

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

OTTÓ STEINFELD

Sur les groupoïdes-treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972),
exp. n° J13, p. J1-J5

[<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A13_0>](http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A13_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES GROUPOÏDES-TREILLIS

par Ottó STEINFELD

A la mémoire de Mme DUBREIL-JACOTIN

Il est connu que l'ensemble T de tous les sous-demi-groupes avec 0 d'un demi-groupe D avec 0 constitue un treillis complet par rapport à l'inclusion $\subseteq$. Les opérations dans ce treillis sont notées par $\cap$ (l'intersection) et par $\cup$ (l'union). D est l'élément le plus grand et 0 est l'élément le plus petit de ce treillis T .

Nous allons définir une multiplication dans l'ensemble T . Le produit $A.B$ des sous-demi-groupes A, B avec 0 de D , est le sous-demi-groupe de D engendré par tous les éléments ab ($a \in A, b \in B$). L'ensemble T forme un groupoïde par rapport à cette multiplication. (En général, cette multiplication n'est pas associative.)

L'inclusion $A \subseteq B$ ($A, B \in T$) implique $A.X \subseteq B.X$, et $X.A \subseteq X.B$ avec tous les $X \in T$; c'est-à-dire que T est un groupoïde ordonné (en treillis).

Ce groupoïde ordonné possède les propriétés suivantes :

$$X^2 = X.X \subseteq X \quad (X \in T),$$

$$0.D = D.0 = 0.$$

En général les lois de distributivité :

$$(X \cup Y).Z = X.Z \cup Y.Z \quad \text{et} \quad Z.(X \cup Y) = Z.X \cup Z.Y \quad (X, Y, Z \in T)$$

ne sont pas vérifiées dans T , c'est-à-dire que T n'est pas un groupoïde réticulé.

Correspondant aux propriétés mentionnées de T , nous allons définir une structure algébrique ordonnée.

Nous désignerons par $\langle V ; \leq \rangle$ un groupoïde ordonné satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) V constitue un treillis complet par rapport à la relation de l'ordre $\leq$. Les opérations de ce treillis seront notées $\wedge$ et $\vee$;

(2) $a^2 \leq a$ pour tous les éléments $a \in V$;

(3) si 0 (resp. e) est l'élément le plus petit (resp. le plus grand) du treillis complet V , alors

$$0.e = e.0 = 0.$$

Nous appellerons un groupeïde-treillis, un groupeïde ordonné $\langle V ; \leq \rangle$ satisfaisant aux conditions (1), (2), (3).

V n'est pas, en général, un groupeïde réticulé ; il est seulement un cas particulier des groupeïdes ordonnés en treillis. Nous désignerons toujours par V un groupeïde-treillis.

Un élément b de V sera appelé un absorbant bilatère de l'élément $a \in V$ si les conditions

$$(4) \quad b \leq a$$

et

$$(5_1) \quad ab \leq b ,$$

$$(5_2) \quad ba \leq b ,$$

sont vérifiées. b sera appelé un absorbant à gauche (resp. un absorbant à droite) si (4) et (5_1) (resp. (4) et (5_2)) sont vérifiées.

Si les éléments k et a de V satisfont aux conditions

$$(6) \quad k \leq a \text{ et } ka \wedge ak \leq k ,$$

alors k sera appelé un quasi-absorbant de l'élément a .

Exemple 1 : L'ensemble T de tous les sous-demi-groupes avec 0 d'un demi-groupe D avec 0 constitue donc un groupeïde-treillis. Les idéaux bilatères, les idéaux à droite et à gauche, puis les quasi-idéaux du demi-groupe D correspondent aux absorbants bilatères, absorbants à droite et à gauche, puis aux quasi-absorbants de l'élément 0 de T .

Exemple 2 : Un autre exemple important du groupeïde-treillis est l'ensemble U de tous les sous-anneaux d'un anneau associatif.

Exemple 3 : Tous les sous-groupes d'un groupe forment aussi un groupeïde-treillis par rapport à l'inclusion et par rapport à "une multiplication" convenable. (Dans cette conférence, nous ne nous occupons pas de ce dernier exemple.)

Dans quelques travaux, nous avons commencé à fonder la théorie des absorbants. Pour la recherche des propriétés des absorbants, nous avons besoin de quelques conditions d'associativité et de distributivité lesquelles, par exemple, sont vérifiées dans les groupeïdes-treillis T et U . Comme illustration, nous ne mentionnons ici qu'une condition d'associativité et une condition de distributivité :

(i) Si k_1, k_2, k_3 sont des quasi-absorbants de l'élément e de V , alors l'associativité

$$(k_1 k_2)k_3 = k_1(k_2 k_3)$$

a lieu.

(ii) Si x et y sont des éléments inférieurs à l'élément $a \in V$; $x, y \leq a$, alors la distributivité

$$(x \vee ax)y = xy \vee (ax)y \quad \text{et} \quad y(x \vee ax) = yx \vee y(ax)$$

a lieu.

Nous voudrions faire connaître une partie des résultats que nous avons obtenus sur les groupoïdes-treillis.

1. Un demi-groupe (anneau) D est appelé régulier (au sens de von NEUMANN), si $a \in aDa$ pour chaque élément a de D .

L. KOVÁCS a démontré, dans son article [4], le théorème suivant : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau (demi-groupe) D soit régulier est que, pour tout idéal à droite R et tout idéal à gauche L de D ,

$$RL = R \cap L.$$

A l'aide de ce théorème, nous pouvons définir la notion suivante : Un élément a d'un groupoïde-treillis V est dit régulier si $r\ell = r \wedge \ell$ pour tout absorbant à droite r et tout absorbant à gauche ℓ de l'élément a .

Dans la note [5], nous avons donné plusieurs caractérisations des éléments réguliers de V . Ces caractérisations généralisent quelques résultats connus concernant les demi-groupes et anneaux réguliers ; par exemple, un théorème de J. CALAIS [2] et un autre de L. KOVÁCS [4].

Un élément a d'un groupoïde-treillis V est appelé duo-élément si tous les absorbants à gauche et tous les absorbants à droite de l'élément a sont des absorbants bilatères de a . Cette notion est une généralisation des duo-demi-groupes (duo-anneaux) introduits par E. H. FELLER [3]. Dans l'article [6], nous avons caractérisé les duo-éléments réguliers.

2. Un demi-groupe D avec 0 est dit 0-simple si D possède seulement deux idéaux bilatères 0 et D , et si $D^2 \neq 0$. Si un demi-groupe 0-simple D est l'union de ses idéaux à droite 0-minimaux et l'union de ses idéaux à gauche 0-minimaux, $D = \bigcup_{\gamma} R_{\gamma} = \bigcup_{\delta} L_{\delta}$, alors D est justement un demi-groupe complètement 0-simple.

Un absorbant à droite r non nul d'un élément a de V est appelé minimal, si a ne possède pas un absorbant à droite r' avec la propriété $0 < r' < r$. L'absorbant à gauche minimal et le quasi-absorbant minimal sont définis d'une manière analogue.

Un élément a d'un groupoïde-treillis est dit simple si a possède seulement les deux absorbants bilatères triviaux 0 et a , et si $a^2 \neq 0$. Un élément simple sera appelé complètement simple, s'il est l'union de ses absorbants à droite minimaux et l'union de ses absorbants à gauche minimaux :

$$a = \bigvee_{\gamma} r_{\gamma} = \bigvee_{\delta} \ell_{\delta}.$$

Dans l'article [7], nous nous sommes occupés des éléments complètement simples, et nous y avons démontré quelques théorèmes de décomposition. Ces théorèmes généralisent les théorèmes de décomposition bien connus concernant les anneaux semi-simples, ainsi que les demi-groupes complètement 0-simples.

3. R. BAER [1] introduit la notion suivante : Un sous-anneau M d'un anneau associatif A est appelé un méta-idéal à index fini de A s'il existe une chaîne finie

$$(7) \quad A = B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_{r-1} \supseteq B_r = M$$

telle que B_i soit un idéal bilatère de B_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, r$).

R. BAER a prouvé le théorème suivant : Un sous-anneau M de l'anneau A est un méta-idéal à index fini de A , si et seulement si, A possède un idéal bilatère I tel que

$$(8) \quad I^k \subseteq M \subseteq I$$

pour un entier positif k .

Dans la note [8], nous avons défini la notion de "méta-absorbant" : un élément m d'un groupoïde-treillis V est appelé un méta-absorbant de l'élément $a \in V$ s'il existe une chaîne finie

$$a = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{s-1} \geq b_s = m$$

telle que b_j soit un absorbant bilatère de b_{j-1} ($j = 1, 2, \dots, s$).

Nous avons prouvé un théorème sur les méta-absorbants qui généralise le résultat de BAER. Ce résultat implique un théorème concernant les demi-groupes qui est analogue au théorème de Baer. Puis nous avons prouvé que le produit, (l'intersection, l'union) de deux méta-absorbants d'un élément $a \in V$ est un méta-absorbant de a .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAER (R.). - Meta ideals, Report of a conference on linear algebras [1956. Shelter Island], p. 33-52. - Washington, National Academy of Sciences National Research Council, 1957 (National Academy of Sciences ..., Publications, 502).
- [2] CALAIS (J.). - Demi-groupes quasi inversifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 2357-2359.
- [3] FELLER (E. A.). - Properties of primary non-commutative rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 89, 1958, p. 79-91.
- [4] KOVÁCS (L.). - A note on regular rings, Publ. Math., Debrecen, t. 4, 1956, p. 465-468.
- [5] STEINFELD (O.). - Über Groupoide-Verbände, I., Acta Sc. Math., t. 31, 1970, p. 203-218.
- [6] STEINFELD (O.). - Über die regulären duo-Elemente in Gruppoid-Verbänden, Acta Sc. Math., t. 32, 1971, p. 327-331.

- [7] STEINFELD (O.). - Über Gruppoid-Verbände, II., Period. Math. Hung. (à paraître).
- [8] STEINFELD (O.). - Über Metaabsorbente in Gruppoid-Verbänden, Acta Math. Acad. Sc. Hung. (à paraître).

Ottó STEINFELD
Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete
Reáltanoda u. 13-15
BUDAPEST V (Hongrie)
