la $\mathcal{H}$ -classe de e , donc D est un groupe, périodique, qui peut être totalement ordonné. C'est donc nécessairement l'idempotent e .

Si D n'est pas régulière : D ne peut rencontrer qu'un seul fuseau. En effet, si $a \equiv b \ (\mathcal{O})$, ($a \in F_e$, $b \in F_f$, $e \equiv f \ (\mathcal{O})$ et $e \neq f$) implique ($F_e = \{e\}$, $F_f = \{f\}$), donc $a = e$, $f = b$.

2. 0-demi-groupes périodiques n'ayant qu'un nombre fini d'idempotents.

LEMME 3. - Si S est un 0-demi-groupe périodique ayant un nombre fini d'idempotents, S admet au moins un zéro à gauche ou un zéro à droite.

Soit E l'ensemble des idempotents de S ; E est une 0-bande finie, donc admet, d'après [4], § 1, au moins un zéro à gauche ou un zéro à droite. Dans ce cas, d'après le lemme 1, tout zéro à gauche (à droite) de E est zéro à gauche (à droite) de S , et le lemme 3 est établi.

Remarque. - Un demi-groupe périodique, même fini, n'admet en général ni zéro à gauche, ni zéro à droite; c'est le cas de certaines bandes. Il en est ainsi du demi-groupe Σ considéré dans [4], et dont la table de Cayley est :

Σ	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	b	b	d	d
c	a	a	c	c
d	b	b	d	d

D'ailleurs, même si l'ensemble E des idempotents d'un demi-groupe fini S est une bande avec zéros à gauche, à droite, ou bilatères, il n'en est pas de même de S .

Par exemple, considérons le demi-groupe suivant :

S	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

L'ensemble des idempotents de S est $\{a, b\}$ qui est une bande de zéro a , et cependant, S n'admet ni zéro à gauche, ni zéro à droite.

Si S est un demi-groupe périodique, si Z est l'ensemble supposé non vide des zéros à gauche (par exemple) de S , on définit :

$$(a \equiv b \text{ (C)}) \Leftrightarrow (a = b) \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N}, \exists z_i \in Z, a^n = b^n = z_i \in Z.$$

Il est clair que cette relation (C) est une relation d'équivalence. Si nous supposons que, de plus, l'équivalence en fuseaux (F) est une congruence, alors (C) est une congruence, moins fine que (F). En effet, si x est un élément quelconque, $(xa)^n$ appartient au fuseau de xa , F_{xa} , et $x^n a^n$ aussi. Donc si $a \equiv b \text{ (C)}$, et si $a^n = b^n = z_i \in Z$, $x^n a^n = x^n b^n = x^n z_i$, qui est aussi un zéro à gauche, et $a^n x^n = b^n x^n = z_i$, donc $xa \equiv xb \text{ (C)}$ et $ax \equiv bx \text{ (C)}$.

Si (C) est une congruence, alors S/C est un demi-groupe périodique ayant mêmes zéros que S , et si $\bar{Z}$ est l'ensemble des zéros de S/C , on a

$$\bar{x}^n \in \bar{Z} \Rightarrow \bar{x} \in \bar{Z}.$$

De plus, si S est totalement ordonné, les classes mod C sont convexes, et par suite S/C est aussi totalement ordonné. Ceci peut donc justifier l'introduction des 0-demi-groupes périodiques dont Z , ensemble des zéros à gauche, par exemple, vérifie

$$(x^n \in Z) \Rightarrow (x \in Z).$$

ce qui est équivalent à

$$(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z).$$

PROPOSITION 3. - Soit S un 0-demi-groupe périodique, avec un nombre fini d'idempotents ; si $Z = \{\text{zéros à gauche de } S\}$ est non vide et vérifie

$$(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z),$$

on définit la relation d'équivalence (Ψ) suivante

$$(a \equiv b \text{ (}\Psi\text{)}) \Leftrightarrow (\forall z \in Z, az = bz).$$

Alors (Ψ) est une congruence dont les classes sont des sous-demi-groupes.

Supposons que S est totalement ordonné par $\leq$. Il est clair que (Ψ) est toujours une congruence ; il nous suffit donc de montrer que les classes sont des sous-demi-groupes, et même que $a \equiv a^2 \text{ (}\Psi\text{)}$ pour tout a de S . Or si $a \in S$ (a peut être supposé distinct d'un zéro à gauche), on a par exemple

$$z_i < a < z_{i+1}, \text{ où } z_i \text{ et } z_{i+1} \text{ sont des zéros consécutifs}$$

ou

$$a < z, \quad \forall z \in Z,$$

ou

$$z < a, \quad \forall z \in Z.$$

Raisonnons dans le premier cas, $z_i < a < z_{i+1}$; on a $z_i \leq az_i \leq a^2 \leq z_{i+1}$. Mais $(a^2 = z_{i+1})$ implique $(a = z_{i+1})$, donc $a^2 < z_{i+1}$, et par suite $az_i = z_i$, de même $az_{i+1} = z_{i+1}$. Dans ce cas, si $z \in Z$ et si $z \leq z_i$, $z_i z = z_i \leq az \leq az_i = z_i$

et $az = z_i$; de même $a^2 z = z_i$. Au contraire, si $z \in Z$ et $z_{i+1} \leq z$, $az = z_{i+1}$ et de même $a^2 z = z_{i+1}$. Les classes mod la congruence (ψ) sont donc bien des sous-demi-groupes.

PROPOSITION 4. - Soit S un $\mathcal{O}$ -demi-groupe périodique ayant un nombre fini d'idempotents, et soit Z l'ensemble des zéros à gauche de S tel que

$$(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z) ,$$

et tel que $|Z| > 1$. ($|X|$ désigne le cardinal de l'ensemble X .)

Soit $A_i = \{x \in S - Z ; \exists z_i \in Z ; xZ = z_i\}$. Alors A_i est un sous-demi-groupe réflexif de S . (Un ensemble X est réflexif si $(ab \in X) \Leftrightarrow (ba \in X)$.)

Si a et $b \in A_i$, il est clair que $abZ = z_i$; pour que A_i soit un sous-demi-groupe, il nous suffit de montrer que $ab \neq z_i$. Si $ab = z_i$, on a nécessairement, d'après la condition $(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z)$ et le fait que le produit ab est compris entre a^2 et b^2 ,

$$a^2 < z_i < b^2 .$$

Comme les fuseaux sont convexes, $a < z_i < b$. Mais, on a vu, au cours de la démonstration de la proposition 3 , que si un élément x est compris entre deux zéros, $|xZ| = 2$, donc $a < z$ pour tout z de Z et $z < b$ pour tout z de Z . Mais alors $a < z_1 < \dots < z_n < b$, et $aZ = z_1$, $bZ = z_n$, $z_1 \neq z_n$, et ceci est impossible.

Enfin A_i est un sous-demi-groupe réflexif : si nous avons $abZ = z_i$ et $baZ = z'_i$, alors, pour tout z de Z , $ab < z$ et $z < ba$ nécessairement ; donc on a aussi $a < z$ et $z < b$, pour tout $z \in Z$, si $a < b$, et $aZ = z_i$, $bZ = z'_i$ aussi ; si $a^n = e$, $b^n = f$, où $e, f \in E$, on a $eZ = z_i$, $fZ = z'_i$, et $b^n a^n Z = feZ = z'_i$, $efZ = z_i$.

Mais on sait (cf. [4]) que dans une $\mathcal{O}$ -bande finie E , de zéros Z , l'ensemble $A = \{x \in E - Z ; \exists z \in Z , xZ = z\}$ est saturé mod $\mathcal{O}$.

On a donc une contradiction, et A_i est un sous-demi-groupe réflexif.

THÉOREME 3. - Soit S un demi-groupe périodique avec un nombre fini, n , d'idempotents, et admettant un ensemble Z de zéros à gauche, tel que $|Z| > 1$ et tel que $(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z)$. Alors S est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, si, et seulement si,

- 1° Les classes mod ψ sont des $\mathcal{O}$ -demi-groupes, sous-demi-groupes de S ,
- 2° S/ψ est une $\mathcal{O}$ -bande,
- 3° $\{x \in S - Z ; \exists z \in Z , xZ = z\}$ est un sous-demi-groupe de S , réflexif, s'il n'est pas vide.

Condition nécessaire. - D'après la proposition 3, les classes mod ψ ont la propriété 1°, et S/ψ est image $\mathcal{O}$ -homomorphe de S puisque les classes mod ψ sont

convexes. S/Ψ est donc une $\mathcal{O}$ -bande. La proposition 4 nous donne la propriété 3°.

Condition suffisante. - Si $a \equiv z \ (\Psi)$, où $z \in Z$, on a par définition de Ψ ,

$$az' = zz', \quad \forall z' \in Z, \text{ donc } aZ = z.$$

D'autre part, si $z_1 \equiv z_2 \ (\Psi)$, on a $z_1 = z_2$, donc S/Ψ a les mêmes zéros à gauche que S . Si $x \in S$, nous noterons $\bar{x}$ l'image de x dans $S/\Psi = \bar{S}$, $\bar{Z}$ l'image de Z , et $\bar{Z}$ est isomorphe à Z .

D'après [4] (théorème 1-2, condition 4 (α)), il y a au plus deux zéros à gauche $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_n$ dans $\bar{S}$ tels que $\bar{a}\bar{Z} = \bar{z}_1$, $\bar{a}'\bar{Z} = \bar{z}_n$, avec $\bar{a}, \bar{a}' \in \bar{S} - \bar{Z}$, puisque $\bar{S}$ est une $\mathcal{O}$ -bande finie. Il y a donc au plus, d'après la condition 3°, deux sous-demi-groupes A_0 et A_n de S tels que

$$A_0 Z = z_1 \text{ et } A_n Z = z_n,$$

et on aura de plus, dans $\bar{S}$, $\bar{z}_1 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_n$, $\forall \bar{z} \in \bar{S}$.

Dans $\bar{S}$, si $\bar{a}\bar{z} = \bar{b}\bar{z}$ pour tout $\bar{z}$ de $\bar{Z}$, alors $\bar{a} = \bar{b}$. En effet, si $az \equiv bz \ (\Psi)$ pour tout z de Z , $az = bz$, donc $a \equiv b$ et $\bar{a} \equiv \bar{b}$. Il résulte alors de l'étude des bandes finies (voir par exemple la table de Cayley d'une $\mathcal{O}$ -bande finie, avec zéros à gauche dans [4]), que, dans $\bar{S}$, si $\bar{z}_i < \bar{a} \leq \bar{b} < \bar{z}_{i+1}$, alors $\bar{a} = \bar{b}$.

S est alors nécessairement totalement ordonné de la façon suivante :

$$\bar{z}_1 < \bar{a}_1 < \bar{z}_2 < \dots < \bar{z}_i < \bar{a}_i < \dots < \bar{a}_{n-1} < \bar{z}_n, \text{ où } \bar{a}_i \in \bar{S} - \bar{Z}, \bar{z}_i \in \bar{Z}.$$

On ne peut en effet avoir $\bar{x} < \bar{z}_1$, si $\bar{z}_1$ est le plus petit zéro à gauche, car alors $\bar{x}\bar{z}_i = \bar{z}_1$ pour tout i , donc $xz_i \equiv z_1$, et $xz_i = z_1$ pour tout i , donc $x \equiv z_1 \ (\Psi)$; de même, il ne peut exister d'élément $\bar{y}$ tel que $\bar{z}_n < \bar{y}$.

Toujours d'après [4], la table de $\bar{S}$ est alors la suivante

$\bar{S}$	$\bar{z}_1$	$\bar{a}_1$	$\bar{z}_2$	...	...	$\bar{a}_{n-1}$	$\bar{z}_n$
$\bar{z}_1$	$\bar{z}_1$	$\bar{z}_1$	...	...	...	...	$\bar{z}_1$
$\bar{a}_1$	$\bar{z}_1$	$\bar{a}_1$	$\bar{z}_2$	...	...	...	$\bar{z}_2$
$\bar{z}_2$	$\bar{z}_2$	...	...	...	...	...	$\bar{z}_2$
$\vdots$	$\vdots$						
$\bar{a}_{n-1}$	$\bar{z}_{n-1}$	...	...	...	$\bar{z}_{n-1}$	$\bar{a}_{n-1}$	$\bar{z}_n$
$\bar{z}_n$	$\bar{z}_n$	$\bar{z}_n$	...	...	...	...	$\bar{z}_n$

On déduit alors que, dans S , la classe de $\bar{z}_1$ est

$$A_0 = A'_0 \cup \{z_1\}, \text{ où } A'_0 = \{x \in S - Z; xZ = z_1\},$$

la classe de $\bar{z}_n$ est

$$A_n = A'_n \cup \{z_n\}, \text{ où } A'_n = \{x \in S - Z; xZ = z_n\},$$

la classe de z_i , $i \neq 1$, $i \neq n$, est réduite à z_i . Nous notons A_i , la classe de a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

D'après les conditions 1° et 3°, chaque A_i est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, de même A'_0 , A'_n sont des $\mathcal{O}$ -demi-groupes, puisque $A_0[A_n] = \text{classe de } z_1[z_n]$ est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe admettant $A'_0[A'_n]$ comme sous-demi-groupe.

On peut de plus préciser quel est le produit d'un élément de A_i par un élément de A_j .

Si $i < j$, $A_i A_j = z_{i+1}$, $A_j A_i = z_j$, si i et j sont distincts de 0 et de n .

D'après la table de $\bar{S}$, on a, si $i < j$, $\bar{a}_i \bar{a}_j = \bar{z}_{i+1}$, donc $a_i a_j = z_{i+1}$, et comme $i < i+1 \leq j < n$, $a_i a_j = z_{i+1}$. De même, on démontre que $a_j a_i = z_j$.

$$A_0 A_i = z_1, \quad A_i A_0 = z_i, \quad \text{si } i \neq 0 \text{ et } i \neq n.$$

Soient en effet $a \in A_0$ et $a_i \in A_i$. On a donc $\bar{a}\bar{a}_i = \bar{z}_1 \bar{a}_i = \bar{z}_1$ et $aa_i = z_1$. D'autre part, $\bar{a}_i \bar{a} = \bar{a}_i \bar{z}_1 = \bar{z}_i$; comme $i \neq 0$, $i \neq n$, $a_i a = z_i$, et $(aa_i)^2$ est aussi un zéro à gauche; par suite, aa_i est un zéro à gauche, donc $aa_i = z$.

Montrons enfin que

$$A_0 A_n = z_1, \quad A_n A_0 = z_n$$

si $a \in A_0$ et $b \in A_n$, on a $ab = \bar{z}_1 \bar{z}_n = \bar{z}_1$ et $\bar{b}\bar{a} = \bar{z}_n$. Si ab est un zéro à gauche, il en est de même de ba , et réciproquement. En effet,

$$(ab \in Z) \Rightarrow ((ba)^2 \in Z) \Rightarrow (ba \in Z).$$

Si ab n'appartient pas à Z , alors $ab \in A'_0$, et par suite $ba \in A'_n$. Mais comme A'_0 et A'_n sont des demi-groupes réflexifs d'après la condition 3°, il y a une absurdité, et nécessairement $ab \in Z$, donc $ab = z_1$ et $ba = z_n$.

Comme $A_0 = A'_0 \cup \{z_1\}$, où A'_0 est un sous-demi-groupe, et A_0 un $\mathcal{O}$ -demi-groupe de zéro z_1 , on peut ordonner totalement A'_0 et de même pour A'_n . On peut alors définir sur S une relation d'ordre total prolongeant les ordres sur $A'_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A'_n$ par

$$A'_0 < z_1 < A_1 < z_2 < \dots < z_n < A'_n.$$

Grâce aux propriétés de multiplication des A_i , on en déduit que S est alors totalement ordonné.

On trouvera, dans [4], une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{S}$, bande finie, soit une $\mathcal{O}$ -bande.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

- [2] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les O -bandes, Semigroup Forum, t. 3, 1971, p. 156-159.
- [3] GABOVIČ (E. Ja.). - Trois théorèmes sur les demi-groupes périodiques totalement ordonnés [en russe], Mat. Zametki, t. 6, 1969, p. 187-196.
- [4] MERLIER (Thérèse). - Sur les O -bandes finies et les demi-groupes totalement ordonnés O -simples, Semigroup Forum, t. 4, 1972, p. 124-149.
- [5] MERLIER (Thérèse). - Nildemi-groupes totalement ordonnés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1779-1782.
- [6] SAITO (Toru). - The orderability of idempotent semigroups, Séminaire Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, Journées d'algèbre [1972. Paris], n° J8, 7 p.

Thérèse MERLIER
Résidence Gascoigne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES
